Examens de mathématique L3 Physique-Chimie

A. Traitement thermique de surface.

Nous allons calculer dans la suite la diffusion de la chaleur dans un barreau unidimensionnel dont on fait varier la température sur les bords. Ce procédé est couramment utilisé par exemple en métallurgie, où on essaye de donner des propriétés mécaniques différentes au centre et à la périphérie d'un barreau (comme le vilebrequin).

1. Résultat préliminaires. Soit l'équation différentielle ordinaire de premier ordre

$$\frac{dy}{dt}+\alpha y=f(t) \tag{1}$$

où α est une constante. La condition initiale est $y(t=0)=0$. Démontrer alors que sa solution s'écrit

$$y(t)=\left(\int_0^t \exp(\alpha\tau)f(\tau)d\tau\right)\exp(-\alpha t) \tag{2}$$

Calculer en particulier la solution pour $f(t)=a\cos(\omega_0 t)$. Help : un cosinus n'est que la somme de deux exponentielles complexes.

2. Résultat préliminaire bis. Décomposer la fonction constante 1 en série de sinus sur l'intervalle $[0,L]$, c'est à dire trouver les coefficients β_n tel que :

$$1=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\sin(\frac{n\pi x}{L}) \tag{3}$$

Ecrire explicitement la valeur de β_n pour $1\leq n\leq 4$.

3. Soit un barreau de taille L dont nous maintenons les bords à une température $g(t)$, c'est à dire variable dans le temps. Soit $u(x,t)$ la température dans le barreau à l'abscisse x et au temps t. L'équation de la chaleur est donnée comme d'habitude par $\partial u/\partial t=D\partial^2u/\partial x^2$ avec les conditions aux limites $u(0,t)=u(L,t)=g(t)$. La condition initiale est $u(x,0)=0$.

Pour rendre le problème traitable par des séries de sinus, nous allons poser $\phi(x,t)=u(x,t)-g(t)$. A quelle équation obéit la fonction ϕ ? Quelles sont les conditions aux limites ? Quelle est la condition initiale (nous supposons $g(t=0)=0$) ?

4. Nous nous intéressons à une variation périodique de la température aux bords, *i.e.* $g(t)=T_0\sin(\omega_0 t)$. Résoudre alors l'équation que vous avez obtenue en décomposant $\phi(x,t)$ en série de sinus dont les coefficients dépendent du temps

$$\phi(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(t)\sin(\frac{n\pi x}{L})$$

et en vous servant des résultats préliminaires. Pour plus de lisibilité, quand le besoin se fera sentir, poser $\nu=D\pi^2/L^2$ (quelle est la dimension de ν ?)
Help : il faut obtenir une équation différentielle pour les coefficients $b_n(t)$. Noter également qu'une fonction qui ne dépend pas de x mais seulement du temps se décompose comme une constante (par rapport à x) en série de $\sin(n\pi x/L)$.

5. (i) Dans l'expression de $b_n(t)$, quel est le terme qui devient négligeable quand $t \to +\infty$? Par la suite, nous nous plaçons dans l'approximation des temps long, c'est à dire que l'on néglige effectivement ce terme. On pose $\omega = \nu = 1$. (ii) En plus, on approxime la fonction $\phi(x,t)$ seulement par ses quatre premiers harmoniques ($n \leq 4$).

Ecrire alors explicitement la fonction $\phi(x,t)$. Tracer cette fonction en fonction de x pour les temps $t = 0$, $\pi/2$, $3\pi/4$ et π. Pour tracer les courbes, vous pouvez seulement calculer la valeur de la courbe pour quelques points significatif comme $x = 0$, $L/4$, $L/2$, $3L/4$, L et ensuite relier les points.

B. Excitation localisée d'une corde vibrante.

Nous considérons ici le cas d'une corde vibrante *infinie* soumise, à l'instant $t = 0$, à une excitation extrêmement localisée dans le temps et dans l'espace. Ceci est par exemple l'idéalisation d'un coup de marteau de piano. Nous essayons donc de résoudre l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f_0 \delta(x) \delta(t) \tag{4}$$

où f_0 est une constante qui dénote l'amplitude de la force localisée.

Résultat préliminaire 1. Quelle est la transformée de Fourier de la fonction $f(t) = H(t)\exp(-\nu t)\sin(\omega_0 t)$? Vers quelle fonction tend $f(t)$ quand $\nu \to 0$? et sa TF $\tilde{f}(\omega)$? Remarquer le petit tour de passe passe : $H(t)\sin(\omega_0 t)$ n'a pas, à priori, une transformée de Fourier, puisque la fonction ne tend pas vers 0 quand $t \to +\infty$ (la fonction n'est pas sommable). Par contre, la fonction $f(t)$ est sommable à cause du terme $\exp(-\nu t)$. Une fois sa TF calculée, il suffit de prendre la limite $\nu \to 0$ et HOP, nous somme en possession de la TF de $H(t)\sin(\omega_0 t)$.

Résultat préliminaire 2. Résoudre, pour la fonction $y(t)$, l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_0^2 y = f_0 \delta(t) \tag{5}$$

avec la condition initiale $y(t < 0) = 0$. Pour cela, prendre la TF par rapport à t des deux cotés de l'équation, et s'inspirer du résultat préliminaire 1. Représenter graphiquement la solution.

3. Soit $\tilde{u}(q,t)$, la TF *par rapport à la variable* x de $u(x,t)$. En prenant la TF (par rapport à x) des deux cotés de l'équation (4), obtenir une équation différentielle ordinaire pour $\tilde{u}(q,t)$ que vous pouvez résoudre à l'aide du résultat préliminaire 2.

4. Inverser la TF pour trouver $u(x,t)$. Cela ne devrait pas poser trop de problèmes si vous vous souvenez de la TF de la fonction porte $\Pi(x/a)$. Représenter graphiquement $u(x,t)$ en fonction de x pour quelques valeurs de temps que vous estimez intéressant.

5. Répondre à cette question sans faire de calculs. Si la force localisée n'était pas appliquée en $x = 0$ mais en $x = a$, comment il faudrait ré-écrire l'équation (4) ? Et quelle serait la solution ? Et quelle serait la solution si nous avions 2 forces localisées, une appliquée en $x = 0$ avec une amplitude f_0 et l'autre en $x = a$ avec l'amplitude $-f_0$?

6. Pouvez vous représenter ce dernier résultat graphiquement en fonction de x pour quelques valeurs de t ? Je serai ravi (et vous également) si vous pouviez me commenter verbalement tout cela.