Théorie des groupes et Sudoku.

Bahram Houchmandzadeh

Comment génère-t-on des grilles de Sudoku ? Est ce que cela peut nous aider à résoudre une grille ? le but de ce petit exercice est d'illustrer de façon ludique quelques concepts/définitions de la théorie des groupes : les sous groupes, les groupes générés par des éléments, les sous groupes invariants,... J'espère que cela changera des éternelles groupes de symétries des carrés et des icosaèdres.

Prenons un carré de 9 chiffres a, comme par exemple

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Le groupes des permutations de ces chiffres est évidemment S_9. Considérons le groupe G des permutations des colonnes et H des permutations des lignes, les deux isomorphe à S_3. Nous définissons le groupe Sudoku S_{dk} comme le sous groupe de S_9 généré par $\{G, H\}$, qui est à priori plus petit que S_9.

a. Exercice. Démontrer que $gh = hg$, où $h \in H$ et $g \in G$.

b. Exercice. Démontrer qu'une transposition quelconque, disons $(1, 9)$, n'appartient pas au groupe Sudoku. [Help : démontrer que n'importe quelle séquence de transformation comme par exemple $g_1h_1h_2h_3g_2h_4g_3g_4$ est égale à une transformation gh]

c. Exercice. Qu'elle est l'ordre du groupe S_{dk} ?

Nous disons que deux carrés a, b sont verticalement compatible, $V(a, b) = 1$ si il sont compatible verticalement au sens de Sudoku. Il est évident que $V(a, ga) = 1$, ou $g \in G$, $g \neq e$.

d. Exercice. Démontrer que si $V(a, b) = 1$, alors $V(ha, hb) = 1$ où $h \in H$: la permutation des lignes de deux carrés ne change pas leurs compatibilité verticale.

De même, a, b, c sont verticalement compatible si ils sont deux à deux compatible. Soit maintenant G_c le sous groupe des permutations cyclique de G. Alors il est évident que a, ga, g^2a sont verticalement compatible, où $g \neq e$ et $g \in G_c$. Noter que G_c est le sous groupe invariant (normal) de G : si $g \in G$ et $g_c \in G'$, alors $gg' = g'g$. Nous voyons maintenant qu'étant donné un carré a, nous pouvons générer les trois carrés verticalement compatible $a, hg_ca, h'g_c^2a$ ou $h, h' \in H$ et $g_c \in G_c$ (expliquer pourquoi).

Les manipulations ci-dessus nous montrent maintenant comment générer un Sudoku, en partant d'un carré a que nous plaçons en haut à gauche sans perte de généralité. Etant donné deux permutations cycliques ($\neq e$) $g_c \in G_c$ et $h_c \in H_c$, et les permutations quelconques $g, g' \in G$ et $h, h' \in H$, nous générons les carrés en dessous et à droite de a :

$$\begin{pmatrix} a & b = gh_ca & c = g'h_c^2a \\ d = hg_ca & f & \\ e = h'g_c^2a & & \end{pmatrix}$$

Il nous faut déterminer l'élément f pour qu'il soit et ligne et colonne compatible. Il est évident que l'on passe (ligne compatiblement) de la première colonne à la seconde en appliquant gh_c et de la première ligne à la seconde en appliquant hg_c. Nous avons donc

$$f = hg_cgh_ca$$
$$f = gh_chg_ca$$

Si ses deux quantité sont égales, alors nous avons automatiquement gagné et généré la grille entière en procédant de même pour les autres carré à trouver. Comme les g et les h commutent, nous devons simplement démontrer que

$$g_cg = gg_c$$

or cela est naturellement vrai puisque G_c est un sous groupe invariant de G.

e. Exercice. Le problème qui reste à résoudre est si toutes les grilles de Sudoku sont généré de la sorte, ou si on peut utiliser un sous groupe plus large de S_9 pour générer les grilles. Si toutes les grilles sont généré de cette façon, cela nous donne une piste efficace pour résoudre les grilles de Sudoku. [help : prenez une grille résolu, et vérifier qu'elle *n'est pas* générée par la méthode ci-dessus ; ça aurait été trop simple].

A. Généralisation.

Nous nous sommes beaucoup trop restreint dans le choix de nos groupes G et H. Nous pouvons quelques peu généraliser. Nous gardons comme avant les groupes G_c et H_c de permutation cycliques des colonnes et des lignes, mais définissons G comme le groupe des permutations qui ne change pas *la ligne* d'un élément du carré a. C'est à dire qu'un élément à la position (i, j) est transformé, sous l'action d'un élément du groupe G, en (i, s_3j), où $s_3 \in S_3$.

f. Exercice. Démontrer que G est bien un groupe. Quelle est l'ordre de G ? A quel groupe G est isomorphe ? Nous Généralisons H de la même manière. Démontrer que le groupe généré par $\{G, H\}$ est bien S_9. [Help : démontrer qu'une transposition quelconque de S_9 peut s'écrire comme le produit d'éléments de G et de H].

g. Exercice. Procéder comme avant pour générer des grilles valides, en vérifiant toutes les hypothèses nécessaire sur le chemin.