Corrigé de l'examen de Janvier 2005

10 janvier 2005

Diffusion avec courant.

1. Nous voulons résoudre
$$\frac{\partial u}{\partial t}+J\frac{\partial u}{\partial x}-D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\delta(x)\delta(t)$$
En prenant la TF de cette équation par rapport à x, c'est à dire en passant à $\tilde{u}(q,t)$, nous obtenons
$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}+(iJq+Dq^2)\tilde{u}=\delta(t)$$
dont la solution, d'après les dix milles exemples que nous avons fait en cours est
$$\tilde{u}(q,t)=H(t)\exp[-(iJq+Dq^2)t]=H(t)\,e^{-iJtq}\,e^{-Dtq^2}$$
où $H(t)$est la fonction échelon d'Heavaside. Il suffit de prendre maintenant la TF inverse par rapport à q, et ceci que pour les temps positifs (puisque $H(t<0)=0$). Le terme le plus à gauche est une gaussienne dont on connaît la TF inverse :
$$\mathrm{TF}^{-1}[\exp(-Dt\,q^2)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2Dt}}\exp[-x^2/(4Dt)]$$
Il nous suffit de remarquer que la gaussienne est multipliée par une exponentielle complexe. En utilisant alors la règle des translations, nous obtenons finalement pour $u(x,t)$ pour $t\geq 0$:
$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2Dt}}\exp[-(x-Jt)^2/(4Dt)]$$
Ceci est l'équation d'une gaussienne qui s'élargit et dont le centre se deplace à la vitesse J : par exemple, une goutte d'encre qu'on a déposé dans un courant.

2. Voir ci-dessus.

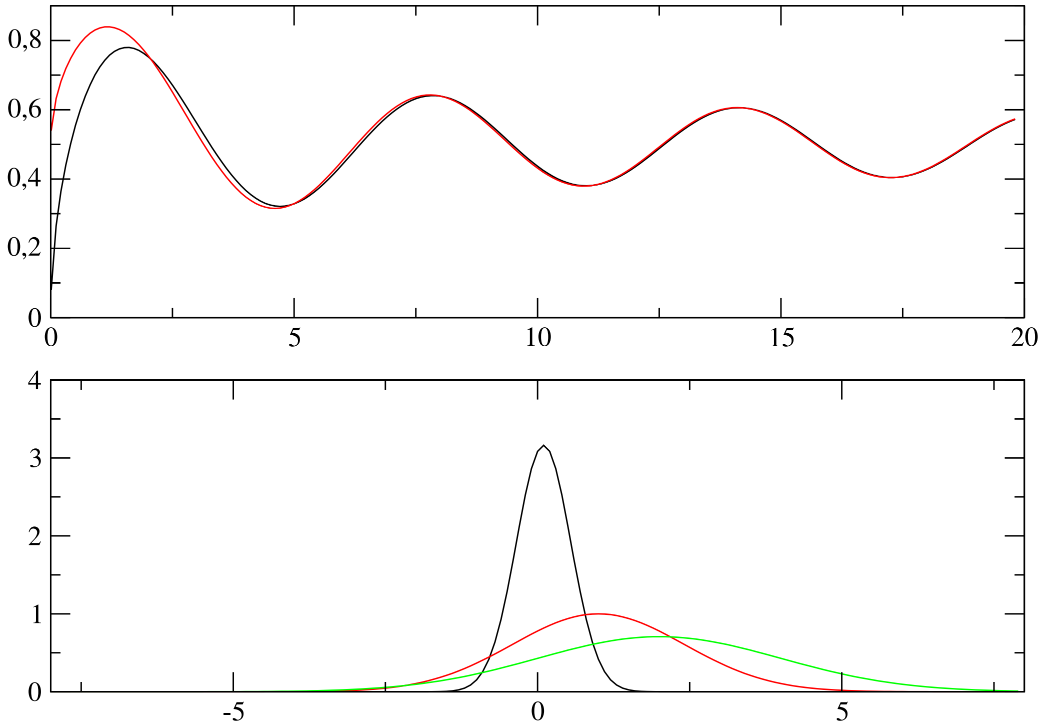

FIG. 1: La figure de dessus montre la fonction $C(t)$ et son développement asymptotique. La figure du dessous est la solution du problème de diffusion avec courant pour trois temps $t = 0.1, 1, 2$ et pour $D = 1/4$ et $J = 1$.

3. Soit $u(x,t) = w(z,t)$ où $z = x - ct$. Nous venons de passer des variables (t,x) aux variable $(t, z = x - ct)$.Le seul terme dont il faut prendre soin est la dérivée par rapport au temps :

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial w(z,t)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial w(z,t)}{\partial t} = -c\frac{\partial w(z,t)}{\partial z} + \frac{\partial w(z,t)}{\partial t}$$

Et en remplaçant dans l'équation de diffusion, nous obtenons

$$\frac{\partial w}{\partial t} - c\frac{\partial w}{\partial z} + J\frac{\partial w}{\partial z} - D\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \delta(z+ct)\delta(t)$$

Nous voyons qu'en prenant $c = J$, nous obtenons une equation de chaleur sans terme de courant et que nous avons déjà résolu. C'est bien sûr le même résultat que ci-dessus : une gaussienne qui s'élargit et dont le centre se déplace à la vitesse J. Le terme de droite ne doit pas nous faire peur : en réflechissant une peu, vous verrez que $\delta(z+ct)\delta(t) = \delta(z)\delta(t)$ (bien que $\delta(z+ct) \neq \delta(z)$). Ou si vouliez prendre la TF par rapport à z du terme de droite, vous aboutirez à $\exp(ictq)\delta(t)$qui bien sûr vaut $\delta(t)$ d'après les manipulations des distributions de dirac que nous avons appris en cours.

Les intégrales de Fresnel.

1. Nous savons déjà que $\mathrm{TL}[1/\sqrt{2\pi t}] = 1/\sqrt{2s}$. Les fonction sinus et cosinus ne sont que des sommes d'exponentielles, et nous savons que multiplier par une exponentielle dans le domaine temporel revient à translater dans le domaine de Laplace :

$$\mathrm{TL}[\frac{\cos t}{\sqrt{2\pi t}}] = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{s-i}} + \frac{1}{\sqrt{s+i}}) \;;\; \mathrm{TL}[\frac{\sin t}{\sqrt{2\pi t}}] = \frac{1}{2\sqrt{2}i}(\frac{1}{\sqrt{s-i}} - \frac{1}{\sqrt{s+i}})$$

Finalement, prendre la primitive dans le domaine temporelle revient à multiplier par $1/s$ la TL. Nous avons alors

$$\tilde{C}(s) = \frac{1}{2\sqrt{2}s}(\frac{1}{\sqrt{s-i}} + \frac{1}{\sqrt{s+i}}) \;;\; \tilde{S}(s) = \frac{1}{2\sqrt{2}is}(\frac{1}{\sqrt{s-i}} - \frac{1}{\sqrt{s+i}})$$

Bien sûr, nous pouvons quelques peu nettoyer ces formes en prenant le dénominateur commun est en remarquant que par exemple,

$$\sqrt{s+i} + \sqrt{s-i} = \sqrt{2}\sqrt{s+\sqrt{s^2+1}}$$

mais nous laissons cet exercice d'algèbre au lecteur interessé.

2. Nous remarquons que les trois pôles ont la même partie rééllle nulle. Nous devons calculer la contribution des trois :

$$\begin{aligned}
\tilde{C}(s) &\approx \frac{1}{2s} && s \to 0 \\
\tilde{C}(s) &\approx \frac{1}{2\sqrt{2}i}\frac{1}{\sqrt{s-i}} && s \to i \\
\tilde{C}(s) &\approx -\frac{1}{2\sqrt{2}i}\frac{1}{\sqrt{s+i}} && s \to -i
\end{aligned}$$

En les combinant et en prenant la TL inverse, nous trouvons (la démarche est similaire pour $S(t)$)

$$C(t) \approx \frac{1}{2} + \frac{\sin t}{\sqrt{2\pi t}} \;;\; S(t) \approx \frac{1}{2} - \frac{\cos t}{\sqrt{2\pi t}}$$

pour $t \gg 1$. La figure 1 vous montre que l'approximation est en faite très bonne pour $t > 5$.

L'équation de Bessel.

1. Nous voulons résoudre

$$t\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + tx(t) = 0 \qquad (1)$$

Pour prendre la TL, remarquons d'abord que : (i) $TL[\dot{x}(t)] = s\tilde{x} - 1$; (ii) $TL[\ddot{x}(t)] = s^2\tilde{x} - s$ (puisque $\dot{x}(0) = 0$) ; (iii)$TL[t\ddot{x}(t)] = -d/ds[s^2\tilde{x} - s] = -2s\tilde{x}(s) + 1 - s^2 d\tilde{x}/ds$. En combinat tous ces termes, nous trouvons :

$$(s^2+1)\frac{d\tilde{x}}{ds} + s\tilde{x} = 0$$

Et il n'est alors pas difficile de montrer que $\tilde{x}(s) = 1/\sqrt{s^2+1}$est bien solution de cette équation différentielle. Ce qui démontre que la fonction $J_0(t)$ est bien solution de 1.