Les transformées de Laplace.

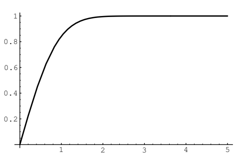
1. En utilisant la décomposition en fractions rationnelles simples, trouver l'originale des fonctions suivantes : $1/(s^2+a^2)$, $s/(s^2+a^2)$, $1/(s^2-a^2)$, $s/(s^2-a^2)$, $1/(s^2+a^2)^2$

2. Calculer la TL de $1/\sqrt{t}$. En utilisant les règles de dérivation et d'intégration des TL, trouver l'image de $\sqrt{t}$.

3. Démontrer que l'image de la fonction escalier $E(t)=\sum_{n=0}H(t-n)$ est $1/s(1-\exp(-s))$.

4. Soit la fonction $\phi(t)$ (d'image $\tilde{\phi}(s)$), nulle en dehors d'un intervalle $[0,a]$. Soit la fonction $\Phi(t)$ la répétition a-périodique de ϕ dans le temps, c'est à dire $\Phi(t)=\sum_{n=0}\phi(t-na)$. Démontrer que la TL de Φ est
$$\tilde{\Phi}(s)=\phi(s)/(1-\exp(-ks))$$

5. Les fonctions de Bessel jouent un rôle très important en physique mathématique. L'une d'elle est définie par
$$I_0(z)=(1/2\pi)\int_0^{2\pi}e^{z\cos\theta}d\theta$$
Démontrer que sa T.L. est
$$\tilde{I}_0(s)=\frac{1}{\sqrt{s^2-1}}$$
Help : Pour Calculer des $\int R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$, on a interêt à effectuer le changement de variable $u=\tan(\theta/2)$.



6. La fonction d'erreur est définie par $\mathrm{erf}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-u^2}du$. Démontrer que la TL de la $\exp(-t^2)$ est $(\sqrt{\pi}/2)\exp(s^2/4)(1-\mathrm{erf}(s/2)$

7. Résoudre $\ddot{x}+\omega^2x=b\sin(\omega t)$. Notez que c'est l'équation d'un oscillateur harmonique à la résonnance.

8. Résoudre $x^{(3)}+3\ddot{x}+3\dot{x}+x=1$ avec les conditions initiales nulles.

9. Résoudre $x^{(4)}+2\ddot{x}+x=\sin t$ avec les conditions initiales nulles.

10. Le mouvement d'une particule dans un champs magnétique peut être ramené à la résolution du système suivant :
$$\dot{x}=\alpha y\ ;\ \dot{y}=-\beta x$$
où x,y sont les composantes du vecteur vitesse et αune constante proportionnelle au champs magnétique et à la charge de la particule. Les conditions initiales sont à $t=0$, $x=x_0;y=y_0$. Résoudre ce système à l'aide des transformées de Laplace.

11. Resoudre
$$\begin{aligned}\ddot{x}-x+y+z &= 0\\ x+\ddot{y}-y+z &= 0\\ x+y+\ddot{z}-z &= 0\end{aligned}$$
avec les conditions initiales $x(0)=1$ et $y(0)=z(0)=\dot{y}(0)=\dot{z}(0)=0$.
Sol. : $x(t)=(2/3)\cosh(t\sqrt{2})+(1/3)\cos t$; $y(t)=z(t)=-(1/3)\cosh(t\sqrt{2})+(1/3)\cos t$.