Examen de Mathématiques

L3 Physique-Recherche, Octobre 2010

1 Relation de commutation et valeurs propres.

Nous avons vu en cours comment pour deux opérateurs, la relation de commutation $[\overline{\overline{A}},\overline{\overline{B}}] = i\overline{\overline{1}}$ impose les valeurs propres de l'opérateur $\overline{\overline{H}} = \overline{\overline{A}}^{\,2} + \overline{\overline{B}}^{\,2}$. Nous allons faire la même démarche, en considérant le cas de trois opérateurs obéissant à une relation de commutation. Quelques rappels :

- pour un produit scalaire complexe défini sur un espace vectoriel $\mathcal{E}$, nous avons $(u, \lambda v) = \lambda(u, v)$ et $(\lambda u, v) = \lambda^*(u, v)$ où $\lambda \in \mathbb{C}$ et $u, v \in \mathcal{E}$.
- un opérateur $\overline{\overline{A}}^{\,\dagger}$ est l'adjoint de $\overline{\overline{A}}$ si $(u, \overline{\overline{A}}\, v) = (\overline{\overline{A}}^{\,\dagger}\, u, v)$ $\forall u, v \in \mathcal{E}$. Un opérateur est dit Hermitien si $\overline{\overline{A}}^{\,\dagger} = \overline{\overline{A}}$.
- $[\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}}, \overline{\overline{C}}] = [\overline{\overline{A}}, \overline{\overline{C}}] + [\overline{\overline{B}}, \overline{\overline{C}}]$.

Définitions. Soit trois opérateurs $\overline{\overline{A}}$, $\overline{\overline{B}}$ et $\overline{\overline{C}}$ Hermitien obeissant à la relation de commutation

$$[\overline{\overline{A}},\overline{\overline{B}}] = i\overline{\overline{C}}\ ; [\overline{\overline{B}},\overline{\overline{C}}] = i\overline{\overline{A}}\ ; [\overline{\overline{C}},\overline{\overline{A}}] = i\overline{\overline{B}}$$

et l'opérateur $\overline{\overline{H}} = \overline{\overline{A}}^{\,2} + \overline{\overline{B}}^{\,2} + \overline{\overline{C}}^{\,2}$.

1. Commutation. Démontrer que

$$[\overline{\overline{B}}^{\,2},\overline{\overline{A}}] = -i(\overline{\overline{B}}\,\overline{\overline{C}} + \overline{\overline{C}}\,\overline{\overline{B}})\ ;\ [\overline{\overline{C}}^{\,2},\overline{\overline{A}}] = i(\overline{\overline{B}}\,\overline{\overline{C}} + \overline{\overline{C}}\,\overline{\overline{B}})$$

En déduire que $\overline{\overline{H}}$ commute avec $\overline{\overline{A}}$ (et de même donc, avec les deux autres).

2. Opérateurs d'échelle. Soit les deux opérateurs

$$\overline{\overline{U}} = \overline{\overline{B}} + i\overline{\overline{C}}\ ; \overline{\overline{V}} = \overline{\overline{B}} - i\overline{\overline{C}}$$

Démontrer que $[\overline{\overline{A}},\overline{\overline{U}}] = \overline{\overline{U}}$; $[\overline{\overline{A}},\overline{\overline{V}}] = -V$; $[\overline{\overline{H}},\overline{\overline{U}}] = 0$; $[\overline{\overline{H}},\overline{\overline{V}}] = 0$

3. Valeurs Propres. Soit v_1 un vecteur propre de l'opérateur $\overline{\overline{A}}$ associé à la valeur propre λ : $\overline{\overline{A}}\, v_1 = \lambda v_1$. Démontrer alors que les deux vecteurs

$$v_2 = \overline{\overline{U}}\, v_1\ ;\ v_3 = \overline{\overline{V}}\, v_1 \qquad (1)$$

sont également vecteurs propres de $\overline{\overline{A}}$. Quelles sont les valeurs propres de v_2 et v_3 pour l'opérateur $\overline{\overline{A}}$?

4. Défini positif. Démontrer que si un opérateur $\overline{\overline{O}}$ est hermitien, alors $(u, \overline{\overline{O}}^{\,2} u) \geq 0$ $\forall u \in \mathcal{E}$. En déduire que les valeurs propres de $\overline{\overline{O}}^{\,2}$ sont forcement positives. En utilisant la linéarité du produit scalaire, démontrer que les valeurs propres de l'oprateur $\overline{\overline{H}}$ définies ci-dessus sont positives.

5. Vec propre et commutation. Démontrer que si v_1 est vecteur propre de $\overline{\overline{H}}$ avec la valeur propre μ, alors v_2 et v_3 défini par (1) le sont également. Quelles sont les valeurs propres de v_2 et v_3 pour l'opérateur $\overline{\overline{H}}$?

6. $\overline{\overline{H}}$ et $\overline{\overline{A}}$ Démontrer que si v_1 est un vecteur propre commun de l'opérateur $\overline{\overline{A}}$ (associé à la valeur propre λ) et de $\overline{\overline{H}}$ (associé à la valeur propre μ) Alors,

$$\lambda^2 \leq \mu$$

7. Finale. En utilisant les résultats des exercices 3,5,6 déduire que si on applique suffisamment l'opérateur U à un vecteur propre v de $\overline{\overline{A}}$ et de $\overline{\overline{H}}$, nous obtenons nécessairement le vecteur 0. Autrement dit, $\exists N$ tq si $n > N$, alors $(\overline{\overline{U}})^n v = 0$.

Remarques. Le résultat précédent nous emmènera directement à la conclusion que les valeurs propres de $\overline{\overline{A}}$ sont entier ou demi entier. Mais nous ne poursuivrons pas plus la démonstration. Notons que des opérateurs importants ayant la structure ci-dessus sont le moment cinétique et le spin, que vous rencontrerez en mécanique quantique.

2 TL de créneau.

1. Fonction périodique. Soit $f(t)$ une fonction $T-$périodique : $f(t+T)=f(t)$. Nous posons

$$\phi(s)=\int_0^T e^{-st}f(t)dt$$

Calculez $\hat{f}(s)$, la transformé de Laplace de la fonction $f(t)$, comme une combinaison de $\phi(s)$ et de fonctions connues.

Help : IL nous faudrait découper l'intégrale en tranche de longueur T. Nous connaissons évidemment la somme de la série géomtrique

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n=1/(1-\lambda)$$

2. Application. Soit la fonction "créneau" $g(t)$ tel que donné par la figure 1 : $g(t)=1$ si $2na<t\leq(2n+1)a$ et $g(t)=-1$ si $(2n+1)a<t\leq 2(n+1)a$. Démontrer que

$$\hat{g}(s)=\frac{1}{s}\frac{(1-e^{-as})^2}{1-e^{-2as}}$$

En remarquant la relation entre les fonctions $g(t)$ et $h(t)$ de la figure 1, donner également $\hat{h}(s)$.

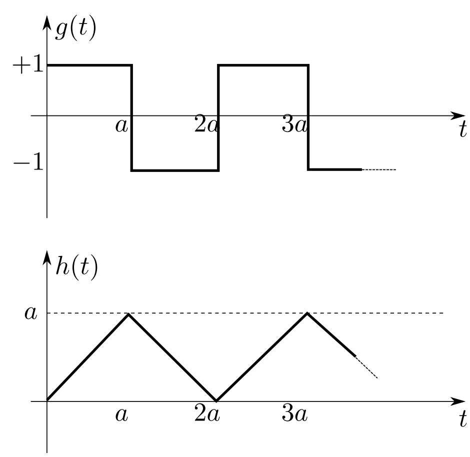

Figure 1: Fonctions créneaux rectangulaire et triangulaire.

3 Oscillateur Harmonique soumis à une force.

Nous souhaitons résoudre l'équation

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2y=at^2$$

avec les condition initiale $y(0)=0$,$y'(0)=0$, $y''(0)=0$.

1. TL. Obtenir l'expression de $\hat{y}(s)$, la TL de $y(t)$.

2. Fraction simple. Décomposer en fraction simple l'expression obtenue ci-dessus.

3. TL inverse. Effectuer la TL inverse de l'expression obtenu précédemment, et donner la solution $y(t)$. Est -ce que l'expression que vous trouvez est dimentionnellement correct ?

4 Stabilité du Chapeau Mexicain.

Nous souhaitons étudier le mouvement d'un mobile dont la position (x,y) est donné par

$$\dot{x} = -x(x^2+y^2)+bx \quad (2)$$
$$\dot{y} = -y(x^2+y^2)+by \quad (3)$$

1. Points fixe. En fonction du signe du paramètre b, trouver les points fixe des équations (2,3).

2. Stabilité. Etudier la stabilité marginale des points fixes que vous avez trouvé, toujours en fonction du signe du paramètre b.

3. Potentiel. Il ne vous a probablement pas échappé que les expressions à droite des équations (2,3) dérivent d'un potentiel

$$V(x,y)=\frac{1}{4}\left(x^2+y^2\right)^2-\frac{b}{2}\left(x^2+y^2\right)$$

Pouvez vous justifier vos résultats en terme de ce potentiel ?

NOTE IMPORTANTE SUR LA REDACTION.

1. Choisissez les problèmes qui vous plaisent le plus. Vous obtiendrez 20/20 si vous faites approximativement le 3/4 de cet examen.
2. Si vous ne savez pas répondre à une question, admettez le résultat et passez à la question d'après.
3. La copie n'est pas un brouillon. Rédigez de façon claire et concis, en mettant en valeur les résultats importants que vous obtenez. Seulement une argumentation correcte rapporte des points.