# Examen de Mathématique

L3 Physique-Chimie, Juin 2004

## A- Résolution générale des équations différentielles de premiere ordre.

Nous allons utiliser les règles de manipulation des Transformées de Laplace pour obtenir la solution générale d'une équation différentielle *avec* second membre

$$\frac{du}{dt} + au = b(t) \tag{1}$$

où $u(t)$ est la fonction que nous voulons détemriner, $a$ une constante et $b(t)$ une fonction connue.

Nous allons procéder par étape et obtenir l'originale de fonctions de plus en plus compliquées. Nous utiliserons ensuite ces résultats pour résoudre l'équation (1). Notons $f(t)$ l'originale d'une fonction quelconque $\tilde{f}(s)$.

**1.** Quelle est l'orginale de la fonction $(1/s)\tilde{f}(s)$ ?

**2.** Quelle est l'originale de la fonction $\tilde{f}(s+a)$ ?

**3.** En utilisant les deux résultats précédents, trouver l'orginale de $(1/s+a)\tilde{f}(s+a)$.

**4.** Soit $\tilde{b}(s) = \tilde{f}(s+a)$. Quelle est la relation entre les originales de ces deux fonctions, $b(t)$et $f(t)$ ?

**5.** Utiliser la relation ci-dessus pour trouver l'orginale de $(1/s+a)\tilde{b}(s)$ en terme d'opérations sur $b(t)$.

**6.** Finalement, en utilisant la méthode des transformées de Laplace et l'ensemble des résultats que vous avez trouvé, résolvez l'équation (1). Pour cela, il vous faut prendre la TL de cette équation, résoudre l'équation algébrique qui en résulte, et inverser la TL.

**7.** Sans faire de calculs, pouvez vous évoquer grossièrement comment généraliser pour résoudre une équation différentielle de deuxième ordre avec second membre ?

## B- Croissance des bactéries.

L'équation de croissance de bactéries, connue comme l'équation logistique, est la suivante :

$$\frac{dc}{dt} = ac - bc^2 \tag{2}$$

où $c(t)$ est la concentration de bactérie au temps $t$, $a$ le taux de croissance et $b$ un coefficient qu'on appel de saturation. $a$ et $b$ sont des constantes $> 0$.

**1.** Trouver les deux solutions stationnaires de l'équation (2).

**2.** En utilisant le calcul des perturbations autour de ces deux solutions, démontrer qu'une est instable, tandis que l'autre est stable.

**3.** Sans faire aucun calcul et en vous servant des résultats ci-dessus : tracer l'allure générale de la solution si on utilise la condition initial $c(t=0) = \varepsilon \ll a/b$. Expliquer votre interprétation.

## C- Peigne de Dirac.

Il est évident que l'expression

$$\Psi(x) \quad = \quad \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \exp(2i\pi nx) \tag{3}$$

n'a pas de signification au sens des fonctions. Nous allons voir par contre qu'au sens des distribution, elle est définie.

**1.** Expliquer simplement pourquoi l'expression (3) n'a pas de sens usuel de fonction.

**2.** A supposer que cette expression ait un sens, qu'elle est sa périodicité ?

Soit la distribution "peigne de Dirac" $W(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-n)$ où $\delta(x)$ est la delta de Dirac.

**3.** Démontrer que la période de $W(x)$ est 1. Représenter graphiquement $W(x)$.

**4.** Comme $W(x)$ est de période 1, la décomposer en *série* de Fourier sur l'intervalle $[-0.5, +0.5]$, c'est à dire trouver les coefficient $a_n$ et $b_n$ tels que sur cet intervalle,

$$W(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi nx) + b_n \sin(2\pi nx)$$

**5.** En déduire que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-n) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \exp(2i\pi nx)$.

**6.** Que pouvez vous dire maintenant de la *transformée* de Fourier d'une peigne de Dirac ?