TD1 : Esapce Vectoriel

Espace vectoriel en général

1. Démontrer que les deux vecteurs $(1,0)\,(0,1)$ forment une base pour l'espace vectoriel associé à $\mathbb{R}^2$. Même chose pour les deux vecteurs $(i,0)$ et $(0,i)$ de $\mathbb{C}^2$.
2. Démontrer que si $\|a-b\| = 0$, alors $a = b$.
3. Démontrer que pour l'espace des matrices $n \times n$, $\sum a_{i,j} b_{i,j}$ est un produit scalaire. Ce produit scalaire est souvent utilisé en analyse matricielle numérique pour l'évaluation de la stabilité des méthode itératives.
4. Démontrer que si n vecteurs sont mutuellement orthogonaux, alors ils sont linéairement indépendants.
5. Démontrer que si $\{e_1, ..., e_n\}$ est une base orthonormée, alors n'importe quel vecteur a peut s'écrire sous la forme
$$a = \sum_{i=1}^{n} (a, e_i) e_i$$
Comment doit on modifier cette formule si la base est simplement orthogonal, mais pas orthonormée ?
6. En réalité, une norme (voir le chapitre sur la topologie) pour pouvoir légalement porter ce nom, doit respecter l'inégalité du triangle :
$$\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$$
Démontrez que la norme définie par le produit scalaire vérifie cette inégalité.
7. Pouvez vous généraliser le produit scalaire dans à l'espace des polynômes ? Et surtout démontrer qu'il respecte toutes les propriétés d'un produit scalaire ?
8. Un operateur linéaire est une fonction linéaire de l'espace vectoriel dans lui même : il prend un vecteur en entrée et produit un vecteur en sortie. La linéarité veut dire que si L est un opérateur linéaire, a, b deux membres quelconques de l'espace vectoriel et λ, μ deux scalaires, alors
$$L(\lambda a + \mu b) = \lambda L(a) + \mu L(b)$$
(N'oublions pas que $L(a)$ et $L(b)$ sont des vecteurs au même titre que a et b). Si on se donne une base $\{e_i\}$, l'operateur peut être représenté par une matrice $L_{i,j}$ tel que si $b = L(a)$, alors $b_i = \sum_j L_{ij} a_j$ où b_i et a_j sont les composantes des vecteurs a et b dans la base $\{e_i\}$. Démontrer alors que si la base est orthonormale,
$$L_{ij} = (e_i, L(e_j))$$
En langage claire, pour connaitre la composante L_{ij} d'une matrice, il faut trouver d'abord le vecteur qui résulte de l'application de l'operateur au $j-$ème vecteur de la base$p = L(e_j)$, et former le produit scalaire de ce vecteur avec le $i-$ème vecteur de la base.

Espace de Hilbert

1. Donner une définition précise de la convergence d'une suite au sens de la norme $\mathcal{L}_2$ dans l'espace des fonctions de carré sommable.
2. montrer que la fonction $f(x) = x^n$ définie sur $[0,1]$ converge vers la fonction $g(x) = 0$ au sens $\mathcal{L}_2$.
3. Démontrer que la convergence uniforme implique la convergence au sens $\mathcal{L}_2$. L'exemple précédent montre bien sûr que le contraire n'est pas vrai.
4. En algèbre linéaire, les formes bilinéaires généralisent le concept du produit scalaire. On peut suivre le même chemin et définir le produit scalaire entre deux fonctions par

   $$(f,g) = \int_I w(x)f(x)g(x)dx$$

   où la fonction $w(x)$est appelé le poids. Démontrer que cette définition possède les propriétés d'un produit scalaire. Que doit on imposer à la fonction poids ?
5. On appel polynômes orthogonaux des polynômes $P_n(x)$ de degrés n, orthogonaux les uns aux autres au sens du produit scalaire défini plus haut. Trouver les trois premiers polynômes associés au poids $w(x) = 1$ et à l'intervalle $[-1,1]$. On appelle ces polynômes les polynômes de Legendre.
6. Démontrer que les polynômes de Legendre que vous avez trouvé obéissent à l'équation différentielle

   $$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

   En réalité, c'est souvent pour cela que l'on cherche les polynômes orthogonaux : ils sont solution d'équations différentielles intéressante pour la physique.
7. Même question que 5 pour le poids $w(x) = e^{-x}$et l'intervalle $[0,\infty[$. Ces polynômes sont associés à la solution de l'équation de Schroedinger pour l'atome d'hydrogène.
8. L'opération $D = d/dx$ est une opération linéaire dans l'espace des fonctions infiniment dérivable ($\mathcal{C}^\infty$) : (i) elle prend une fonction en entrée et donne une fonction en sortie ; (ii) elle fait cela de façon linéaire, *i.e.* $D(\lambda f + \mu g) = \lambda Df + \mu Dg$, où λ, μ sont des scalaires et f, g des fonctions. Supposons que des fonctions orthonormées $f_n(x)$ constituant une base obéissent à la relation $df_n(x)/dx = f_n(x) + a_n f_{n+1}(x)$. Pouvez-vous donner la représentation matricielle de D dans la base des f_n ?
9. Nous verrons plus tard que l'ensemble des fonctions $\sin(nkx)$ où $k = \pi/L$ constitue une base dans l'espace des fonctions. Quelle est la représentation matricielle de l'opérateur D dans cette base ?