Université Joseph Fourier, L3 physique-chimie, juin 2005

Examen de mathématiques

Appéritif.

1. Sans faire de calcul (c'est un résultat des cours/TD), donner la transformée de Fourier de la gaussienne :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)$$

En utilisant les règles de manipulation des TF, donner également l'expression de sa dérivée $f'(x)$. Tracer les deux fonctions (schématiquement) pour plusieurs valeurs du paramètre a.

2. Quel est la TF de la distribution $\delta(x)$? Calculer la TF de la distribution $\delta'(x)$ ("la dérivée" du δ) par la méthode de votre choix.

3. Vers quoi tendent la gaussienne et sa dérivée (question 1) quand $a \to 0$? Discuter.

Entrée.

1. Nous admettons le résultat suivant pour les T.L. sur les produit de convolution : si

$$f(t) = \int_0^t K(\tau)g(t-\tau)d\tau \tag{1}$$

alors les T.L. de ces trois fonctions sont reliées par

$$\tilde{f}(s) = \tilde{K}(s)\tilde{g}(s)$$

Nous suposons que la fonction $f(t)$ est définie par la relation (1). Demontrer alors, en utilisant les T.L. que

$$f'(t) = K(0)g(t) + \int_0^t K'(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Help : il suffit d'appliquer la T.L. à cette dernière relation et vérifier alors que l'on obtient bien la deuxième relation.

Plat.

Nous souhaitons résoudre un système infini d'équations différentielles couplées :

$$\frac{du_n}{dt} = -2u_n + u_{n+1} + u_{n-1} \qquad n = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Nous cherchons les fonctions $u_n(t)$ avec les conditions initiales

$$\begin{aligned} u_0(0) &= 1 \\ u_n(0) &= 0 \;\; n \neq 0 \end{aligned}$$

Evidement, ce n'est pas par hasard que nous sommes intéressés par ces équations, elles constituent la version "discrète", ou "sur réseaux", de l'équation de diffusion que nous avons abondement étudié en cours.

1. Prenez la Transformée de Laplace des équations (2), en prenant bien soin de distinguer le cas $n = 0$ du cas $n \neq 0$.

2. Comme vous le voyez, la TL a transformé notre système d'équations différentielles en un système d'équations algébriques linéaires sur les $\tilde{u}_n(s)$. Nous chercherons la solution sous la forme de

$$\tilde{u}_n(s) = f(s)^{|n|} g(s) \tag{3}$$

où les fonctions $f(s)$ et $g(s)$ sont à determiner[1]. Quelle est la relation entre $\tilde{u}_n(s)$ et $\tilde{u}_{-n}(s)$? En utilisant l'expression (3) dans les équations que vous avez obtenu pour le cas $n > 0$, démontrez que $f(s)$ doit obéir à l'équation

$$f(s) + \frac{1}{f(s)} = s + 2 \tag{4}$$

dont une des solutions est

$$f(s) = \frac{s + 2 + \sqrt{s^2 + 4s}}{2}$$

Que vaut $-f(s) + 1/f(s)$?

3. Connaissant $f(s)$, il vous reste maintenant à utiliser l'équation que vous aviez obtenu pour le cas $n = 0$ pour déterminer $g(s)$. Donnez alors l'expression complète de la fonction $\tilde{u}_n(s)$. Si nous avions plus de temps, nous aurions tenté de d'inverser la TL et de montrer la relation qui existe entre votre solution et (i) les fonctions de Bessel $I_n(t)$; (ii) la solution de l'équation de diffusion continue $\partial_t u - \partial_x^2 u = \delta(x)\delta(t)$. Mais ce sera de la gourmandise. C'est déjà pas mal de connaître les solutions sous forme de leurs TL.

4. Démontrez que le pôle le plus à droite des fonctions $\tilde{u}_n(s)$ est $s = 0$. Démontrer alors que le terme dominant du développement de $\tilde{u}_n(s)$ au voisinage de $s = 0$ est $1/\sqrt{s}$. En déduie le développement assymptotique de $u_n(t)$ quand $t \to +\infty$.

Dessert.

Comme il s'agit d'une session de ratrappage, le dessert est supprimé.

[1] Ceci est une technique classique de résolution dont le nom savant est "matrice de transfert".