Examen de Mathématique

L3 Physique-Chimie, Janvier 2004

A- Régulation PID d'un bain thermostaté.

La régulation PID (proportionnelle, intégrale, différentielle) est le paradigme des systèmes de contrôle automatique. Nous avons un bain d'huile que nous désirons mener et maintenir à une température de consigne T_c. Appelons (i) $T(t)$ la température du bain à l'instant t ; (ii) T_R la température de la pièce où se trouve le bain, que nous supposons constante et $< T_c$. Si il n'y avais aucun élément chauffant dans le bain, la température du bain aurait tendance à s'égaliser avec l'extérieur :

$$\frac{dT}{dt} = -\beta(T - T_R)$$

où β est un coefficient positif qui désigne la déperdition de chaleur. Nous allons maintenant tenter de construire un contrôleur qui maintiendra le bain à T_c(Fig. 1). Nous disposons (i) d'une résistance chauffante variable ; (ii) d'une sonde qui mesure de façon continue la température du bain $T(t)$, et d'un contrôleur qui peut comparer cette valeur à la température consigne T_c. Comme première tentative, nous allons demander au contrôleur de régler la puissance proportionnellement à la différence entre T et T_c. L'évolution de la température du bain est alors donnée par :

$$\frac{dT}{dt} = -\beta(T - T_R) + \alpha(T_c - T) \qquad (1)$$

où α est un coefficient positif qui désigne l'efficacité du chauffage par l'élément chauffant.

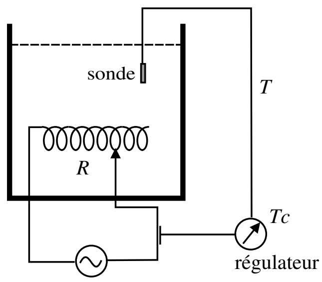

FIG. 1 – schéma d'un controleur PID pour un bain thermostaté.

Notes. Dans tout ce qui suit nous imposons, sans perte de généralité, $T_R = 0$. Nous choisissons comme condition initiale "le bain à l'équilibre avec la pièce", c'est à dire $T(t = 0) = T_R = 0$.

1. Quelles sont les dimensions de α et β ? Résolvez l'équation (1) et trouver la température d'équilibre du bain, c'est à dire T pour $t \to +\infty$. Sur quelle échelle de temps atteint-on cette température ?

Terme Intégrale. Comme la méthode proportionnelle s'avère insuffisante, nous demandons au contrôleur de calculer également *l'intégrale* de l'écart à T_c et régler en conséquence le chauffage. L'évolution de la température est alors donnée par (γ est un coefficient positif)

$$\frac{dT}{dt} = -\beta T + \alpha(T_c - T) + \gamma \int_0^t (T_c - T(\tau))\, d\tau$$

2. Obtenez une expression algébrique pour $\tilde{T}(s)$, la transformée de Laplace de $T(t)$.

3. Demontrer que le pôle le plus à droite de $\tilde{T}(s)$ est $s = 0$. En utilisant le développement asymptotique autour de ce pôle, trouver le comportement de T quand $t \to +\infty$.

4. Nous allons dorénavant supposer $\alpha = \beta$. Démontrer que l'expression de $\tilde{T}(s)$ se met sous la forme

$$\left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{1}{s - s_1} - \frac{1}{2}\frac{1}{s - s_2} \right\} T_c$$

où s_1 et s_2 sont les deux racines de $s^2 + 2\alpha s + \gamma = 0$. Pour plus de lisibilité, utiliser Ω pour $\sqrt{\alpha^2 - \gamma}$. Obtenir, par TL inverse, l'expression de $T(t)$.

5. Discuter le cas $\gamma > \alpha^2$ et $\gamma < \alpha^2$. Représenter graphiquement les deux cas en prenant $\alpha = 1$ et des valeurs de T_c et de γ que vous jugerez utile. A votre avis, comment faut-il choisir le coefficient γ pour que le bain atteigne le plus rapidement T_c ?

B- Écosystème de prédateurs-proies.

Les écosystèmes sont faits d'espèce de prédateurs et de proies, ce qu'on appelle "la chaîne alimentaire". En 1927, Lotka et Voltera ont un proposé un modèle très simple pour modéliser un écosystème composé seulement d'une espèce de proie (exemple lapin) et d'une espèce de prédateur (exemple loup). Soit $N(t)$ et $P(t)$ le nombre de proies et de prédateurs à l'instant t. Les proies se dupliquent avec un taux α par unité de temps, tandis que leur décès est dû aux nombre de prédateurs présent. L'évolution des proies est donnée donc par

$$dN/dt = \alpha N - \gamma_1 NP \tag{2}$$

où γ_1 désigne l'efficacité de prédateurs à trouver leur déjeuner. Les prédateurs de leurs côté ne se dupliquent que si ils se nourrissent de proie, et ils ont un taux de mortalité naturelle β. Par conséquent, leur dynamique est

$$dP/dt = \gamma_2 NP - \beta P \tag{3}$$

où γ_2 désigne combien de proies faut il manger pour pouvoir se dupliquer. Comme vous le voyez, ces équations sont non-linéaires et impossibles à résoudre à l'aide de nos techniques habituelles. Nous allons calculer des solutions approximatives à l'aide du calcul des perturbations. Tous les coefficients α, β, γ_i sont positifs.

1. Trouver la solution stationnaire des eqs. (2,3), qu'on appelera N_s et P_s. Si à l'instant initial, $N = N_s$ et $P = P_s$, le système va rester dans cet état.

Suite. Nous allons choisir des conditions initiales légèrement différentes des conditions stationnaires $N(t=0) = N_s + \varepsilon a$ et $P(t=0) = P_s + \varepsilon b$ où a et b sont des constantes d'ordre unité, et ε un petit paramètre. Nous allons chercher la solution des eqs. (2,3) à l'ordre 1 en ε : $N(t) = N_s + \varepsilon N_1(t) + O(\varepsilon^2)$ et $P(t) = P_s + \varepsilon P_1(t) + O(\varepsilon^2)$. La condition initiale pour les deux fonctions inconnues est donc $N_1(t=0) = a$ et $P_1(t=0) = b$.

2. Obtenir des équations pour $N_1(t)$ et $P_1(t)$ que l'on résoudra à l'aide des transformées de Laplace, et du dicionnaire des images pour ces dernières. Pour plus de lisibilité, vous poserez $\Omega = \sqrt{\alpha\beta}$ et $\Gamma = \gamma_1/\gamma_2$.

3. Quelle est la nature de la stabilité de la solution stationnaire ? Tracer la courbe paramétrique $(N(t), P(t))$ en supposant $b = 0$.

4. Maintenant que N_1 et P_1 sont connues, nous pouvons pousser le calcul à l'ordre 2 en ε. Pour plus de simplicité, nous supposerons par la suite que $b = 0$. Nous avons donc maintenant $N(t) = N_s + \varepsilon N_1(t) + {} + \varepsilon^2 N_2(t) + O(\varepsilon^3)$ et $P(t) = P_s + \varepsilon P_1(t) + \varepsilon^2 P_2(t) + O(\varepsilon^3)$. Les conditions initiales pour N_2 et P_2 sont nulles (pourquoi ?). Obtenir des équations pour N_2 et P_2. Les résoudre à l'aide des transformées de Laplace. Il va de soi que vous connaissez la formule $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$. Pour alleger les notations, donnez des noms plus simples à des combinaisons de constantes que vous jugez utiles. De plus, notez que

$$\frac{1}{(s^2+u^2)(s^2+v^2)} = \frac{1}{u^2-v^2}\left\{-\frac{1}{s^2+u^2} + \frac{1}{s^2+v^2}\right\}$$

5. A votre avis (sans faire de calcul), quelle est la forme de la solution si nous tenions compte des termes d'ordre trois en ε ?