Université Joseph Fourier, L3 physique-chimie, juin 2005

Examen de mathématiques,corrigé

Appéritif.

Ce sont juste des questions de cours.

Entrée.

En prenant la TL de la relation, nous avons

$$\mathrm{TL}[f'(t)] = K(0)\tilde{g}(s) + \mathrm{TL}[K'(t)]\tilde{g}(s)$$

Comme $\mathrm{TL}[f'(t) = s\tilde{f}(s) - f(0) = s\tilde{f}(s)$ et $\mathrm{TL}[K'(t)] = s\tilde{K}(s) - K(0)$, on obtient le résultat demandé.

Plat.

1. La seule différence entre $n = 0$ et $n \neq 0$ est la condition initiale. En prenant la TL, nous obtenons alors

$$(s+2)\tilde{u}_0(s) = \tilde{u}_1(s) + \tilde{u}_{-1}(s) + 1 \quad (1)$$

$$(s+2)\tilde{u}_n(s) = \tilde{u}_{n-1}(s) + \tilde{u}_{n+1}(s) \quad n \neq 0 \quad (2)$$

2. Comme $|-n| = |n|$, si $\tilde{u}_n(s)$ est de la forme demandé, alors $\tilde{u}_n(s) = \tilde{u}_{-n}(s)$. Nous n'avons qu'à nous occuper des $n > 0$. En utilsant la forme de $\tilde{u}_n(s)$ donnée dans l'éq.(2) pour $n > 0$, nous obtenons

$$(s+2)f(s)^n g(s) = \left[f(s)^{n-1} + f(s)^{n+1}\right] g(s)$$

qui en simplifiant, nous donne bien

$$f(s) + \frac{1}{f(s)} = s + 2 \quad (3)$$

C'est une équation de seconde degrès dont l'autre solution est

$$f^-(s) = \frac{s+2-\sqrt{s^2+4s}}{2} = \frac{1}{f^+(s)}$$

où $f^+(s)$ est donnée dans l'ennoncé. On en déduit que $1/f^+(s) - f^+(s) = f^-(s) - f^+(s) = -\sqrt{s(s+4)}$.

3. En utilisant maintenant l'éq.(1), nous obtenon.

$$(s+2)g(s) = 2f(s)g(s) + 1$$

Or, $s+2-2f(s) = 1/f(s) - f(s)$ et donc $g(s) = -1/\sqrt{s(s+4)}$. Donc

$$\tilde{u}_n(s) = -\left[\frac{s+2+\sqrt{s^2+4s}}{2}\right]^n \frac{1}{\sqrt{s(s+4)}}$$

Il n'est pas très difficile de démontrer que ceci est la transformée de Laplace de $\exp(-2t)I_n(t)$ où la fonction de Bessel modifié

$$I_n(z) = (1/\pi)\int_0^\pi \exp(z\cos\theta).\cos(n\theta)d\theta$$

Nous avions abordé un cas similaire en cours.

4. $f(s)$n'a pas de pôle. $g(s)$ a deux pôle en 0 et -4. Quand $s \to 0$, $f(s) = 1 + O(\sqrt{s})$ et $g(s) = 1/2\sqrt{s} + O(s)$. Le terme dominant dans le développement de $\tilde{u}_n(s)$ est donc bien de la forme $1/\sqrt{s}$ dont la transformée de Laplcase inverse est de la forme $1/\sqrt{t}$ (nous avons omis les préfacteurs).