Examens de mathématiques, L3 Physique-Chimie, Novembre 2005

A- Equation de la chaleur en environnement variable.

Nous souhaitons déterminer la répartition de la température dans une barre sans perte laterale dont une des extrémités est maintenu à température nulle et l'autre à une température variable dans le temps. Nous supposons qu'initialement la barre est à température nulle. Nous devons donc résoudre l'équation de la chaleur, avec les conditions suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$
$$u(0,t) = 0 \quad (2)$$
$$u(L,t) = h(t) \quad (3)$$
$$u(x,0) = 0 \quad (4)$$

D est le coefficient de diffusion ; L la longueur de la barre ; $h(t)$ une fonction connue qui désigne la variation de la température à l'extrémité $x = L$ de la barre et nous supposons de plus que $h(0) = 0$.

1. Décomposer la fonction $f(x) = x/L$ en série de sinus sur l'intervalle $[0, L]$. Nous admettrons par la suite que les coefficients de la série de sinus de la fonction $(x/L)(1 - x^2/L^2)$ sont

$$\gamma_n = \frac{-12}{\pi^3}\frac{(-1)^n}{n^3}$$

2. Il est évident que nous ne pouvons pas décomposer la fonction inconnue u en série de sinus directement : les conditions aux limites ne nous permettent pas d'effectuer les dérivations terme à terme. Considérons la fonction

$$w(x,t) = u(x,t) - \frac{x}{L}h(t) \quad (5)$$

Démontrer que $w(x,t)$ obéit à une équation de la chaleur avec source

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{x}{L}h'(t) \quad (6)$$

Qu'elles sont les conditions aux limites *et* initiales pour la fonction w ?

3. Dorénavant, nous supposons que $h(t) = \alpha t$, où α est une constante. Résoudre l'équation (6) en utilisant les séries de sinus. Par résoudre, il faut entendre : "obtenir explicitement les coefficients de la série de sinus de la fonction w".

Note 1. Pour le cas particulier que nous sommes en train de résoudre, $h'(t) = \alpha$ est une constante. Décomposer $(h'(t)/L)x$ en série de $\sin(n\pi x/L)$ ne pose donc pas de difficultés particulières. Pour le cas général (par exemple la question 7), il est évident que $h'(t)$ ne dépend pas de x et intervient comme une constante dans la décomposition de $(h'(t)/L)x$.

Note 2. La solution de l'équation $y' + ay = g(t)$ est

$$y(t) = \exp(-at)\left[y_0 + \int_0^t g(\tau)\exp(a\tau)d\tau\right] \quad (7)$$

où $y_0 = y(t = 0)$. Si vous n'aimez pas cette formule, utiliser la méthode habituelle de la "solution générale plus la solution particulière", qui revient bien sûr au même.

4. Quelle est la solution stationnaire $w_s(x)$ de l'équation (6) ?

5. Quelle est la limite de la fonction $w(x,t)$ pour les temps grands, c'est à dire quand $t \to \infty$? En utilisant les résultats de la première question, en donner la forme analytique exacte. Comparer à la solution stainnaire trouvée plus haut. Tracer la forme de la fonction w dans cette limite.

6. Que vaut finalement la fonction que l'on cherche vraiment, c'est à dire $u(x,t)$? Quelle est sa forme assymptotique pour les larges temps ? Tracer la fonction $u(x,t)$ dans cette approximation, en fonction de x, pour un temps (large) donné.

7. question difficile, à faire si vous avez du temps. Quelle aurait été la solution si l'extrémité L était soumise à une température oscillante $h(t) = \alpha \sin(\omega t)$?

B- Polynômes de Legendre.

Nous avons vu que les polynômes de Legendre $P_n(x)$ sont des polynômes de degrès n qui vérifient l'équation de Legendre

$$(1-x^2)P_n^{''}(x) - 2xP_n^{'}(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

Nous voulons démontrer que cette définition des polynômes de lengendre implique qu'ils sont orthogonaux les uns aux autres sur l'intervalle $[-1,1]$.

1. Vérifier que l'équation de Legendre peut se mettre sous la forme de $[(1-x^2)P_n^{'}(x)]' + n(n+1)P_n(x) = 0$

2. Demontrer que $(P_n, P_m) = 0$ sur l'intervalle $[-1,1]$ si $m \neq n$. **Help** : Faire cela (i) en écrivant l'équation de Legendre sous cette forme pour deux valeurs n et m ;

$$\begin{aligned}
[(1-x^2)P_n^{'}(x)]' + n(n+1)P_n(x) &= 0 \\
[(1-x^2)P_m^{'}(x)]' + m(m+1)P_m(x) &= 0
\end{aligned}$$

(ii) en multipliant la première relation par $P_m(x)$ et la seconde par $P_n(x)$; (iii) en intégrant entre -1 et 1 (il faudra problablement intégrer par partie à un moment ou un autre.) ; (iv) en retranchant l'une des égalités ainsi obtenue de l'autre. Il est probablement inutile de rappeler la définition du produit scalaire sur l'intervalle $[-1,1]$,

$$(P_n, P_m) = \int_{-1}^{+1} P_n(x)P_m(x)dx$$

C- Problèmes divers et variés.

1. Soit une fonction L-périodique, c'est à dire $f(x \pm L) = f(x)$. Ecrire sa décomposition en série de Fourier sur l'intervalle $[0,L]$ (appelons les coefficients a_n et b_n) et l'intervalle $[0,2L]$ (appelons les coefficients $a_n^{'}$ et $b_n^{'}$). Quelles sont les relations entre les coefficients des séries Fouriers ? commenter ce résultat.

2. Démontrer que pour une fonction $f(x)$ quelconque, il est **faux** d'assumer que

$$Re[\mathrm{TF}[f(x)]] = \mathrm{TF}[Re[f(x)]]$$

A quelle condition cette relation est vraie ?
Note : pour un nombre complexe z, $Re(z) = (z+z^*)/2$, où z^* est le complexe conjugué de z.