Corrigé de l'examen de mathématique

L3 Physique-Chimie, novembre 2005

A- Equation de la chaleur.

1. Soit

$$x/L = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

alors, une simple intégration par partie nous donne

$$\beta_n = \frac{2}{L} \int_0^L \frac{x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{-2}{\pi} \frac{(-1)^n}{n}$$

La décomposition de la fonction $(x/L)(1-x^2/L2)$ aurait nécessité trois intégrations par partie, un peu trop fastidieux pour un examen. Nous acceptons donc le résultat donné.

2. En utilisant la définition (5), nous avons d'une part $\partial_t w = \partial_t u - (x/L)h'(t)$ et d'autre part $\partial^2_{x^2} w = \partial^2_{x^2} u$. En remplaçant dans l'équation de la chaleur (1), on trouve bien l'expression (6). Par ailleurs, $w(0,t) = u(0,t) = 0$ et $w(L,t) = u(L,t) - h(t) = 0$. La fonction w est donc bien maintenue à zéro sur ses extrémités au cours du temps, ce qui nous permet d'utiliser les séries de sinus. Nous avons de plus la condition initiale $w(x,0) = u(x,0) - h(0) = 0$.

3. Soit $w(x,t) = \sum b_n(t) \sin(n\pi x/L)$. En posant $1/\tau_n = D(n\pi/L)^2$, nous obtenons

$$b'_n(t) + (1/\tau_n) b_n(t) = -\beta_n h'(t) \tag{1}$$

dont la solution est donnée par l'expression (7). Dans le cas qui nous préoccupe, $b_n(0) = 0$ et $h'(t) = \alpha$, nous avons donc

$$b_n(t) = -\beta_n \tau_n \alpha \left(1 - \exp(-t/\tau_n)\right)$$

4. La solution stationnaire est donnée par l'équation

$$\frac{d^2 w_s}{dx^2} = \frac{\alpha}{LD} x$$

dont la solution qui respecte les conditions aux limites (nulle aux bords) est (enintégrant deux fois)

$$w_s(x) = \frac{-1}{6} \left(\frac{\alpha L^2}{D}\right) \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right)$$

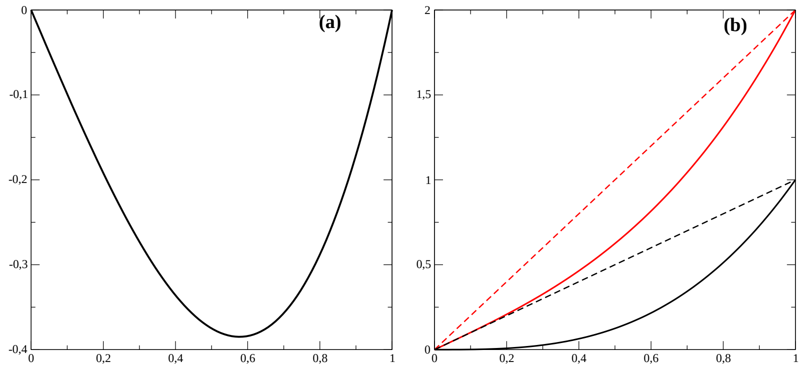

Figure 1: (a) la fonction $w_s(x)$; (b) la fonction $u(x,t)$pour deux temps (larges) différents. La température dans la barre augmente avec le temps, mais la distribution linéaire n'est pas linéaire.

5. quand $t \to \infty$,

$$b_n(t) \to -\beta_n \tau_n \alpha = 2\left(\frac{\alpha L^2}{D}\right)\frac{(-1)^n}{(\pi n)^3}$$

Si on se reporte au résultat de la question (1), on voit que ceux-ci sont simplement les coefficients de la serie de Fourier de la fonction $w_s(x)$. Donc, quand $t \to \infty, w(x,t) \to w_s(x)$.

6. $u(x,t) = w(x,t) + (\alpha/L)tx$. Pour les temps large, $u(x,t) \approx w_s(x) + (\alpha/L)tx$.

7. En utilisant la relation (7), nous trouvons cette fois

$$b_n(t) = \alpha\beta_n \frac{\tau_n}{1+\omega^2\tau_n^2}\left[\omega\tau_n e^{-t/\tau_n} - \omega\tau_n\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\right]$$

Dans la limite des temps larges, le terme exponentiel devient arbitrairement petit, et chaque harmonique b_n oscille dans le temps à fréquence ω. Nous pouvons calculer l'amplitude de l'oscillation et le déphasage avec les formules habituelles pour mettre $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ sous la forme $r\cos(\omega t - \phi)$ où $r^2 = a^2 + b^2$ et $\tan\phi = b/a$.

B. Polynômes de Legendre.

Il suffit de noter que

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1}\left[(1-x^2)P_n'(x)\right]' P_m(x)dx &= \left[(1-x^2)P_n'(x)P_m(x)\right]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1}(1-x^2)P_n'(x)P_m'(x)dx \\ &= -\int_{-1}^{+1}(1-x^2)P_n'(x)P_m'(x)dx\end{aligned}$$

En suivant la démarche indiquée, on trouve alors

$$[n(n+1) - m(m+1)]\int_{-1}^{+1}P_n(x)P_m(x)dx = 0$$

Pour $n \neq m$ donc, P_n et P_m sont orthogonaux.

C. Problèmes divers et variés.

1. Regardons le cas par exemple des $a_n^{'}$:

$$a_n^{'} = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) \cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx \tag{2}$$

Si $n$est pair, posons $n = 2m$, alors la fonction $\cos(\pi n x/L)$ est également $L-$périodique. Il en suit que $\int_0^{2L} = 2 \int_0^L$ et donc

$$a_{2m}^{'} = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{2\pi m x}{L}\right) dx = a_m$$

Par ailleurs, si n est impair, posons $n = 2m+1$, il est trivial de démontrer que l'intégrale (2) est nulle : il suffit d'intégrer par morceau, $\int_0^{2L} = \int_0^L + \int_L^{2L}$, et noter que $\cos[x + (2m+1)\pi] = -\cos(x)$.

En résumé,

$$\begin{aligned} a_{2m}^{'} &= a_m \\ a_{2m+1}^{'} &= 0 \end{aligned}$$

Pour une fonction $L-$périodique, on ne gagne pas plus d'information sur la fonction en la regardant sur un intervalle plus long.

2. Soit $\tilde{f}(q)$ la TF de la fonction $f(x)$. Nous avons, premièrement, (les bornes d'intégrales sont sous entendu être entre $-\infty$ et $+\infty$

$$\begin{aligned} \mathrm{TF}\{Re[f(x)]\} &= (1/2)\mathrm{TF}\{f(x) + f^*(x)\} \\ &= (1/2)\{\int f(x)\exp(-iqx)dx + \int f^*(x)\exp(-iqx)dx\} \\ &= (1/2)\{\tilde{f}(q) + \tilde{f}^*(-q)\} \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} Re\{\mathrm{TF}[f(x)] &= Re\{\tilde{f}(q)\} \\ &= (1/2)\{\tilde{f}(q) + \tilde{f}^*(q)\} \end{aligned}$$

Pour que l'on puisse commuter TF et Re, il faut que $\tilde{f}(q) = \tilde{f}(-q)$ (la TF doit être une fonction paire), ce qui n'est pas en général le cas. Il suffit de regarder les quelques exemples que nous avons résolus en TD, comme par exemple la TF de $H(t)\exp(-\nu t) = 1/(\nu + i\omega)$.