Esapce de Hilbert.

Problème 5. On appel polynômes orthogonaux des polynômes $P_n(x)$ de degrés n, orthogonaux les uns aux autres au sens du produit scalaire défini plus haut. Trouver les trois premiers polynômes associés au poids $w(x) = 1$ et à l'intervalle $[-1, 1]$. On appelle ces polynômes les polynômes de Legendre.

Corrigé. Nous avons vu au problème précédent la définition générale du produit scalaire entre deux fonctions sur l'intervalle I,

$$(f, g)_w = \int_I w(x)f(x)g(x)dx$$

La fonction $w(x)$ est choisie une fois pour toute, et nous avons vu que pour que la définition ci-dessus puissent être un produit scalaire, il faut que $w(x) > 0$ pour $x \in I$. Le choix du poids w se fait selon le problème que nous avons à résoudre : en effet, il existe une relation étroite entre les équations différentielles que nous souhaitons résoudre et la fonction w, ce qu'on appelle le théorème de Stourm-Liouville (voir l'examen de novembre 2004).

Nous souhaitons maintenant trouver tous les *polynômes* qui sont orthogonaux sur l'intervalle [-1,1] associés au poids $w(x) = 1$. Ceci veux dire que nous cherchons les polynômes $P_0(x), P_1(x), ...P_n(x), ...$ où P_n est un polynôme de degré n tel que ces polynômes soit deux à deux orthogonaux avec le poids w que nous nous sommes fixés :

$$(P_i, P_j) = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

Le procédé est le même que celui utilisé dans l'espace euclidien : on choisit d'abord un premier vecteur, ensuite on trouve un deuxième perpendiculaire à celui là, ensuite un troisième perpendiculaire aux deux autres .... et ainsi de suite. Commençons par $P_0(x)$. Comme c'est un polynôme de degré 0, on peut l'écrire sous forme de $P_0(x) = a$. Si nous voulions trouver des polynômes *orthonormés*, nous aurions exigé $(P_0, P_0) = 1$, c'est à dire

$$\int_{-1}^{1} a^2 dx = 2a^2 = 1$$

c'est à dire $a = 1/\sqrt{2}$. Mais nous n'exigeons pas ici de telle conditions ; nous sommes libre de choisir a et pour notre tranquillité, on prend $a = 1$. Donc $P_0(x) = 1$.

Venons-en maintenant à P_1. Comme c'est un polynôme du premier degré, $P_1(x) = ax + b$. Nous cherchons les coefficients a, b pour avoir $(P_0, P_1) = 0$, c'est à dire

$$\begin{aligned}
(P_0, P_1) &= \int_{-1}^{1} 1(ax + b)dx \\
&= \left[\frac{a}{2}x^2 + bx\right]_{-1}^{1} \\
&= 2b = 0
\end{aligned}$$

Pour que $P_1 \perp P_0$ il faut que $b = 0$. Le coefficient a étant libre, on choisit $a = 1$, et donc $P_1(x) = x$.

Nous continuons la même procédure : $P_2 = ax^2 + bx + c$. La condition $(P_2, P_0) = 0$ nous donne

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} 1(ax^2 + bx + c)dx &= \left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx\right]_{-1}^{1} \\ &= 2a/3 + 2c \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc $a = -3c$. De même, la condition $(P_2, P_1) = 0$ nous fournit $b = 0$. Puisque nous ne fixons pas la norme de P_2, nous avons le choix d'un paramètre, en prenant $c = -1$, on trouve $a = 3$ et donc $P_2(x) = 3x^2 - 1$.

Nous pouvons continuer la procédure et trouver les autres polynômes, $P_3(x) = 5x^3 - 3x$ etc. J'insiste encore, tous ces polynômes sont définis à un coefficient multiplicatif près, que nous aurions pu fixer avec la condition $(P_i, P_i) = 1$. Souvent, le coefficient est choisi pour que $P_n(1) = 1$. Les polynômes de Legendre interviennent à beaucoup d'endroit en physique, par exemple dans les problèmes d'électrostatique en coordonnées sphérique, puisque

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r'^{\ell}}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos\gamma)$$

pour $r > r'$, ce qui permet de connaître l'influence d'une charge placé en $\mathbf{x}$ au point $\mathbf{x}'$.

Problème 6. Démontrer que les polynômes de Legendre que vous avez trouvés obéissent à l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

En réalité, c'est souvent pour cela que l'on cherche les polynômes orthogonaux : ils sont solution d'équations différentielles intéressante pour la physique. Vérifions cela seulement pour $P_2(x)$, pour les deux autres cette vérification est triviale.

$$\begin{aligned}P_2(x) &= 3x^2 - 1 \\ P_2'(x) &= 6x \\ P"_2(x) &= 6\end{aligned}$$

Nous avons

$$6(1 - x^2) - 2x(6x) + 2.3(3x^2 - 1) = 0$$

il suffit de développer les parenthèse.