

Examen de Mathématiques 362.

Université Joseph Fourier, Département de Physique, Licence Physique Recherche.

(Dated: 26 Mai 2011)

I. TRANSFORMÉE DE LAPLACE INVERSE.

Nous savons que si

$$\hat{f}(s) = \text{TL}[f(t)]$$

alors

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{f}(s)e^{ts} ds$$

où c est un nombre réel quelconque supérieur à la partie réelle de tous les pôles de la fonction $\hat{f}(s)$ (figure 1).

En utilisant vos connaissances de l'intégration dans le plan complexe, et en choisissant sagement vos contours d'intégration, calculer alors la transformée de Laplace inverse de la fonction

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{s^2 + \omega^2}$$

Help : Evidemment, il faut fermer le contour de l'intégration par un arc de cercle de rayon R dont la contribution à l'intégrale est nulle quand $R \rightarrow \infty$. Argumentez pourquoi il faut choisir C_1 si $t < 0$ et C_2 si $t > 0$. [Je ne demande pas une majoration rigoureuse, mais un argument convaincant].

II. LA LOI DE SNELL-DESCARTES.

La loi de Descartes postule que pour aller d'un point A à un point B , la lumière choisit la trajectoire qui minimise le temps de parcours. Nous voulons étudier la propagation de la lumière dans le plan (x, y) où la vitesse de la lumière ne dépend que de la coordonnées y : $v = c/n(y)$ [Ceci est par exemple le cas des fibres optiques dopés]. Démontrer que cela implique

$$n \sin \theta = Cte$$

le long de la trajectoire, où θ est l'angle de la tangente à la courbe avec l'axe y (figure 2).

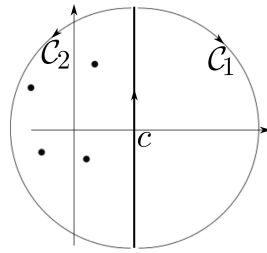


FIGURE 1

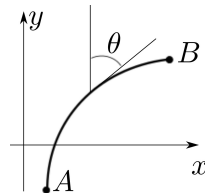


FIGURE 2

III. ETUDE DES FONCTIONS DE BESSEL J_m .

Les fonctions de Bessel $J_m(t)$ sont les solutions de l'équation différentielle

$$t^2 y'' + ty' + (t^2 - m^2)y = 0 \quad (1)$$

et nous savons que la fonction $J_m(t)$ définie par

$$J_m(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(t \sin \theta - m\theta) d\theta \quad (2)$$

est bien solution de l'équation (1).

1. Fonction génératrice.

En utilisant vos connaissances des développements de Laurent autour du point $z = 0$, démontrer que

$$e^{t(z-1/z)/2} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(t)z^m \quad (3)$$

[Help : En d'autre terme, démontrer que que le coefficient de z^m a bien la forme de l'éq. (2).

2. Relation de récurrence.

– En dérivant la relation (3) par rapport à t , démontrer que

$$2J'_m(t) = J_{m-1}(t) - J_{m+1}(t)$$

– En dérivant la relation (3) par rapport à z , démontrer que

$$\frac{2m}{t} J_m(t) = J_{m-1}(t) + J_{m+1}(t)$$

3. Les bessel 1/2.

En utilisant l'équation différentielle des bessel, démontrer que

$$J_{\pm 1/2}(t) = (A \sin t + B \cos t) / \sqrt{t}$$

Help : A quelle équation obéit la fonction $u(t) = \sqrt{t}y(t)$, où y est solution de l'équation (1) ?

Note : Une étude plus complète nous montrerait que $J_{+1/2}$ ne contient que le terme en sinus, et $J_{-1/2}$ que le terme en cosinus.

4. Intégrale définie.

Démontrer que

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} J_0(x) dx = 1/\sqrt{1+a^2}$$

$$a > 0$$

Help1 : Utilisez la définition intégrale (2) de la fonction de Bessel, intervertir l'ordre d'intégration pour aboutir à l'intégrale d'une fonction rationnelle trigonométrique que vous pouvez ensuite calculer par la méthode des résidus.

Help2 : Les solutions de l'équation algébrique $(z - 1/z)^2 - 4a^2 = 0$ sont les racines des deux équations algébriques $(z - 1/z) = \pm 2a$. Il faut déterminer les racines à l'intérieur du cercle unité.

IV. LAGRANGIEN ET JAUGE.

Plusieurs lagrangiens différents peuvent donner les mêmes équations d'Euler-Lagrange. En mécanique classique, nous savons par exemple que le potentiel n'est défini qu'à une constante additive près. Pour les champs, nous avons quelque chose de très analogue, nous pouvons ajouter une divergence au lagrangien sans changer les équations. Vous avez déjà rencontré ce problème en électromagnétisme où vous avez le choix de la jauge (de Coulomb, Lorentz, ...).

1. Un exemple concret.

Supposons que nous avons un champ à deux dimensions $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Nous noterons les coordonnées par x^j et les composantes du champ par f^i ; les dérivations sont notées par

$$f^i_{,j} = \frac{\partial f^i}{\partial x^j}$$

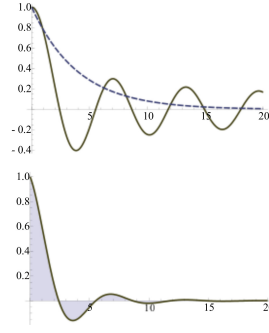


FIGURE 3 haut : $J_0(x)$ (trait continue) et $\exp(-ax)$ (tiret); bas : le produit des deux fonctions.

Nous supposons que le champ possède un lagrangien $\mathcal{L} = \mathcal{L}(f^i, f^i_{,j}, x^j)$.

Prenons maintenant la fonction vectorielle ϕ tel que $\phi^1 = f^1 f^2$ et $\phi^2 = 0$. Calculer $\mathbf{div}\phi = \partial\phi^1/\partial x^1 + \partial\phi^2/\partial x^2$ en terme des f^i et $f^i_{,j}$. Montrer que si on ajoute $\mathbf{div}\phi$ au lagrangien précédent, les équations d'Euler-Lagrange ne changent pas. Cela veut dire que \mathcal{L} et $\mathcal{L} + \mathbf{div}\phi$ ont exactement les mêmes équations d'Euler-Lagrange.

2. Le cas général.

Ce que nous avons montré plus haut ne dépend pas de la forme de la fonction ϕ , nous aurions pu prendre n'importe quelle fonction. Soit un champ vectoriel $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ dans un espace à n dimensions. Le champ possède un Lagrangien

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(f^i_{,j}, f^i, x^j) \quad i, j = 1, \dots, n$$

Soit $\phi^k(f^i)$ une fonction vectorielle quelconque du champ définissons un nouveau lagrangien

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \sum_k \frac{\partial\phi^k}{\partial x^k}$$

Démontrer que les équations d'Euler-Lagrange de ce nouveau lagrangien \mathcal{L}' sont les mêmes que celles que l'on obtient avec \mathcal{L} .

La quantité $\sum_k \partial\phi^k/\partial x^k$ est la divergence du champ ϕ .

Help : Bien que cela paraissent compliqué, c'est en réalité juste un jeu avec les indices très similaire à l'obtention des deux premières équations de Maxwell du DM que vous m'avez rendu. Il vous suffit juste d'exprimer proprement ce que vaut $\partial\phi^k/\partial x^k$ en termes des f^i et $f^i_{,j}$ comme dans l'exemple : ce ne sont que des dérivations en chaîne.

La signification géométrique de l'invariance par ajout d'une divergence devient beaucoup plus claire à travers l'étude des formes différentielles que vous aurez l'an prochain (si vous choisissez l'option).