TD 10 : Calcul des perturbations.

1. Soit l'équation $x^3-2x^2-(1+\varepsilon)x+2=0$. Une solution de l'équation non-perturbée (*i.e.* pour $\varepsilon=0$) est $x_0=1$. Trouver la correction à cette racine à l'ordre 1 en ε.

2. Trouver la correction à l'ordre 2 en εde la racine de l'équation $x\sin x=\varepsilon$ pour $x_0=\pi$. La solution exacte pour $\varepsilon=0.01$, 0.1et 0.25 est, respectivement, 3.138406317, 3.109426839 et 3.059796698999. Comparez ces valeurs aux solutions approchées à l'ordre 1 et 2 que vous avez trouvé.

3. Soit $P(x)=\sum a_n x^n$ un polynôme dont une des racines, x_0 est connue, c'est à dire $P(x_0)=0$. Soit le polynôme $P'(x)=P(x)+\varepsilon x^p$. Soit x' la racine proche de x_0 de ce dernier. Montrer qu'à l'ordre 1,
$$x'=x_0-\frac{x_0^p}{\sum n a_n x_0^{n-1}}\varepsilon$$

4. Soit l'équation
$$x^6-4x^5+3x^4-6x^2+6x+1=0 \tag{1}$$
Nous remarquons qu'en écrivant par exemple le coefficient de x^4 comme $2+\varepsilon$ (où $\varepsilon=1$), la somme des coefficients de l'équation non perturbée vaut 0. $x=1$ est donc une solution de l'équation non perturbée (*i.e.* pour $\varepsilon=0$). Calculez la correction à cette racine à l'ordre 1 en ε et comparez à la solution exacte $x=1.10565$.

5. Trouver, en utilisant le calcul des perturbations, une bonne approximations de la racine de l'équation $(x-1)^3=\varepsilon$. Pourquoi cela ne marche pas par la méthode usuelle ? Comment faut il écrire le développement de la racine en fonction de ε pour que cela soit correct ?

6. Soit le système
$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\lambda}{2}x^2-\alpha y\\ \dot{y} &= -\alpha x+\frac{\lambda}{2}y^2\end{aligned}$$
Est ce que la solution sationnaire $x(t)=y(t)=0$ est stable ?

7. Soit une masse ponctuelle m reliée à un point fixe par un ressort de constante k et pouvant pivoter autour de ce point. SI on repère la position de la particule par (r,θ), l'équation du mouvement de la particule est donnée par
$$\begin{aligned}mr^2\ddot{\theta}+2mr\dot{r}\dot{\theta}+mgr\sin\theta &= 0\\ m\ddot{r}-mr\dot{\theta}^2-mg\cos\theta+kr &= 0\end{aligned}$$
Etudier la solution de cette équation pour de petite perturbation autour du point stationnaire $\theta_0=0$, $r_0=mg/k$

8. Un point de masse m est suspendu par une barre rigide de longueur l à un point qui lui même est soumis à une oscillation d'amplitude a et pulsation ω sur une barre verticale. L'équation de la masse est donnée par
$$l^2\ddot{\theta}-al\omega^2\sin(\omega t)\cos\theta-gl\sin\theta=0$$
Résoudre cette équation en supposant $\theta\ll 1$. Dans quelle condition la supposition est valable ?