A. Sturm-Liouville.

Un "*opérateur linéaire*" L est une boite noire qui prend une fonction en entrée et qui produit une autre fonction en sortie, et fait cela de façon linéaire : $L[\lambda f+\mu g]=\lambda L[f]+\mu L[g]$ (λ,μsont des constantes, f,g des fonctions). Par exemple, l'operateur $L=d/dx$ appliqué à une fonction f produit sa dérivée : $Lf=f'$. Les opérateurs sont en quelque sorte des fonctions de fonction.

Nous allons étudier ici les propriétés d'une classe très générale d'équations différentielles linéaires que l'on rencontre fréquemment en physique-mathématique :

$$\alpha(x)\frac{d^2u}{dx^2}+\beta(x)\frac{du}{dx}+\gamma(x)u(x)=\lambda u(x) \tag{1}$$

où $\alpha(x)$,$\beta(x)$, $\gamma(x)$ sont des fonctions réelles de x et λ une constante. Nous pouvons représenter cela de façon formelle par $Lu=\lambda u$, où L est l'opérateur différentiel $L=\alpha(x)d^2/dx^2+\beta(x)d/dx+\gamma(x)$.

Tous les opérateurs différentiels importants en physique ont une propriété fondamentale : ils sont hermitiens (du nom de mathématicien Hermite). Nous allons voir ce que cela veut dire.

Nous avons vu que la définition la plus générale du produit scalaire entre deux fonctions est donnée par

$$(f,g)_w=\int_a^b w(x)f(x)g(x)dx$$

où $w(x)\geq 0$ est appelé le *poids* du produit scalaire. Un opérateur L est dit hermitien si il existe un poids $w(x)$ tel que $(Lf,g)_w=(f,Lg)_w$ *quelque soient* les fonctions f et g dans l'espace des fonctions considérées. Nous allons par la suite, étant donné l'opérateur L, c'est à dire les fonctions α, β et γ, chercher le poids w associé à L et les diverses choses que l'on peut faire avec. Nous allons considérer l'intervalle $[a,b]=]-\infty,+\infty[$.

1. En formant la différence $(Lf,g)_w-(f,Lg)_w$ pour deux fonctions arbitraire f et g, démontrer que le seul poids qui puisse annuler la différence *quelque soient* les fonctions f et g doit obéir aux conditions suivante :

$$\left[w(x)\alpha(x)\left(f(x)g'(x)-f'(x)g(x)\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0 \ \forall f,g \tag{2}$$

$$(w(x)\alpha(x))' = w(x)\beta(x) \tag{3}$$

pour arriver à ce résultat, il suffit d'écrire la définition du produit scalaire, former la différence et faire quelques integrations par partie. Le problème peut paraître intimidant, mais il est en faite assez facile.

2. L'équation différentielle (3) en faite définit la fonction $w(x)$. Verfier alors que sa solution est donnée par $w(x)=(1/\alpha(x))\exp[U(x)]$ où $U(x)$ est la primitive de $\beta(x)/\alpha(x)$. Cela veut évidemment dire que $U'(x)=\beta(x)/\alpha(x)$.

3. Applications. L'équation d'Hermite s'écrit :

$$u''(x)-2xu'(x)+2nu(x)=0$$

et apparaît dans la résolution de l'oscillateur harmonique en mécanique quantique. En utilisant le résultat de la question 2, trouver le poids associé à cette équation.

4. Supposons que les fonctions $u_1(x)$ et $u_2(x)$ sont les solutions de $Lu_1=\lambda_1u_1$ et $Lu_2=\lambda_2u_2$ avec $\lambda_1\neq\lambda_2$ et où L est l'opérateur différentielle définit plus haut (on dit que u_1 et u_2 sont des fonctions propres de L, associées aux valeurs propres λ_1 et λ_2). Démontrez alors que $(u_1,u_2)_w=0$, c'est à dire que les fonctions u_1 et u_2 sont orthogonales. Pour cela, formez la différence $(Lu_1,u_2)_w-(u_1,Lu_2)_w$, et utilisez (i) le fait que L est hermitien ; (ii) $u_1$et $u_2$sont fonctions propres de L.

5. Nous supposons maintenant que les fonctions u_n, solutions de $Lu_n=\lambda_nu_n$ forment une base de l'espace d'Hilbert, c'est à dire que n'importe quelle fonction f peut s'écrire $f(x)=\sum f_nu_n(x)$ où les $f_n$sont des coefficients réels. En utilisant l'orthogonalité des $u_n(x)$, trouver les coefficients f_n.

6. Nous souhaitons maintenant résoudre l'équation générale

$$L.u(x)=f(x)$$

En décomposant la fonction (inconnue) $u(x)$ et la fonction connue $f(x)$ sur la base des $u_n(x)$, trouver les coefficients c_n de la décomposition de $u(x)$: $u(x)=\sum_n c_nu_n(x)$.

B. Soldats marchants sur un pont.

Pour enseigner les phénomènes de résonnances, on rappelle souvent l'anectode d'un pont s'écroulant sous des soldats marchant au pas. Nous allons re-visiter ce phénomène un peu plus en détail.

1. (Introduction) L'équation d'un oscillateur harmonique amorti et forcé périodiquement s'écrit :

$$d^2y/dt^2 + \lambda dy/dt + \omega^2 y = f_0 \cos(\Omega t) \qquad (4)$$

Ω est la pulsation de forçage, ω la pulsation propre de l'oscillateur et nous suposons $0 < \lambda < 2\omega$. (i) Vérifiez que la solution *particulière* de cette équation est de la forme $y = F_1 \cos(\Omega t) + F_2 \sin(\Omega t)$ où

$$F_1 = \frac{\omega^2 - \Omega^2}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + \lambda^2\Omega^2} f_0 \;\; ; \;\; F_2 = \frac{\lambda\Omega}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + \lambda^2\Omega^2} f_0$$

(ii) Tracez l'amplitude de l'oscillateur $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$ en fonction de Ω et discutez spécialement ce qui se passe pour $\Omega \approx \omega$; (iii) Quelles sont les dimensions des divers paramètres et amplitudes $(\lambda, \omega, \Omega, f_0, F)$, en supposant que y a la dimension d'une longueur et t la dimension d'un temps ? (iv) Pourquoi pour des temps longs comparé à $1/\lambda$, la solution générale de l'eq. (4) devient très proche de la solution particulière exhibée plus haut ?

2. (Positionnement du problème). L'équation du mouvement d'un pont (d'une barre rigide en générale) soumis à une force extérieure est

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \lambda \frac{\partial u}{\partial t} = -B \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + f(x,t) \qquad (5)$$

où $u(x,t)$ est le déplacement vertical du pont à l'abcisse x et au temps t, ρ est la densité linéaire du pont, B son coefficient de rigidité, λ la dissipation et $f(x,t)$ la force par unité de longueur appliquée à l'abscisse x et au temps t.Quel est la dimension de B ? Nous supposons des conditions aux bords dites de pont posé librement sur deux supports : $u(0,t) = u(L,t) = 0$; $\partial^2 u/\partial x^2\big|_{x=0} = \partial^2 u/\partial x^2\big|_{x=L} = 0$. Les conditions initiales sont le pont horizontal et au repos ($u(x,0) = \partial_t u(x,0) = 0$).

3. Nous supposons maintenant que les soldats sont uniformément répartis sur le pont et qu'ils marchent au pas à une cadence Ω, c'est à dire que nous supposons $f(x,t) = f_0 \cos(\Omega t)$. Resolvez l'équation (5) en décomposant la fonction inconnue u et la fonction connue f sur la base des sinus (de x bien sûr). **Help :** notez que la fonction $f_0 \cos(\Omega t)$ ne dépend pas de x, sa décomposition en série de sinus (de x), à un facteur multiplicatif près, ressemble donc à celle de la fonction constante 1. Pour quelles cadences de la marche, le pont se met il en résonnance ?

4. Prenons quelques valeurs. Supposons que notre pont est fabriqué en béton non armé d'1m d'épaisseur, de densité linéaire 1000 kg/m, et de coeffcient de rigidité $2.7\, 10^{10}$(unité ?). Sachant que la pulsation de marche des soldats est autour de 5 s^{-1} , est ce qu'un pont de 20 m de longueur est menacé par la résonnance ? Et un pont de 100 m de longueur ?

5. Supposons que le pont n'est pas posé sur deux support, mais ancré aux deux extrémités. Dans ce cas, les conditions aux bords s'écriraient : $u(0,t) = u(L,t) = 0$; $\partial u/\partial x|_{x=0} = \partial u/\partial x|_{x=L} = 0$. Peut on résoudre ce problème comme précédement ? Sinon, avez vous des suggéstions pour la démarche à entreprendre ?

C. Petits problèmes divers et variés.

1. Démontrer que si $f(x)$ est une fonction $L-$périodique, sa décomposition en série de fourier sur l'intervalle $[h, L+h]$ ne dépend pas de h. **Help :** vous pouvez utiliser la propriété des intégrales $\int_h^{L+h} = \int_h^0 + \int_0^L + \int_L^{L+h}$.

2. Démontrer que les fonctions $\sin(2\pi nx/L)$ ne forment *pas* une base de $\mathcal{L}_2[0,L]$.

3. Décomposer la fonction $\cos(x)$ sur l'interval $[0, 2\pi]$ en série de sinus. Décomposer la même fonction en série de cosinus.