Corrigé de l'examen de Mathématiques 362.

Université Joseph Fourier, Département de Physique, Licence Physique Recherche.

26 Mai 2011

1 Etude des fonctions de Bessel J_m.

1. Fonction génératrice. Nous savons que si

$$f(z) = \sum_m A_m z^m$$

alors

$$A_m = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z^{m+1}} dz$$

Dans notre cas, comme nous développons en fonction de z, nous avons

$$A_m(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^{t(z-1/z)/2}}{z^{m+1}} dz$$

posons comme il se doit $z = e^{i\theta}$ et $dz/z = id\theta$

$$\begin{aligned} A_m(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{it\sin\theta} e^{-im\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(t\sin\theta - m\theta)} d\theta \end{aligned}$$

En découpant l'intervalle, nous avons

$$\begin{aligned} A_m(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \cos(t\sin\theta - m\theta)\, d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \cos(t\sin\theta - m\theta)\, d\theta \\ &+ \frac{i}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(t\sin\theta - m\theta)\, d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \sin(t\sin\theta - m\theta)\, d\theta \end{aligned}$$

Si dans les deuxièmes intégrales, nous changeons $\theta \to \theta + 2\pi$ et remarquons que cos est pair et sin impair, nous avons

$$A_m(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(t\sin\theta - m\theta)\, d\theta$$

2. Récurrence. En dérivant par rapport à t, nous trouvons

$$\begin{aligned} 2\sum_n J'_m(t) z^m &= \sum_m J_m(t)\left(z^{m+1} - z^{m-1}\right) \\ &= \sum_m J_{m-1}(t) z^m - \sum_m J_{m+1}(t) z^m \end{aligned}$$

En dérivant par rapport à z, nous trouvons

$$\frac{t}{2}\left(1 + z^{-2}\right)\sum_m J_m(t) z^m = \sum_m m J_m(t) z^{m-1}$$

En renouvelant notre indexe m, nous avons

$$\sum_m \left(J_{m-1}(t) + J_{m+1}(t)\right) z^{m-1} = \sum_m \frac{2m}{t} J_m(t) z^{m-1}$$

Ce qui nous donne la relation recherché en identifiant terme à terme.

3. Les bessel 1/2. Nous avons $ty' = t^{1/2}u' - (1/2)t^{-1/2}u$ et $t^2y'' = t^{3/2}u'' - t^{1/2}u' + (3/4)t^{-1/2}u$. En remplaçant dans l'équation de Bessel, nous trouvons

$$u'' + u = 0$$

dont les solutions sont

$$u(t) = A\sin t + B\cos t$$

Notons que la définition complète de la fonction de Bessel pour un indice m quelconque (pas forcément entier) est

$$J_m(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(t\sin\theta - m\theta\right) d\theta - \frac{\sin(m\pi)}{\pi}\int_0^\infty e^{-t\sinh z - mz} dz$$

Nous voyons

4. Intégrale définie. Nous avons, en intervertissant l'ordre de l'intégration,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \int_0^\infty e^{-ax}\left(e^{ix\sin\theta} + e^{-ix\sin\theta}\right) dx d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left(\frac{1}{a - i\sin\theta} + \frac{1}{a + i\sin\theta}\right) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{a}{a^2 + \sin^2\theta} d\theta \end{aligned}$$

Pour résoudre cette dernière intégrale, nous pouvons soit procéder de façon classique en posant $u = \tan\theta$, soit par la méthode des résidus en passant dans le plan complexe. Notons que nous pouvonsEtude des fonctions de Bessel J_m. étendre l'intervalle d'intégration $I = (1/2\pi)\int_0^{2\pi}$ ...Posons comme d'habitude $z = \exp(i\theta)$ et $dz/z = id\theta$ et nous avons

$$I = \frac{4a}{2i\pi}\oint \frac{1}{4a^2 - (z - 1/z)^2}\frac{dz}{z}$$

Nous avons 4 pôles donnée par les racines de l'équation $(z - 1/z) = \pm 2a$ et il n'est pas difficile de voir que les deux à l'intérieur du cercle unité sont $z_0 = a - \sqrt{a^2+1}$ et $z_1 = -z^0$. Remarquant au passage que $z_0^2 = 2a^2 + 1 - 2a\sqrt{a^2+1}$. Nous avons donc

$$f(z) = \frac{z}{-z^4 + (4a^2+2)z^2 - 1}$$

et le résidu se calcule par

$$\begin{aligned} Res(f, z^i) &= \frac{N(z)}{D'(z)} \\ &= \frac{1}{-4z^2 + 4(2a^2+1)} \\ &= \tfrac{1}{4} \frac{1}{2a\sqrt{a^2+1}} \end{aligned}$$

Bien, nous avons les éléments en main :

$$\begin{aligned} I &= 2i\pi \sum Res \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \end{aligned}$$

2 Transformée de Laplace inverse.

Le facteur important à évaluer est bien sûr l'exponentielle. Si nous écrivons $s = c + s'$ $e^{st} = e^{ct}e^{ts'}$. Nous voyons que si $t > 0$,nous devons choisir l'arc $\mathcal{C}_2$ sur lequel $Re(s') < 0$ pour que $e^{ts'}$ reste fini ; pour les mêmes raisons, c'est l'autre arc de cercle pour $t < 0$. Le reste de la majoration est standard comme nous avons fait souvent en cours.

Revenons à nos calculs. Les pôles de la fonction sont en $s = \pm i\omega$. Si nous choisissons $\mathcal{C}_1$, il n'y a pas de pôle dans le contour et $f(t) = 0$ pour $t < 0$. Si $t > 0$, nous avons deux pôles et

$$Res(e^{ts}/s^2 + \omega^2, \pm i\omega) = \pm\frac{e^{\pm it\omega}}{2i\omega}$$

et

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi i} 2\pi i \frac{1}{2i\omega}\left(e^{it\omega} - e^{-it\omega}\right) \\ &= \frac{\sin \omega t}{\omega} \end{aligned}$$

3 Lagrangien et jauge.

Nous utiliserons les conventions de sommation sur l'indice répété. Expandons d'abord la divergence :

$$\frac{\partial \phi^k}{\partial x^k} = \frac{\partial \phi^k}{\partial f^\mu} f^\mu_{,k}$$

Ceci n'est qu'une dérivation en chaine du genre $(f(u(x))' = u'(x)f'(u)$ à plusieurs dimension, même si la notation le fait apparaître plus compliqué. Donnons nous maintenant une composante du champ ϕ^i, et écrivons les équations d'Euler-Lagrange pour cette composante. Nous avons

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial f^i_{,j}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f^i_{,j}} + \frac{\partial \phi^j}{\partial f^i}$$

Si maintenant nous dérivons par rapport à x^j et réutilisons notre règle de dérivation en chaîne, nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial f^i_{,j}} = \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f^i_{,j}} + \frac{\partial^2 \phi^j}{\partial f^\mu \partial f^i} f^\mu_{,j} \tag{3.1}$$

Occupons nous maintenant de la deuxième partie du Lagrangien. Nous avons

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial f^i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f^i} + \frac{\partial^2 \phi^k}{\partial f^i \partial f^\mu} f^\mu_{,k} \tag{3.2}$$

Nous voyons maintenant que si nous soustrayons l'expression (3.2) à (3.1), le terme en ϕ^k disparaît.