TD5 : Les Transformées de Fourier

Exercices.

1. Démontrer la formule donnée pour la TF de $k\exp(-k|x|)$. Que devient cette transformée si $k \to +\infty$?
2. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $a^{-1}\Pi(x/a)$. Que devient cette transformée quand $a \to 0$?
3. Sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)dx = \sqrt{\pi}$, calculez la TF de $\exp(-x^2/2)$. Pour cela, notez que $x^2 + 2iqx = (x+iq)^2 + q^2$. Le résultat d'intégration reste valable si on parcours un axe parallèle à l'axe réel.
4. Calculez la TF de $a^{-1}\exp[-x^2/2a^2]$. Que devient cette transformée quand $a \to 0$?
5. Calculer la TF d'un "train d'onde", $f(x) = \Pi(x/a)\exp(ik_0x)$. k_0^{-1}est la période de l'onde et a son extension spatial. Discutez les divers limites.

Problèmes.

1. Démontrez que si $f \in \mathbb{R}$, alors $\tilde{f}(-q) = \tilde{f}^*(q)$.
2. Soit les deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$. Leur produit de convolution est une fonction $h(x)$ (notée $(f*g)(x)$)définie par
$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(x-s)ds$$
Montrez que (i) $f*g = g*f$; (ii) que les TF de ces trois fonctions obéissent à $\tilde{h}(q) = \tilde{f}(q).\tilde{g}(q)$
3. Calculez explicitement la fonction $\Lambda(x) = (\Pi * \Pi)(x)$ et vérifier la relation ci-dessus.
4. Calculez la convolution de la gaussienne $\exp(-x^2/2)$ par elle même, directement et par la TF.
5. De même, on définit la corrélation entre les deux fonctions f et g par
$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(s+x)ds$$
Démontrez alors que $\tilde{h}(q) = \tilde{f}(q).\tilde{g}^*(q)$
6. Démontrez la relation de dérivation pour la TF : $i\tilde{f}'(q) = \mathrm{TF}[xf(x)]$. En notant que pour $f(x) = \exp(-x^2/2a^2)$, nous avons
$$f'(x) = \frac{-1}{a^2}xf(x)$$
déduisez une équation différentielle pour $\tilde{f}(q)$ dont la solution vous donne la TF de la gaussiènne. Comparez à l'exercice 3.