Examens de mathématiques : Corrigé.

L3 Phys-Chimie, Université Joseph Fourier.

Décembre 2005

A. Equation d'onde.

1. Soit $z(t) = H(t)y(t)$. alors, $z'(t) = \delta(t)y(t) + H(t)y'(t)$. Or, comme nous l'avons vu dans les TD sur les distributions, $\delta(t)y(t) = \delta(t)y(0) = \delta(t)y_0$. Donc,

$$z(t) + az'(t) = H(t)\left[y(t) + ay'(t)\right] + \delta(t)y_0$$

Par ailleur, $y(t)$ étant la solution de l'équation (1), le terme entre [] est nul et l'on trouve l'expression demandée.

2. La démarche est analogue. Soit $z(t) = H(t)y(t)$. Alors,

$$\begin{aligned} z'(t) &= \delta(t)y_0 + H(t)y'(t) \\ z''(t) &= \delta'(t)y_0 + \delta(t)y'(0) + H(t)y''(t) \end{aligned}$$

Nous avons donc,

$$z''(t) + \omega_0^2 z(t) = H(t)\left[y''(t) + \omega_0^2 y(t)\right] + \delta'(t)y_0 + \delta(t)v_0$$

Le terme entre crocher étant nul, on retrouve l'expression demandée.

3.

- $\mathrm{TF}[f(x \pm a)] = \exp(\pm iaq)\mathrm{TF}[f(x)]$.
- $\mathrm{TF}[\delta(t)] = 1$; $\mathrm{TF}[\delta'(t)] = i\omega$.
- $\mathrm{TF}[H(t)\cos(at)] = i\omega/(a^2 - \omega^2)$; $\mathrm{TF}[H(t)\sin(at) = ia/(a^2 - \omega^2)$

4. En prenant d'abord une TF par rapport au temps, nous avons

$$-\omega^2\tilde{u}(x,\omega) - c^2\partial^2\tilde{u}(x,\omega)/\partial x^2 = i\omega f(x) + g(x)$$

En prenant maintenant une TF par rapport à x, nous avons

$$-\omega^2\tilde{\tilde{u}}(q,\omega) + c^2q^2\tilde{\tilde{u}}(q,\omega) = i\omega\tilde{f}(q) + \tilde{g}(q)$$

5. Nous avons donc

$$\tilde{\tilde{u}}(q,\omega) = \frac{i\omega}{c^2q^2-\omega^2}\tilde{f}(q) + \frac{cq}{c^2q^2-\omega^2}\frac{\tilde{g}(q)}{cq}$$

comme nous souhaitons prendre des TF inverse par rapport à ω, $\tilde{f}(q)$ ou $\tilde{g}(q)$ sont des constantes vis à vis de cette transformation. Par ailleurs, en comparant aux expressions des TF de sin et cosdonné plus haut et en posant $a = cq$, nous trouvons bien

$$\tilde{u}(q,t) = \cos(cqt)\tilde{f}(q) + \frac{\sin(cqt)}{cq}\tilde{g}(q)$$

6. Pour trouver que $G(x)$ est un produit de convolution entre la fonction porte et la fonction g, nous n'avons qu'à appliquer la définition même de la fonction porte. Par ailleurs, comme nous savons que la TF d'un produit de convolution est le produit des TF, et que $\mathrm{TF}[\Pi(x/a)] = \sin(aq)/q$, nous avons ce que nous cherchions.

7. Inversion de la TF. Le premier terme ne pose pas de problème, il suffit d'écrire que $\cos(ctq) = [\exp(ictq)+\exp(-ictq)]/2$ et utiliser le résultat des questions préliminaires. Pour le deuxième terme, nous appliquons simplement le résultat de la question 6. Nous avons donc finalement

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\{f(x-ct)+f(x+ct)\} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)dy$$

Le premier terme est simplement la déformation initiale $f(x)$ qui se propage dans les deux directions (sans déformation) avec la vitesse c. Le deuxième terme montre que la hauteur en un point est fonction des vitesses initiales des points qui sont distant de ce point au miximum de $\ell = ct$. On pourrait appeler cela, en langage chic, le cône de causalité.

B. Les polynômes de Laguerre.

1. En utilisant les règles usuelles des TL, nous avons

$$\begin{array}{rcl}
L_n(t) & \to & \tilde{L}_n(s) \\
\dot{L}_n(t) & \to & s\tilde{L}_n(s) - 1 \\
\ddot{L}_n(t) & \to & s^2\tilde{L}_n(s) - s + n \\
t\dot{L}_n(t) & \to & -\dfrac{d}{ds}\left[s\tilde{L}_n(s) - 1\right] = -\tilde{L}_n(s) - s\dfrac{d\tilde{L}_n(s)}{ds} \\
t\ddot{L}_n(t) & \to & -\dfrac{d}{ds}\left[s^2\tilde{L}_n(s) - s + n\right] = -2s\tilde{L}_n(s) - s^2\dfrac{d\tilde{L}_n(s)}{ds} + 1
\end{array}$$

En regroupant ces termes, on trouve l'expression demandée.

2. Nous avons donc

$$\frac{d\tilde{L}_n(s)}{\tilde{L}_n(s)} = \frac{n+1-s}{s(s-1)}ds \qquad (1)$$

En décomposant en fraction simple, on trouve

$$\frac{n+1-s}{s(s-1)} = -\frac{n+1}{s} + \frac{n}{(s-1)}$$

En intégrant l'expression (1), nous trouvons

$$\ln\left[\tilde{L}_n(s)\right] = -(n+1)\ln s + n\ln(s-1) = \ln\left[\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}\right]$$

Ce qui donne l'expression (7) de l'examen. Nous avons supposé la constante d'intégration nulle. Nous aurions pu le supposer quelquonque : ces fonctions sont déterminées à un facteur multiplicatif près (si $y(t)$ est solution, alors $ay(t)$ est également solution), qui est donné par la condition de normalisation.

3.

- $\tilde{L}_0(s) = 1/s$, donc $L_0(t) = 1$.
- $\tilde{L}_1(s) = 1/s - 1/s^2$, donc $L_1(t) = 1 - t$.
- $\tilde{L}_2(s) = 1/s - 2/s^2 + 1/s^3$, donc $L_2(t) = 1 - 2t + t^2/2$.

4. Pour $s \to 0$, $\tilde{L}_n(s) \approx 1/s^{n+1}$, donc pour $t \to +\infty$, $L_n(t) \approx t^n/n!$.

5. Il suffit juste de se souvenir que

$$\mathrm{TL}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \tilde{f}(s)/s$$

C. Rectification d'onde.

2. Il faut d'abord calculer

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \phi(t-na)\,e^{-ts}dt &= \int_{-na}^{+\infty} \phi(t)\,e^{-(t+na)s}dt \\
&= e^{-nas}\int_0^{+\infty} \phi(t)\,e^{-ts}dt \\
&= e^{-nas}\tilde{\phi}(s)
\end{aligned}$$

où à la deuxième ligne, nous avons utilisé le fait que $\phi(t<0) = 0$. Nous connaissons la somme d'une série géométrique pour $|\lambda| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n = \frac{1}{1-\lambda}$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}(s) &= \tilde{\phi}(s)\sum_{n=0}^{\infty}[\exp(-as)]^n \\ &= \frac{\tilde{\phi}(s)}{1-\exp(-as)}\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}(s) &= \tilde{\phi}(s)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n[\exp(-as)]^n \\ &= \frac{\tilde{\phi}(s)}{1+\exp(-as)}\end{aligned}$$

3. Nous avons

$$f(t+2a) = -f(t+a) = f(t)$$

donc $f(t)$ est bien $2a-$périodique. Ensuite, nous voyons que si nous posons

$$\begin{aligned}\phi(t) &= f(t) \quad t\in[0,a] \\ &= 0 \quad t\notin[0,a)]\end{aligned}$$

alors $f(t)$ n'est qu'une répétition alternée de $\phi(t)$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\phi(t-na)$$

et donc, d'après les questions 1 et 2,

$$\tilde{f}(s) = \frac{\tilde{\phi}(s)}{1+\exp(-as)}$$

tandis que que $|f(t)|$ est une répétition simple de $\phi(t)$ et

$$\mathrm{TL}[|f(t)|] = \frac{\tilde{\phi}(s)}{1-\exp(-as)}$$

Nous avons donc,

$$\mathrm{TL}[|f(t)|] = \mathrm{TL}[f(t)]\frac{1+\exp(-as)}{1-\exp(-as)}$$

Si nous aimons les expressions condensées, on peut encore écrire la dernière fraction sous forme de $Coth(as/2)$