TD7 : Se familiariser avec les distributions.

1. En étudiant l'action de la distribution $\delta(x)\cos(qx)$ sur une fonction quelquonque, en donner une forme plus simple.

2. Même question pour la distribution $\delta(x)\sin(qx)$ et $\delta'(x)\sin(qx)$.

3. En dérivant directement la fonction $y(t) = (f_0/\omega_0)H(t)\sin(\omega_0 t)$, démontrer qu'elle est la solution de l'équation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y = f_0\delta(t)$$

4. Démontrer que $tH(t)$ est la primitive de $H(t)$. En integrant par partie $tH(t)$, trouver sa primitive. Représenter graphiquement ces divers fonctions. Comment peut on généraliser ce résultat ?

5. L'élasticité des barres est donnée par l'équation

$$Bd^4y/dx^4 = F(x)$$

où $F(x)$ est la densité de force (force par unité de longueur) appliqué au point x et B une constante qui donne l'amplitude de la rigidité de la barre et qu'on appelle module de courbure. C'est par exemple cette équation qui donne la *flèche* d'un pont sous l'effet d'une charge. Nous souhaitons connaître la flèche d'un pont de longueur L sous l'effet du mouvement d'un camion à la position a dessus. Comme les dimensions du camion sont petit par rapport au pont, on le modélise par une distribution de dirac. En résolvant donc l'équation $y^{(4)} = f_0\delta(x-a)$ trouver la forme du pont. Nous utiliserons deux formes de conditions aux limites : (i) pont posé sur des pilliers, $y(0) = y(L) = 0$; $y"(0) = y"(L) = 0$ (figure 1.a ; (ii) pont ancré aux deux bouts $y(0) = y(L) = 0$; $y'(0) = y'(L) = 0$ (figure 1.b) . Calculer en particulier la flèche pour $a = 0$, $a = L/2$ et $a = L$. Pour quelle valeur de a la flèche est maximum ?

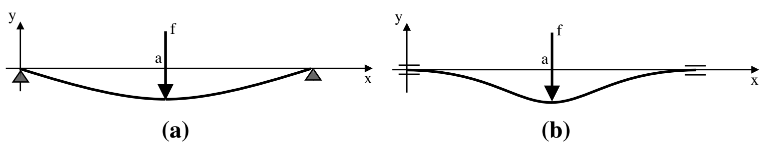

FIG. 1 – la flèche d'un pont sous l'effet d'une force ponctuelle.