# Examen de Mathématiques

L3 Physique-Recherche, Octobre 2010

## 1 Relation de commutation et valeurs propres.

**1. Définitions.** Soit trois opérateurs $\overline{\overline{A}}$, $\overline{\overline{B}}$ et $\overline{\overline{C}}$ Hermitien obeissant à la relation de commutation

$$[\overline{\overline{A}}, \overline{\overline{B}}] = i\overline{\overline{C}} \ ; [\overline{\overline{B}}, \overline{\overline{C}}] = i\overline{\overline{A}} \ ; [\overline{\overline{C}}, \overline{\overline{A}}] = i\overline{\overline{B}}$$

et l'opérateur $\overline{\overline{H}} = \overline{\overline{A}}^2 + \overline{\overline{B}}^2 + \overline{\overline{C}}^2$. Demontrer que

$$[\overline{\overline{B}}^2, A] = -i(\overline{\overline{B}}\,\overline{\overline{C}} + \overline{\overline{C}}\,\overline{\overline{B}}) \ ; \ [\overline{\overline{C}}^2, A] = i(\overline{\overline{B}}\,\overline{\overline{C}} + \overline{\overline{C}}\,\overline{\overline{B}})$$

Nous avons

$$[B^2, A] = BBA - ABB$$

Or, $AB = BA + iC$ et $BA = AB - iC$. En remplaçant dans l'expression ci-dessus, nous trouvons

$$\begin{aligned} [B^2, A] &= B(AB - iC) - (BA + iC)B \\ &= -i(BC + CB) \end{aligned}$$

En déduire que $\overline{\overline{H}}$ commute avec $\overline{\overline{A}}$ (et de même donc, avec les deux autres).

Nous avons

$$\begin{aligned} [H, A] &= [A^2, A] + [B^2, A] + [C^2, A] \\ &= 0 - i(BC + CB) + i(BC + CB) \\ &= 0 \end{aligned}$$

**2. Opérateurs d'échelle.** Soit les deux opérateurs

$$\overline{\overline{U}} = \overline{\overline{B}} + i\overline{\overline{C}} \ ; \overline{\overline{V}} = \overline{\overline{B}} - i\overline{\overline{C}}$$

Démontrer que $[\overline{\overline{A}}, \overline{\overline{U}}] = \overline{\overline{U}}$ ; $[\overline{\overline{A}}, \overline{\overline{V}}] = -V$ ; $[\overline{\overline{H}}, \overline{\overline{U}}] = 0$ ; $[\overline{\overline{H}}, \overline{\overline{V}}] = 0$

Nous avons

$$\begin{aligned} [A, U] &= [A, B] + i[A, C] \\ &= iC + i(-iB) \\ &= U \end{aligned}$$

La commutattivité de $H$ et $U$ découle de la commutativité de $H$ avec les trois opérateurs $A, B, C$.

**3. Valeurs Propres.** Soit $v_1$ un vecteur propre de l'opérateur $\overline{\overline{A}}$ associé à la valeur propre $\lambda$ : $\overline{\overline{A}}\, v_1 = \lambda v_1$. Démontrer alors que les deux vecteurs

$$v_2 = \overline{\overline{U}}\, v_1 \quad (1)$$
$$v_3 = \overline{\overline{V}}\, v_1 \quad (2)$$

sont également vecteurs propres de $\overline{\overline{A}}$. Quelles sont les valeurs propres de $v_2$ et $v_3$ pour l'opérateur $\overline{\overline{A}}$ ?

Nous avons

$$AUv_1 = (UA + U)v_1 = (\lambda + 1)Uv_1$$

Donc $Uv_1$ est bien vecteur propre de $A$, mais avec la valeur propre $\lambda + 1$. Nous voyons ainsi que si nous connaissons un vecteur propre, nous pouvons en construire les autres à partir des opérateurs d'echelle $U$ et $V$, par application répétée.

**4. Défini positif.** Démontrer que si un opérateur $\overline{\overline{O}}$ est hermitien, alors $(u, \overline{\overline{O}}^2 u) \geq 0 \ \forall u \in \mathcal{E}$.

Nous avons $(u, OOu) = (Ou, Ou)$ par hermicité de $O$. Or, nous savons que le produit scalaire d'un vecteur avec lui même est $\geq 0$.

En déduire que les valeurs propres de $\overline{\overline{O}}^2$ sont forcement positives : soit $v$ un vecteur propre de $O^2$ : $O^2 v = \mu v$. Or, $(v, O^2 v) = \mu(v, v)$. Donc $\mu \geq 0$.

En utilisant la linéarité du produit scalaire, démontrer que les valeurs propres de l'oprateur $\overline{\overline{H}}$ défini cidessus sont positives.

Soit $u$ un vecteur quelconque. Alors

$$(u, Hu) = (u, A^2 u) + (u, B^2 u) + (u, C^2 u)$$

$A$,$B$, $C$ étant hermitien, nous concluons que $(u, Hu) \geq 0 \ \forall u$.

**5. Vec propre et commutation.** Démontrer que si $v_1$ est vecteur propre de $\overline{\overline{H}}$ avec la valeur propre $\mu$, alors $v_2$ et $v_3$ défini par (1,2) le sont également. Quelles sont les valeurs propres de $v_2$ et $v_3$ pour l'opérateur $\overline{\overline{H}}$ ?

Nous avons

$$Hv_2 = HUv_1 = UHv_1 = \mu Uv_1 = \mu v_2$$

Donc $v_2$ est val propre de $H$, associé à la même valeur propre.

**6. $\overline{\overline{H}}$ et $\overline{\overline{A}}$** Démontrer que si $v_1$ est un vecteur propre commun de l'opérateur $\overline{\overline{A}}$ (associé à la valeur propre $\lambda$) et de $\overline{\overline{H}}$ (associé à la valeur propre $\mu$) Alors,

$$\lambda^2 \leq \mu$$

Nous savons que $(v_1, Hv_1) = \mu(v_1, v_1)$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}(v_1, Hv_1) &= (v_1, A^2v_1) + (v_1, B^2v_1) + (v_1, C^2v_1) \\ &= \lambda^2 + \text{qqchose}\end{aligned}$$

Or, qqchose est $\geq 0$, donc $\mu \geq \lambda^2$

**7. Finale.** En utilisant les résultats des exercices 3,5,6 déduire que si on applique suffisamment l'opérateur $U$ à un vecteur propre $v$ de $\overline{\overline{A}}$ et $\overline{\overline{H}}$, nous obtenons nécessairement le vecteur 0. Autrement dit, $\exists N$ tq si $n > N$, alors $(\overline{\overline{U}})^n v = 0$.

Soit $v$ tel que $Av = \lambda v$ et $Hv = \mu v$. D'après ce que nous avons dit, $\mu > \lambda^2$. Considérons maintenant le vecteur $v_2 = Uv$. Alors $Av_2 = (\lambda + 1)v_2$ et $Hv_2 = \mu v_2$ et donc $\mu \geq (\lambda + 1)^2$. l'application répété $n$ fois de $U$ à $v$ nous impose donc que

$$\mu \geq (\lambda + n)^2$$

Ceci ne peut pas tenir indéfiniment. Nous devons donc, pour échapper à cette contradictio, avoir un $n$ limit tel que $U^n v = 0$.

# 2 TL de créneau.

**1. Fonction périodique.** Soit $f(t)$ une fonction $T-$périodique : $f(t + T) = f(t)$. Nous posons

$$\phi(s) = \int_0^T e^{-st} f(t)dt$$

Calculez $\hat{f}(s)$, la transformé de Laplace de la fonction $f(t)$, comme une combinaison de $\phi(s)$ et de fonctions connues.

Calculons l(intégrale sur une tranche :

$$\int_{nT}^{(n+1)T} f(t)e^{-st}dt = e^{-nTs} \int_0^T f(t)e^{-st}dt$$

Nous avons donc

$$\hat{f}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTs}\phi(s) = \frac{\phi(s)}{1 - e^{Ts}}$$

**2. Application.** La fonction créneau est une une fonction périodique de période $T = 2a$. Pour cette fonction, nous avons

$$\begin{aligned}\phi(s) &= \int_0^a e^{-st}dt - \int_a^{2a} e^{-st}dt \\ &= \frac{-1}{s}\left(e^{-as} - 1 - e^{-2as} + e^{-as}\right) \\ &= \frac{1}{s}(1 - e^{-as})^2\end{aligned}$$

Et donc, en utilisant le résultat de la question précédente, nous trouvons

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{s}\frac{(1 - e^{-as})^2}{1 - e^{-2as}}$$

Multiplier le numérateur et dénomniateur par $\exp(as)$ et la relation $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$ nous lontre que

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{s}\tanh(as/2)$$

# 3 Oscillateur Harmonique soumis à une force.

En utilisant les TL et TL inverse, résoudre l'équation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = at^2$$

avec les condition initiale $y(0) = 0$,$y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$.

En prenant la TL, nous trouvons

$$\hat{y}(s) = \frac{2a}{s^3(s^2 + \omega^2)}$$

Pour effectuer la TL inverse, nous devons décomposer cette expression en fraction simple :

$$\frac{1}{s^3(s^2 + \omega^2)} = \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{1}{s^3} - \frac{1}{\omega^2}\frac{1}{s} + \frac{1}{\omega^2}\frac{s}{s^2 + \omega^2}\right)$$

Nous avons donc

$$y(t) = \frac{a}{\omega^2}\left(t^2 - \frac{2}{\omega^2} + \frac{2}{\omega^2}\cos \omega t\right)$$

# 4 Stabilité du Chapeau Mexicain.

Nous souhaitons étudier le mouvement d'un mobile dont la position $(x, y)$ est donné par

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x(x^2 + y^2) + bx \qquad (3)\\ \dot{y} &= -y(x^2 + y^2) + by \qquad (4)\end{aligned}$$

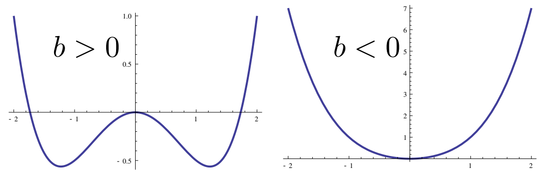


FIGURE 1: le potentiel chapeau mexicain.

**1. Points fixe.** En fonction du signe du paramètre $b$, trouver les points fixe des equations (3,4).

Il existe un point fixe évident $x = 0, y = 0$. L'autre point fixe est donné par l'équation $x^2 + y^2 = b$, qui n'a une solution que si $b > 0$. Par contre dans ce cas, n'importe quel point sur le cercle de rayon $\sqrt{b}$ est un point fixe. Il n'est pas difficile de voir que l'expression de droite, représentant une force, dérive d'un potentiel

$$V(x) = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)^2 - \frac{b}{2}(x^2 + y^2)$$

Voir figure 1.

**2. Stabilité.** Etudier la stabilité marginale des points fixes que vous avez trouvé, toujours en fonction du signe du paramètre $b$.

Commençons par le point central. nous pouvons écrire $x(t) = \epsilon x_1(t)$. Nous voyons alors qu'au premier ordre, nous avons

$$\dot{x}_1 = b x_1 \ ; \ \dot{y}_1 = b y_1$$

Ce point est stable si $b < 0$.

supposons maintenant $b > 0$ et prenons un point fixe $(x_0, y_0)$ tel que $x_0^2 + y_0^2 = \sqrt{b}$. En posant $x(t) = x_0 + \epsilon x_1(t)$ et $y(t) = y_0 + \epsilon y_1(t)$, nous obtenons à l'ordre 1 en epsilon,

$$\begin{aligned}
\dot{x_1} &= -2x_0^2 x_1 - 2x_0 y_0 y_1 \\
\dot{y}_1 &= -2x_0 y_0 x_1 - 2y_0^2 y_1
\end{aligned}$$

Ceci est un systeme de deux equations differentielle couplées ; les valeurs propre de la matrice sont les racines de l'équation caractéristique

$$r^2 + 2(x_0^2 + y_0^2) r = 0$$

sont $r_1 = 0$ et $r_2 = -2(x_0^2 + y_0^2) = -2b$. Les deux valeurs étant $\leq 0$, l'équilibre est stable. Ceci dit, la valeur propre $r_1 = 0$ indique une stabilité neutre : si on effectue des petits déplacements parallèle au cercle, il n'y a pas de force de rappel.