Examens de mathématiques.

L3 Physique-Chimie, Université Joseph Fourier.

Décembre 2005.

A. Équation d'onde : Distributions et conditions initiales.

I. Introduction.

Nous avons vu que les transformées de Laplace sont très utiles à la résolution des équations différentielles, puisqu'elles permettent d'inclure les conditions initiales directement dans l'équation. Le but de cet examen est de montrer que l'utilisation concomitantes des distributions et des transformées de Fourier permet la même chose.

1. Vérifier que si $y(t)$ est la solution de l'équation

$$dy/dt + ay = 0 \tag{1}$$

avec la condition initiale

$$y(t=0) = y_0 \tag{2}$$

alors la distribution $z(t) = H(t)y(t)$ est solution de l'équation

$$dz/dt + az = y_0\delta(t) \tag{3}$$

[**Help** : Pour vérifier cela, vous devez vous souvenir de la dérivée de la fonction échelon d'Heaviside et de quelques règles de manipulation des distributions du genre $\delta(t)$]. **Tracer** les deux fonctions $y(t)$ et $z(t)$ pour les temps positifs *et* négatifs.

Notez l'importance de ce que nous venons de faire ici : pour $t \geq 0$ (les seuls temps qui nous importent en pratique), $z(t)$ et $y(t)$ sont identique. Par contre, nous avions besoin de *deux* équations (l'équation différentielle (1) *et* la condition initiale(2)) pour trouver $y(t)$, tandis qu'une seule équation (3) est suffisante pour trouver $z(t)$: la condition initiale a été inclue dans l'équation à l'aide d'une distribution $\delta(t)$.

2. En suivant la même démarche, vérifier que si $y(t)$ est solution de

$$d^2y/dt^2 + \omega_0^2 y = 0$$

avec les conditions initiales

$$y(0) = y_0 \,;\, \dot{y}(0) = v_0$$

alors la distribution $z(t) = H(t)y(t)$ est solution de l'équation

$$d^2z/dt^2 + \omega_0^2 z = y_0\delta'(t) + v_0\delta(t)$$

Vous voyez à nouveau comment les conditions initiales ont été directement inclues dans l'équation pour $z(t)$.

II. Le problème.

Nous souhaitons résoudre l'équation (à dérivée partielle) d'onde à une dimension :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

avec les conditions initiales extrêmement générales :

$$u(x,0) = f(x) \,;\, \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x)$$

Si $u(x,t)$ désigne la hauteur d'une corde élastique, alors les conditions initiales veulent simplement dire qu'à l'instant initial, nous avons imprimé à la corde une déformation $f(x)$ et la vitesse initiale de chaque point d'abscisse x de la corde est $g(x)$. D'après ce que nous venons de dire plus haut, il nous suffit de chercher la solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x)\delta'(t) + g(x)\delta(t) \tag{4}$$

3. Questions préliminaires. Ces questions ont été vu en cours ou en TD, vous n'avez pas à refaire les calculs. Dans ce qui suit, a est une constante.

- (i) Soit la fonction $\tilde{f}(q)$ est la transformée de Fourier (TF) de $f(x)$; de quel fonction $\tilde{f}(q)\exp(\pm iaq)$ est la TF ?
- (ii) Quelles sont les TF de $\delta(t)$ et de $\delta'(t)$?
- (iii) Quelles sont les TF des fonctions $H(t)\cos(at)$ et $H(t)\sin(at)$?

4. En appliquant une TF **d'abord** par rapport au temps ($t \to \omega$) et ensuite par rapport à l'espace ($x \to q$) à l'équation (4), démontrer (ou vérifier) que $\tilde{\tilde{u}}(q,\omega)$ obéit à l'équation algébrique

$$(-\omega^2 + c^2q^2)\tilde{\tilde{u}}(q,\omega) = i\omega\tilde{f}(q) + \tilde{g}(q)$$

5. En prenant la TF inverse par rapport à ω ($\omega \to t$), démontrer alors que

$$\tilde{u}(q,t) = \cos(cqt)\tilde{f}(q) + \frac{\sin(cqt)}{cq}\tilde{g}(q) \tag{5}$$

6. Démontrer (ou au pire, admettez) que la TF de

$$G(x) = \int_{x-a}^{x+a} g(y)dy$$

est

$$\tilde{G}(q) = 2\frac{\sin(aq)}{q}\tilde{g}(q)$$

Help : La fonction G n'est autre chose que l'intégrale de la fonction g dans une fenêtre de longueur $2a$ autour de l'abscisse x. Il suffit donc de l'écrire (argumenter pourquoi) comme

$$G(x) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi((x-y)/a)g(y)dy$$

($\Pi(x/a)$ est la fonction porte, valant $1/2$ entre $-a$ et $+a$ et nulle ailleurs) et d'utiliser les résultats sur la TF des produits de convolution.

7. Nous arrivons à destination. En prenant la TF inverse par rapport à q ($q \to x$) de l'expression (5), démontrer que pour les temps positifs, ($t \geq 0$), la solution s'écrit comme

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\{f(x-ct) + f(x+ct)\} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)dy$$

[**Help** : utilisez les résultats trouvés au (1.i) et 4]. Commentez les différents termes de la solution.

B. Les polynômes de Laguerre.

Les polynômes de Laguerre $L_n(t)$ appartiennent à la famille des polynômes orthogonaux et apparaissent par exemple lors de la résolution de l'équation de Schrodinger pour l'atome d'hydrogène (cf votre cours de MQ de deuxième semestre). $L_n(t)$, le polynôme de Laguerre d'ordre n ($n = 0, 1, 2, ...$) obéit à l'équation différentielle

$$t\frac{d^2L_n}{dt^2} + (1-t)\frac{dL_n}{dt} + nL_n = 0$$

avec les conditions initiales $L_n(0) = 1$; $\dot{L}_n(0) = -n$.

1. En utilisant les règles de manipulation des transformées de Laplace, démontrer que $\tilde{L}_n(s) = \mathrm{TL}[L_n(t)]$ obéit à l'équation

$$s(1-s)\frac{d\tilde{L}_n(s)}{ds} + (n+1-s)\tilde{L}_n(s) = 0 \qquad (6)$$

2. En écrivant l'équation (6) sous forme de

$$\frac{d\tilde{L}_n}{\tilde{L}_n} = \frac{P(s)}{Q(s)}ds \ ;$$

en décomposant le quotient rationnel en fraction simple ; enfin en intégrant les deux cotés de l'égalité (on suppose que la constante d'intégration est nulle), démontrer que

$$\tilde{L}_n(s) = \frac{(s-1)^n}{s^{n+1}} \qquad (7)$$

Admettez ce résultat si vous n'y arrivez pas et continuez.

3. En utilisant l'expression (7), trouvez les originaux $L_0(t)$, $L_1(t)$ et $L_2(t)$. Représenter les trois sur le même graphe.

4. Trouvez le développement asymptotique de $L_n(t)$.

5. Relation de récurrence. Démontrer que

$$\int_0^t L_n(\tau)d\tau = L_n(t) - L_{n+1}(t)$$

[**Help** : utiliser les règles de manipulations des TL].

C. Rectification d'onde.

En électricité, la première opération pour transformer un signal alternatif en signal continu est sa *rectification* : inverser le signe des parties négatives du signal périodique. Nous allons nous intéresser, dans ce qui suit, à la TL d'un signal rectifié par comparé à celle du signal original.

1. Soit la fonction $\phi(t)$, positive pour $0 \leq t \leq a$ et nulle en dehors de cet intervalle. Nous supposons connu sa TL, $\tilde{\phi}(s)$. Tracer les deux fonctions

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \phi(t-na) \\ \Psi(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \phi(t-na) \end{aligned}$$

2. Trouver les transformées de Laplace $\tilde{\Phi}(s)$ et $\tilde{\Psi}(s)$ en fonction de $\tilde{\phi}(s)$.

3. Soit maintenant une fonction $f(t)$ positif dans l'intervalle $t \in [0,a]$, avec la propriété

$$f(t+a) = -f(t)$$

Tracez l'allure générale de cette fonction, et de la fonction $|f(t)|$; démontrez que $f(t)$ est $2a-$périodique. Trouver la relation entre les TL de $f(t)$ et $|f(t)|$.