Université Joseph Fourier, L3 physique-chimie, janvier 2005

Examen de mathématiques

Diffusion avec courant.

1. L'équation de la chaleur (ou diffusion) peut comporter un terme dit de courant. Trouvez la fonction de Green de cette équation, c'est à dire résolvez :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + J\frac{\partial u}{\partial x} - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \delta(x)\delta(t) \tag{1}$$

Le symbole $\delta()$ désigne bien sur la distribution de Dirac, et nous supposons $u(x,t) = 0$ pour $t < 0$. Commentez votre résultat.

Suggestion : je vous suggère de commencer : (i) par prendre la TF de l'expression *par rapport à x* ; (ii) de donner la solution de l'équation différentielle par rapport au temps que vous obtenez alors en utilisant directement les résultats vus en cours ; (iii) il vous suffira ensuite de prendre une TF inverse pour revenir dans l'espace direct. Il peut vous être utile de vous souvenir : (i) de la TF de la gaussienne ($\exp(-x^2/2a^2)$) ; (ii) de la règle de translation des TF : $TF[f(x-b)] = e^{-iqb}TF[f(x)]$.

2. Représenter graphiquement $u(x,t)$ en fonction de x à différents temps. Je vous rappelle que $f(x-a)$ est une translation de a, le long de l'axe x, de la fonction $f(x)$.

3. Soit la fonction $w(z,t) = u(x,t)$ où $z = x - ct$. Réécrivez l'équation (1) en fonction de $w(z,t)$ et des variables z,t. Pour cela, il vous faut vous souvenir de la règle des dérivées composées. Démontrer qu'en choisissant judicieusement la vitesse c, on peut se ramener à une équation de la chaleur *sans* terme de courant. Faites une petite digression là-dessus. En langage claire, le changement de variable que nous avons fait revient à se poser dans le repère mobile de vitesse c.

Les intégrales de Fresnel.

Les deux fonctions suivantes, appelées des intégrales de Fresnel, sont très largement utilisées dans la théorie de la diffraction de lumière :

$$C(t) = \int_0^t \frac{\cos(\tau)}{\sqrt{2\pi\tau}}d\tau \ ; \ S(t) = \int_0^t \frac{\sin(\tau)}{\sqrt{2\pi\tau}}d\tau \ .$$

1. Trouvez les transformées de Laplace de ces fonctions.

Help : vous connaissez déjà la T.L. de la fonction $1/\sqrt{t}$. Vous connaissez également l'effet de la multiplication de l'originale par une exponentielle ou de son intégration sur la fonction image.

2. En utilisant les résultats de la question précédente, trouver la forme asymptotique de ces fonctions quand $t \to \infty$.

L'équation de Bessel.

Nous avons déjà rencontré la fonction de Bessel $J_0(t) = (1/2\pi)\int_0^{2\pi} \exp(it\cos\theta)d\theta$ dont la transformée de Laplace est $\tilde{J}_0(s) = 1/\sqrt{s^2+1}$. Vérifiez que $J_0(t)$ est la solution de l'équation différentielle (dite de Bessel)

$$t\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + tx(t) = 0 \tag{2}$$

avec la condition initiale $x(0) = 1$ et $\dot{x}(0) = 0$. Pour cela, il faut prendre la T.L. de l'équation (2) en utilisant les règles de manipulation des TL (notamment celles sur les dérivées et les multiplication par t) et de vérifier que $\tilde{J}_0(s)$ est bien solution de l'expression que vous trouvez.

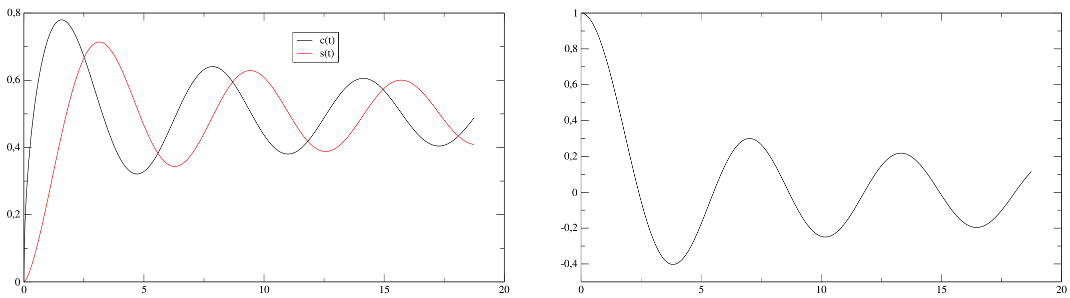

FIG. 1: Les courbes des fonctions de Fresnels $c(t)$ et $s(t)$(à gauche) et de Bessel $J_0(t)$ à droite.