TD9b : TL et fonctions spéciales.

Les intégrales de Fresnel.

Les deux fonctions suivantes, appelées des intégrales de Fresnel, sont très largement utilisées dans la théorie de la diffraction de lumière :

$$C(t) = \int_0^t \frac{\cos(\tau)}{\sqrt{2\pi\tau}} d\tau \;;\; S(t) = \int_0^t \frac{\sin(\tau)}{\sqrt{2\pi\tau}} d\tau \;.$$

1. Trouvez les transformées de Laplace de ces fonctions.

Help : vous connaissez déjà la T.L. de la fonction $1/\sqrt{t}$. Vous connaissez également l'effet de la multiplication de l'originale par une exponentielle ou de son intégration sur la fonction image.

2. En utilisant les résultats de la question précédente, trouver la forme asymptotique de ces fonctions quand $t \to \infty$.

L'équation de Bessel.

Nous avons déjà rencontré la fonction de Bessel $J_0(t) = (1/2\pi)\int_0^{2\pi} \exp(it\cos\theta)d\theta$ dont la transformée de Laplace est $\tilde{J_0}(s) = 1/\sqrt{s^2+1}$. Vérifiez que $J_0(t)$ est la solution de l'équation différentielle (dite de Bessel)

$$t\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + tx(t) = 0 \tag{1}$$

avec la condition initiale $x(0) = 1$ et $\dot{x}(0) = 0$. Pour cela, il faut prendre la T.L. de l'équation (1) en utilisant les règles de manipulation des TL (notamment celles sur les dérivées et les multiplication par t) et de vérifier que $\tilde{J_0}(s)$ est bien solution de l'expression que vous trouvez.

Les polynômes de Laguerre.

Les polynômes de Laguerre $L_n(t)$ appartiennent à la famille des polynômes orthogonaux et apparaissent par exemple lors de la résolution de l'équation de Schrodinger pour l'atome d'hydrogène (cf votre cours de MQ de deuxième semestre). $L_n(t)$, le polynôme de Laguerre d'ordre n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) obéit à l'équation différentielle

$$t\frac{d^2L_n}{dt^2} + (1-t)\frac{dL_n}{dt} + nL_n = 0$$

avec les conditions initiales $L_n(0) = 1$; $\dot{L}_n(0) = -n$.

1. En utilisant les règles de manipulation des transformées de Laplace, démontrer que $\tilde{L}_n(s) = \mathrm{TL}[L_n(t)]$ obéit à l'équation

$$s(1-s)\frac{d\tilde{L}_n(s)}{ds} + (n+1-s)\tilde{L}_n(s) = 0 \tag{2}$$

2. En écrivant l'équation (2) sous forme de

$$\frac{d\tilde{L}_n}{\tilde{L}_n} = \frac{P(s)}{Q(s)}ds \;;$$

en décomposant le quotient rationnel en fraction simple ; enfin en intégrant les deux cotés de l'égalité (on suppose que la constante d'intégration est nulle), démontrer que

$$\tilde{L}_n(s) = \frac{(s-1)^n}{s^{n+1}} \tag{3}$$

Admettez ce résultat si vous n'y arrivez pas et continuez.

3. En utilisant l'expression (3), trouvez les originaux $L_0(t)$, $L_1(t)$ et $L_2(t)$. Représenter les trois sur le même graphe.

4. Trouvez le développement asymptotique de $L_n(t)$.

5. Relation de récurrence. Démontrer que

$$\int_0^t L_n(\tau)d\tau = L_n(t) - L_{n+1}(t)$$

[**Help** : utiliser les règles de manipulations des TL].

6.Formules de Rodriguez. En notant que

$$\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}} = \frac{1}{n!}(s-1)^n\left[(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s}\right)\right]$$

Démontrer la formule de Rodriguez

$$L_n(t) = \frac{1}{n!}e^t\frac{d^n}{dt^n}\left[t^ne^{-t}\right]$$