TD6 : Les distributions.

1. Démontrer que la distribution $\delta(x)$ définie par $(1/2\pi)\int \exp(-ixq)dq$ est bien une distribution de Dirac, c'est à dire $\int \delta(x)f(x)dx = f(0)$.
   Help : Expliciter dans cette dernière intégrale la fonction δ, intervertissez alors l'ordre d'integration sur q et x. Utiliser finalement vos connaissances des Transformés de Fourier.
2. Que vallent $\delta'(x)$ et $\int \delta(x)$?
3. Calculer la Transformée de Fourier d'une exponentielle amortie, *i.e.* de la fonction $f(t) = H(t)\exp(-(\nu + i\omega_0)t$. En déduire la TF des fonctions $f(t) = H(t)\exp(-\nu t)\cos(\omega_0 t)$ et de $f(t) = H(t)\exp(-\nu t)\sin(\omega_0 t)$.
4. Calculer la reponse impulsionnelle d'un oscillateur amortie, *i.e.* résoudre l'équation
   $$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\nu\frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = f_0\delta(t)$$
   Help : Mettre le denominateur de la TF sous forme de produit de deux polynômes de premier degrès en ω. Ensuite, décomposer la TF en fraction simple, c'est à dire trouver comment l'écrire comme $A/(\omega-\alpha)+B/(\omega-\beta)$. Finalement, en vous inspirant de l'exercice 3, trouver la TF inverse de ces fonctions. Représenter graphiquement la solution.
5. Resolvez l'équation de la chaleur avec une source impulsionnelle :
   $$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q_0\delta(x)\delta(t)$$
   Nous supposons que pour $t < 0$, $u = 0$. La solution devrait être du genre $(1/\sqrt{t})\exp(-x^2/\alpha t)$.
   Help : Prenez la TF en fonction de la variable x. Vous aurez alors à résoudre une équation différentielle (ordinaire) de premier ordre du genre
   $$\frac{d\tilde{u}(q,t)}{dt} + \alpha\tilde{u}(q,t) = \delta(t)$$
   Remarquez que q dans cette équation peut être considéré comme une constante, et nous avons donc déjà résolu ce genre d'équation en cours. (ceci est la réponse d'un oscillateur super amorti à une force impulsionnelle). Une fois $\tilde{u}(q,t)$ obtenue, servez vous des résultats sur la TF d'une gaussienne pour obtenir $u(x,t)$.