Examens de mathématiques.

L3 Physique-Chimie, Université Joseph Fourier.

Juin 2006.

Notes : L'examen est non-bloquant comme d'habitude. Si vous ne savez pas répondre à une question, admettez sa solution et passez à la question d'après.

Diffusion de la chaleur dans la terre.

Stocker des choses sous la terre permet de les protéger des variations de température à la surface. Cela est le cas des professionnel du BTP pour mettre leurs tuyaux hors gel, où des vignerons pour maintenir leurs bouteilles à température constante. A quelle profondeur faut-il enterrer les choses pour les protéger est la question à laquelle nous allons nous attaquer dans cet examen, en utilisant tout l'arsenal des TF et TL à notre disposition. Pour cela, il nous faut résoudre l'équation de la chaleur avec une condition au bord périodique dans le temps qui imite les variations de température diurne/nocturne à la surface de la terre.

A. Questions préliminaires.

La première chose dont nous avons besoin est la solution d'une équa-dif de première ordre répondant à un stimuli périodique :

$$dy/dt + \alpha y = A \sin \omega t \tag{1}$$

avec la condition initiale

$$y(t=0) = 0.$$

a. Décomposer $1/(s+\alpha)(s^2+\omega^2)$ en fraction simple ; en recombinant les termes en $1/(s \pm i\omega)$, montrez finalement que

$$\frac{1}{(s+\alpha)(s^2+\omega^2)} = \frac{1}{\alpha^2+\omega^2}\left(\frac{1}{s+\alpha} + \frac{\alpha}{s^2+\omega^2} - \frac{s}{s^2+\omega^2}\right)$$

b. En prenant la transformée de Laplace de l'équation (1) et en utilisant le résultat de la question (1.a), montrez que sa solution est :

$$y = \frac{A\omega}{\alpha^2+\omega^2}\left(\exp(-\alpha t) + \frac{\alpha}{\omega}\sin \omega t - \cos \omega t\right)$$

Comme attendu, la réponse au stimuli comporte une partie transitoire (y_{tr}) qui s'estompe avec le temps et une partie permanente y_{pr}

$$y_{pr}(t) = \frac{A}{\alpha^2+\omega^2}\left(\alpha \sin \omega t - \omega \cos \omega t\right)$$

B. Propagation de la chaleur dans la terre.

Nous voulons maintenant étudier la répartition de la température dans la terre. Nous prenons l'axe des x pour désigner la profondeur et nous plaçons l'origine des coordonnées à la surface. La surface de la terre se réchauffe dans la journée sous l'effet de l'ensoleillement et se refroidit la nuit par perte vers l'atmosphère. On peut modéliser cet effet par une source de chaleur périodique placée à la surface $A\delta(x)\sin \omega t$. L'équation de la chaleur s'écrit donc

$$\frac{\partial T}{\partial t} - D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = A\delta(x)\sin \omega t \tag{2}$$

1. L'équation dans l'espace réciproque.

En prenant la Transformée de Fourier de l'équation(2) par rapport à x (c'est à dire $T(x,t) \to \tilde{T}(q,t)$), et en utilisant le résultat obtenu en A. pour résoudre l'équation qui en résulte, montrez que la partie permanente de la solution de $\tilde{T}$ s'écrit :

$$\tilde{T}_{pr}(q,t) = A\left(\frac{Dq^2}{D^2q^4+\omega^2}\sin \omega t - \frac{\omega}{D^2q^4+\omega^2}\cos \omega t\right)$$

Il est préférable de définir une constante caractéristique κ tel que $\kappa^2 = \omega/D$ (quel est la dimension de κ ?) et réécrire la solution ci-dessus comme

$$\tilde{T}_{pr}(q,t) = \frac{A}{D}\left(\frac{q^2}{q^4+\kappa^4}\sin \omega t - \frac{\kappa^2}{q^4+\kappa^4}\cos \omega t\right)$$

Notre but maintenant est de trouver la TF inverse des fonctions $q^2/(q^4+\kappa^4)$ et $\kappa^2/(q^4+\kappa^4)$.

2. A la recherche des TF inverse.

Notre point de départ est la TF de la fonction $f(x) = \exp(-k|x|)$, qui vaut, comme vous le savez,

$$\tilde{f}(q) = \frac{2k}{k^2+q^2}$$

On sent qu'en faisant quelques combinaisons de ce genre d'expression, on arrivera à notre but.

a. Nous allons nous intéresser un peu aux fonctions du genre $f(|x|)$ en général, c'est à dire aux fonctions paires. Ce que nous voulons démontrer est qu'il suffit de connaitre la TF de la partie droite ($x > 0$) de cette fonction pour en déduire toute la TF.

Soit une fonction $f(x)$ quelconque. Tracer les fonctions $f(|x|)$, $g(x) = H(x)f(x)$, $H(-x)f(-x)$ et $H(x)f(x)+H(-x)f(-x)$. $H(x)$ est la fonction échelon d'Heavaside. Démontrez que

$$f(|x|) = H(x)f(x) + H(-x)f(-x)$$

b. Soit $\tilde{g}(q) = TF[g(x)]$. Démontrez alors que

$$TF[f(|x|)] = \tilde{g}(q) + \tilde{g}(-q).$$

Sachant que $TF[H(x)\exp(-kx)] = 1/(k+iq)$, en utilisant la relation ci-dessus, déduire $TF[\exp(|x|)]$.

c. Soit $C(x) = \exp(-kx)\cos(kx)$ et $g(x) = H(x)C(x)$. Calculez la TF de g et montrez qu'elle vaut

$$\tilde{g}(q) = \frac{k+iq}{2k^2 - q^2 + 2ikq}$$

[Help : exprimez le cosinus comme une somme d'exponentiel complexe].

d. En utilisant les résultats ci-dessus, montrez que

$$TF[C(|x|)] = 2k\frac{2k^2+q^2}{4k^4+q^4}$$

Que vaut $TF[C(|x|/\sqrt{2})]$?

e. Enfin ! Soit la fonction $S(x) = \exp(-kx)\sin(kx)$. Nous admettrons (le calcul est similaire à celui que vous venez de faire) que

$$TF[S(|x|)] = 2k\frac{2k^2-q^2}{4k^4+q^4}$$

Trouvez les TF inverse des fonctions $q^2/(q^4+\kappa^4)$ et $\kappa^2/(q^4+\kappa^4)$ comme des combinaisons linéaires des fonctions $C(|x|/\sqrt{2})$ et $S(|x|/\sqrt{2})$.

3. La solution de l'équation de la chaleur.

a. En utilisant les TF inverse calculées ci-dessus, donner la solution permanente $T_{pr}(x,t)$. Comme nous nous intéressons seulement aux $x > 0$, vous pouvez laissez tomber le signe de la valeur absolue.

Utiliser les relations $\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2}\cos(x+\pi/4)$ et $\cos(x)+\sin(x) = \sqrt{2}\sin(x+\pi/4)$ pour mettre la température sous forme d'onde progressive

$$T(x,t) = \frac{A}{2D\kappa}\sin\left(\omega t - \kappa x/\sqrt{2} - \pi/4\right)\exp(-\kappa x/\sqrt{2})$$

b. A une profondeur x, par quel facteur l'amplitude des fluctuations est diminuée par rapport à l'amplitude des fluctuations à la surface ? Exprimer le résultat en fonction de $\ell = 1/\kappa$ qui est l'echelle caractéristique du problème.

4. Mise hors gel des tuyaux, conservation des vins et autres comportement écologique.

a. La terre meuble humide a un coefficient de diffusion D de l'ordre de $5\,10^{-2} m^2/hr$. On peut estimer qu'en hiver, la température varie - par période de 24 heure - de 6 degrés autour de la température moyenne de 2 degrés . Que vaut κ dans ce cas ? $\ell = 1/\kappa$ est l'échelle caractéristique de l'atténuation de la température. Que vaut ℓ ? A quelle profondeur faut il placer les tuyaux pour les mettre hors gel ?

b. Le granit a un coefficient de diffusion $D = 5\,10^{-3} m^2/hr$. Sachant qu'en Provence, la température en été fluctue de 10 degrès par 24 heure, à quelle profondeur faut il placer une cave pour que la température ne varie pas plus que de 0.1 degrès à l'intérieur ?

c. Quel est le déphasage de la température à une profondeur x par rapport à la température de surface ? La question est importante pour la régulation thérmique de la maison en été : nous souhaitons que pendant les heures les plus chaudes de la journée, la maison ait la température la plus fraiche possible. Le coefficient de diffusion du béton est $D = 10^{-2} m^2/hr$. Quelle épaisseur de mûr faut-il choisir pour que le déphasage entre la maison et l'extérieur soit de π ?