TD2 : Les séries de Fourier

Décomposition en série de Fourier.

1. Décomposez les fonction $f(x) = x^2$ et $f(x) = \exp(x)$ sur l'intervalle $[0,1]$. Pour ce dernier, si le produit scalaire vous pose problème, noter que $\cos(x) = (e^{ix} + e^{-ix})/2$. Profiter de la décomposition de x^2 pour trouver la limite de $\sum 1/n^2$. C'était une des fierté d'Euler, dans les années 1730, que d'avoir pu déterminer cette somme.
2. Soit la fonction "palier" f sur $[0,1]$ tel que $f(x) = -1/2$ si $x < 1/2$ et $f(x) = 1/2$ si $x \geq 1/2$. Trouver sa décomposition en série de Fourier.
3. Même question que précédemment, mais la fonction f est définie par $f(x) = 0$ si $x < 1/2$ et $f(x) = 1$ si $x \geq 1/2$. En comparant ce résultat au résultat précédent, pouvez en tirer des conclusions générales ?
4. Décomposer la fonction triangle, $f(x) = 1 - 2|x|$ sur l'intervalle $[-1/2, 1/2]$.
5. Trouver la série de Fourier de $\sin(x/2)$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.
6. Soit la fonction trapèze sur $[-1,1]$. Cette fonction est paire, et $f(x) = 0$ si $0 \leq x < 0.5$, $f(x) = (x - 0.5)/s$ si $0.5 \leq x < 0.5 + s$ et $f(x) = 1$ si $0.5 + s \leq x < 1$. Noter que cette fonctions tend vers la fonction palier si $s \to 0$. Calculer la série de Fourier de cette fonction et discuter la limite $s \to 0$. Cela illustre le fait que plus les variations d'une fonctions sont rapide, plus ses composantes de grand n prennent de l'importance.
7. Quelle est la condition pour que la fonction x^α appartiennent à $\mathcal{L}_2[0,1]$. Démontrer alors que si elle n'appartient pas à $\mathcal{L}_2[0,1]$, elle ne peut pas se décomposer en série de Fourier. Pouvez vous généraliser ce résultat ?
8. Démontrer l'égalité de Parceval.
9. Qu'elle est la représentation matricielle de l'operateur $D = d/dx$ dans la base de Fourier ? est celui de $D^2 = d^2/dx^2$?
10. Représenter le spectre des fonctions décomposées plus hauts.

Les séries de Fourier complexes.

1. En vous inspirant du clacul des coefficient a_n et b_n, expliquer comment on calcule les coefficients c_n.
2. Démontrer que si $f(x) \in \mathbb{R}$, alors $c_{-n} = c_n^*$.
3. Trouver la relation entre a_n, b_n et c_n.
4. Énoncer la relation de Parceval avec les coefficients c_n.

Les séries de sinus et de cosinus.

1. Développer de façon analogue le développement en série de cosinus pur d'une fonction sur l'intervalle $[0,L]$ en considérant les fonction *paires* sur l'intervalle $[-L,L]$.
2. Démontrer que les fonction $\sin(n\pi x/L)$ sont orthogonales les unes aux autres sur l'intervalle $[0,L]$, et que l'on ne peut pas trouver une fonction $\cos(kx)$ qui soit orthogonale à toutes ces fonctions. Cela pourrait un peu plus nous convaincre de la complètude de cette suite.