Corrigé de l'examen de juin 2006.

June 27, 2006

A.

1.

a. La fraction $1/(s+\alpha)(s+i\omega)(s-i\omega)$ s'écrit comme la somme des trois fraction simple

$$\frac{1}{(s+\alpha)(s+i\omega)(s-i\omega)} = \frac{A}{s+\alpha} + \frac{B}{s+i\omega} + \frac{C}{s-i\omega}$$

où

$$\begin{aligned}
A &= 1/(s+i\omega)(s-i\omega)|_{s=-\alpha} = 1/(\alpha^2+\omega^2) \\
B &= 1/(s+\alpha)(s-i\omega)|_{s=-i\omega} = 1/(-2i\omega)(\alpha-i\omega) \\
C &= 1/(s+\alpha)(s+i\omega)|_{s=i\omega} = 1/(2i\omega)(\alpha+i\omega)
\end{aligned}$$

En recombinant les deux termes B et C, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i\omega}\left(\frac{-1}{\alpha-i\omega}\frac{1}{s+i\omega} + \frac{1}{\alpha+i\omega}\frac{1}{s-i\omega}\right) &= \frac{1}{2i\omega}\left(-\frac{\alpha+i\omega}{\alpha^2+\omega^2}\frac{1}{s+i\omega} + \frac{\alpha-i\omega}{\alpha^2+\omega^2}\frac{1}{s-i\omega}\right) \\
&= \frac{1}{\alpha^2+\omega^2}\frac{1}{2i\omega}\left[\alpha\left(\frac{1}{s-i\omega} - \frac{1}{s+i\omega}\right) - i\omega\left(\frac{1}{s-i\omega} + \frac{1}{s+i\omega}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\alpha^2+\omega^2}\left(\frac{\alpha}{s^2+\omega^2} - \frac{s}{s^2+\omega^2}\right)
\end{aligned}$$

b. En prenant la TL de l'équation $dy/dt + \alpha y = A\sin\omega t$ avec la CI donnée, on obtient

$$\tilde{y}(s) = A\omega/(s+\alpha)(s^2+\omega^2)$$

Comme on vient de voire sa décomposition en fraction simple est que pour les originaux nous avons

$$\begin{aligned}
1/(s+\alpha) &\to \exp(-\alpha t) \\
\alpha/(s^2+\omega^2) &\to (\alpha/\omega)\sin(\omega t) \\
s/(s^2+\omega^2) &\to \cos(\omega t)
\end{aligned}$$

nous trouvons bien la fonction $y(t)$ ennoncée.

B.

1.

Nous avons les relations bien connues maintenant :

$$\begin{aligned}
T(x,t) &\to \tilde{T}(q,t) \\
\partial^2 T/\partial x^2 &\to -q^2\tilde{T}(q,t) \\
\delta(x) &\to 1
\end{aligned}$$

La fonction $\sin \omega t$ ne dépend pas de x et vis à vis de cette TF, est considérée comme une constante. Nous trouvons donc

$$(\partial\tilde{T}/\partial t + Dq^2\tilde{T}) = A\sin\omega t$$

Nous avons une équa-dif (par rapport au temps) sur $\tilde{T}$, soumise à une excitation périodique. Il nous suffit d'identifier Dq^2 à α pour pouvoir directement utiliser les résultats de la partie A.

2.

a,b. soit $\tilde{h}(q) = TF[h(x)]$. Quelle est la TF de $h(-x)$?

$$\begin{aligned} TF[h(-x)] &= \int_{-\infty}^{\infty} h(-x)\exp(-iqx)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\exp(iqx)dx \\ &= \tilde{h}(-q) \end{aligned}$$

où on est passé de la première ligne à la seconde en effectuant le changement de variable $x \to -x$. Comme maintenant il est evident que $f(|x|) = H(x)f(x) + H(-x)f(-x)$ et que par définition, $\tilde{g}(q) = TF[H(x)f(x)]$, nous avons

$$TF[f(|x|)] = \tilde{g}(q) + \tilde{g}(-q)$$

L'exemple le plus élémentaire est celui de $\exp(k|x|)$: come $TF[H(x)\exp(-kx)] = 1/(k+iq)$,

$$\begin{aligned} TF[\exp(-k|x|)] & \quad \frac{1}{k+iq} + \frac{1}{k-iq} \\ &= \frac{2k}{k^2+q^2} \end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned} TF[H(x)C(x)] &= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-kx}(e^{ikx} + e^{-ikx})e^{-iqx}dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-i)k+iq} + \frac{1}{(1+i)k+iq}\right) \\ &= \frac{k+iq}{2k^2-q^2+2ikq} \end{aligned}$$

d. D'après ce que nous avons dit en a,b,

$$\begin{aligned} TF[C(|x|)] &= \frac{k+iq}{2k^2-q^2+2ikq} + \frac{k-iq}{2k^2-q^2-2ikq} \\ &= 2k\frac{2k^2+q^2}{4k^4+q^4} \qquad (1) \end{aligned}$$

pour $TF[C(|x|/\sqrt{2})]$, il faut soit se souvenir des règles de changement d'échelle, soit remplacer k par $k/\sqrt{2}$ dans l'expression (1), ce qui nous donne

$$TF[C(|x|/\sqrt{2})] = \sqrt{2}k\frac{k^2+q^2}{k^4+q^4}$$

e. Bon, maintenant il est evident comment s'y prendre :

$$\begin{aligned}\frac{k^2}{k^4+q^4} &= \frac{1}{2\sqrt{2}k}TF[C(|x|/\sqrt{2})+S(|x|/\sqrt{2})]\\ \frac{q^2}{k^4+q^4} &= \frac{1}{2\sqrt{2}k}TF[C(|x|/\sqrt{2})-S(|x|/\sqrt{2})]\end{aligned}$$

Appliquant la TF inverse aux deux cotés et en laissant tomber || pour $x > 0$, et en utilisant la relation pour la somme et différence des cosinus et sinus,

$$\begin{aligned}TF^{-1}\left[\frac{k^2}{k^4+q^4}\right] &= \frac{1}{2k}\sin\left(\kappa x/\sqrt{2}+\pi/4\right)\exp(-\kappa x/\sqrt{2})\\ TF^{-1}\left[\frac{k^2}{k^4+q^4}\right] &= \frac{1}{2k}\cos\left(\kappa x/\sqrt{2}+\pi/4\right)\exp(-\kappa x/\sqrt{2})\end{aligned}$$

3.

Nous avons maintenant tous les élément pour inverser la TF de la solution trouvée à la fin de la question B.1

$$\begin{aligned}T(x,t) &= \frac{A}{2Dk}\left(\cos\left(\kappa x/\sqrt{2}+\pi/4\right)\sin\omega t-\sin\left(\kappa x/\sqrt{2}+\pi/4\right)\cos\omega t\right)\exp(-\kappa x/\sqrt{2})\\ &= \frac{A}{2Dk}\sin\left(\omega t-\kappa x/\sqrt{2}-\pi/4\right)\exp(-\kappa x/\sqrt{2})\end{aligned}$$

b. L'amplitude des fluctuations par rapport à la surface est diminuée par un facteur $\exp(-\kappa x/\sqrt{2}) = \exp(-x/\ell\sqrt{2})$. Si l'on veut attenuer la fluctuation par un facteur G, il faut se placer à x tel que

$$\begin{aligned}\exp(-x/\ell\sqrt{2}) &= G\\ x &= -\sqrt{2}\ell\log(G)\end{aligned}$$

4.

Dans tous les problèmes suivants, la période des oscillations est de 24 heures, *i.e.* $\omega = 2\pi/24 = 0.26$.

a. $\ell = \sqrt{D/\omega} = 0.44$m. Nous devons attenuer les oscillations par un facteur 2/6, ce qui nous donne $x = 0.7$ m. En se plaçant à 1m, nous nous donnons une sécurité comfortable.

b. $\ell = \sqrt{D/\omega} = 0.14$m. Nous devons attenuer les oscillations par un facteur 0.1/10, ce qui nous donne $x = 0.9$ m.

c. Manifestement, pour avoir un déphasage ϕ par rapport à la surface, il faut se placer à la profondeur $x = \sqrt{2}\ell\phi$. Pour le béton, $\ell = \sqrt{D/\omega} = 0.2$m. Un mur de $x = \sqrt{2}\pi\ell = 0.9$m. Cela reviendra cher ! Autant travailler le béton pour abaisser son coefficient de diffusion (structure en nid d'abeille, faible teneur en eau par adjonction de polymer, ...).