Grenoble Universités
Département de Physique.

Cours de mathématiques artisanales.

Bahram Houchmandzadeh

http://houchmandzadeh.net/cours/Math_Art/MathArt.html

Première Version : 12 juin 2011

Présente Version : November 28, 2013

Table des matières

1. Introduction.

La motivation de ce cours m'a été fournie par les cours de mathématiques supérieures que j'enseignais [1] au niveau L3-M1. Lors des examens, sur environ un tiers des copies, je constatais des erreurs de compréhension fondamentales des mathématiques de base (niveau L1-L2). Les notions aussi élémentaires que dérivée, intégrales, changement de variable, ... n'avaient pas du tout été assimilées. Les étudiants avaient appris des méthodes abstraites, avaient acquis des automatismes, mais manquaient le sens même de ce que l'on faisait. Une équation différentielle par exemple est un objet mystérieux dont on connaît (mal) la recette quand elle est linéaire et de premier (et éventuellement de second) degrés, mais une équation légèrement différente plonge l'étudiant dans l'angoisse de ne pas connaître la recette. Très peu réalisent qu'une équation différentielle est une relation entre la pente et la valeur de la fonction en un point et qu'on peut décrire qualitativement la solution, sans recours à aucune recette, à l'aide d'une construction graphique. L'intégrale et le changement de variable à l'intérieure sont d'autres automatismes mal acquis et sur les copies, on peut constater des fonctions qui sortent de l'intégrale, des bornes qui prennent des valeurs bizarres ,... parce que beaucoup ne savent pas le sens concret d'une intégrale, bien qu'ayant appris des automatismes pour en calculer certaines.

La litanie du professeur corrigeant les copies peut continuer longtemps [2]. Ceci dit, énormément de ces étudiants sont ce que je qualifierait d"'honnêtes" gens : ils sont travailleurs, conscient de leur faiblesse et de leurs manque des concepts de base. Les mathématiques de L1-L2 leurs ont été enseigné sous une forme si abstraite qu'ils en ont fait un blocage et cela les handicape dans leurs progressions.

Il n'y a pas une façon d'enseigner les mathématiques, mais des centaines. Notre publique, et sa façon d'apprendre, est incroyablement diverse : certains ont une vision géométrique, d'autres sont portés sur les représentations algébriques ; certains ont besoin du concret et de l'utilité de ce qu'ils apprennent tandis que d'autres se délectent dans l'abstraction totale. Pour certains,

1. http ://houchmanddzadeh.net/cours/Math/math.htm
2. J'impute souvent ma calvitie à la correction des copies

les démonstrations sont des encouragements à la sieste, tandis que d'autres refusent d'avancer si la rigueur d'une ligne n'est pas suffisante à leurs yeux.

Malheureusement, l'enseignement des mathématiques au niveau L1-L2 s'est standardisé autour des concepts de Bourbaki : Les mathématiques sont une cathédrale dont la beauté doit être appréciée à l'aune des outils abstraits. Cette enseignement, prodigué par des enseignant-chercheur en mathématiques qui souvent ignorent l'usage qu'on en fait dans la vie réelle, convient, selon mes estimations à environ un quart des étudiants. Pour le reste, les mathématiques deviennent un sujet rébarbatif où il faut obtenir la moyenne pour passer au niveau d'après ; de leurs cotés, les professeurs, pressés par le ministère d'avoir des taux de réussite honorable, baissent la garde et distribuent un peu trop généreusement les notes.

Ce cours s'adresse à ces d'étudiants qui se retrouvent en L3-M1, qui savent qu'ils ont des blocages et qui voudraient y pallier. Ce cours est une sorte de retour aux sources quand les mathématiques pratiquées par les pères fondateurs comme Euler, les Bernouilli, Hopital, ... avaient un caractère artisanal et très concret, quand une dérivée était vraiment la division de deux petites quantités et non une application linéaire appartenant à l'espace tangent. L'accent ici est mis sur les concepts sans trop de justification [3] et surtout surtout, sur une accoutumance artisanale avec les concepts : C'est un cours qui nécessite une grande consommation de papier millimétré. Mon but est de donner le même sens concret aux objets mathématiques qu'un tourneur-fraiseur possède de l'objet qu'il est en train d'usiner (et j'espère le même plaisir).

3. Comme disait Hilbert, ce n'est pas la différence entrel l'intégrale de Lebesgues et Riemann qui fera voler un avion.

2. Qu'est ce qu'une fonction.

Pour l'homme de terrain, une fonction est un tableau de mesure : on peut mesurer par exemple le courant dans un circuit au cours du temps ou quand on varie la tension ; la position d'un objet en chute libre à chaque seconde ; l'intensité de la lumière diffracté par un réseau tombant sur le pixel numéro i du détecteur,... Le tableau (2.1) par exemple est la mesure de la position mesuré en mètre d'un mobile en chute libre sur un plan incliné en fonction du temps mesuré en seconde.

t	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
I	0	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25	0.36	0.49	0.64	0.81	1

TABLE 2.1.: la position d'un mobile en chute libre à chaque temps.

C'est l'expérience primordial de Galilée pour l'établissement de la chute des corps. Pour nous, une fonction est dorénavant exactement ceci : un tableau avec deux lignes et N colonnes (ou deux colonnes et N lignes, selon votre goût).

Dans le tableau (2.1), la mesure est faite toute les 0.1 s. On dit qu'on échantillonne la position tout les 0.1s. Notre appareil de mesure peut faire beaucoup mieux, par exemple échantillonner tous les 0.05s.

t	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
I	0	0.0025	0.01	0.0225	0.04	0.0625	0.09	0.1225	0.16	0.2025	0.25
t	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	1
I	0	0.0025	0.01	0.0225	0.04	0.0625	0.09	0.1225	0.16	0.2025	0.25

TABLE 2.2.: même mesure que le tableau précédent, mais échantillonné deux fois plus. Le grand nombre d'éléments nous oblige à présenter le tableau sur quatre ligne.

En faite, comme nous sommes en train de faire des mathématiques, nous allons supposer que nous avons à notre disposition un appareil parfait qui peut échantillonner aussi finement que l'on souhaite [1]. C'est une abstraction très utile. Par contre, l'ennui d'échantillonner très fin est, comme nous le voyons, la place prise dans la page.

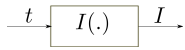

FIGURE 2.1.:

Nous pouvons cependant stocker le résultat de la mesure dans une base de donnée, et quand nous en avons besoin, questionner l'ordinateur : quelle est la position au temps $t = 0.52$? L'ordinateur trouve dans sa base la colonne correspond à $t = 0.52$, lit la deuxième lignes de cette colonne et répond $I = 0.2704$. Ceci est une deuxième façon d'imaginer une fonction : une boite noire, qui à une question numérique précise, donne une réponse numérique précise en consultant le tableaux correspondant.

Le point sur lequel nous n'insistons jamais assez est le suivant : une fonction est la totalité du tableau ou de la boite noire. Une certaine confusion règne dans les notations mathématiques. Quand nous disons $I(t)$, en général nous entendons la valeur de I correspondant au temps t donné. Donc $I(t)$ est un nombre, la réponse de la boite noire à la question t. Nous désignons la *fonction* par la notation $I(.)$, la réponse à une question quelconque [2]. Nous essayerons de respecter cette convention au début de ce cours. Cependant, parfois, ou très souvent, on se laisse aller et on écrit $I(t)$ pour désigner la fonction : dans ce cas, t ne désigne pas une valeur particulière, mais la totalité de la première ligne du tableau. Nous comptons sur le lecteur alors pour faire la distinction entre la fonction et la valeur en un point.

Fonctions et règles. Comme vous vous en rendez compte, le nombre de fonctions est infini, un très grand infini : en effet, en face de *chaque* élément de la première ligne, vous pouvez mettre une infinité (de la taille de l'ensemble $\mathbb{R}$) de nombres. Comme le nombre d'éléments sur la première ligne est (dans l'abstraction mathématiques que nous étudions ici) également infini (encore de la taille de l'ensemble $\mathbb{R}$), nous voyons que le nombre de possibilité est vraiment très grand [3]. Il est évident que les humains n'ont pas la capacité de gérer de telles quantités. Par contre, pour un très petit nombre

1. Évidemment, la vie réelle est plus difficile : l'échantillonnage n'est pas toujours aussi fin que l'on veut et l'appareil fait des erreurs de mesure. Pour gérer ces problèmes là, d'autre branche des mathématiques ont évolué, comme les convolutions, le calcul des probabilités et des processus stochastiques.

2. En informatique, on parle d'une variable pas encore instanciée. Les logiciens ont élaboré une notation très précise, appelé $\lambda-$notation, pour distinguer une fonction et la valeur de la fonction en un point. Cette notation est malheureusement trop lourd à manier pour notre cours.

3. voir un petit texte sur la classification des infinis sur http ://houchmandzadeh.net/cours/Transfini/transfini.htm

de fonctions, on peut, au lieu d'utiliser un tableau, utiliser une règle simple. Par exemple, étant donné la première ligne, construire la deuxième en multipliant la première par 2, ou en prenant son carré, ou son cube, ou encore en prenant son carré et y ajouter deux fois son cube. Dans ce cas, tout le tableau de cette fonction peut être énoncé avec juste cette règle. Voilà exactement ce que nous disons en écrivant

$$f(x) = 2x + 4x^3 - 11x^{101}$$

Cette règle simple, s'écrivant à l'aide d'une dizaine de symbole, représente fidèlement le tableau de cette fonction particulière. Les règles que l'on peut obtenir à l'aide de combinaisons finies des opérations de multiplication, puissance, addition et soustraction constituent un petit ensemble de fonctions précieuses, puisque résumable en peu de symboles : nous les appelons les *polynômes*. Ce sont les seules fonctions que l'on puisse connaître réellement, c'est à dire que pour une entrée x quelconque, on peut obtenir la valeur exacte correspondant à cette entrée au bout d'un temps *fini*. Le lecteur connaît sans doute beaucoup plus de fonction-règle, comme $\sqrt{x}$, e^x, $\log x$ ou ${}_2F_1(a,b;c;x)$. En réalité cependant, on ne peut connaître ces fonctions que par leurs approximations par les polynômes. Il n'est pas possible, en un temps fini, de calculer la valeur exacte de $e^{2.4}$. Ceci dit, comme ce sont des fonctions qui apparaissent souvent dans nos calculs, nous acceptons ces symboles comme règles.

Fonction inverse. Remarquez qu'il n'y a aucune raison de consulter le tableau par la première ligne. En ce qui nous concerne, les deux lignes jouent strictement le même rôle, et nous pouvons demander à notre boite noire : à quel temps le mobile atteint la position 0.49 ? la boite noire consulte la deuxième ligne et trouve la colonne où $I = 0.49$, retrouve la valeur correspondant à la première ligne et répond $t = 0.7$. Bien que dans les deux cas, nous manipulons exactement le même tableau, il est courant d'appeler la première façon de consulter le tableau la fonction $I(t)$, et la deuxième façon la fonction inverse $t(I)$. Nous ne compliquerons pas plus ici les choses, mais le lecteur intéressé peut jeter un coup d'oeil sur l'appendice "fonctions multi-valuées".

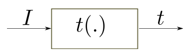

FIGURE 2.2.:

Le graphe d'une fonction. Résumons : une fonction est un tableau à deux lignes. Ceci dit, les humains, ayant évolué dans la savane il y a quelques centaines de millier d'années, n'ont pas développé un cerveau apte à regarder

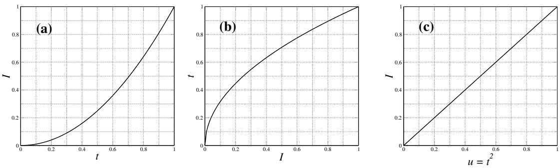

FIGURE 2.3.: La figure correspondant à la fonction (a)$I(t)$ et (b) la fonction inverse $t(I)$. (c) la figure correspondant à la changement de variable $u = t^2$ et $I(u)$.

les tableaux de chiffre et il est très difficile pour eux de saisir la différence entre deux tableaux d'un seul coup d'œil. Par contre, le cerveau analogique des humains est très bon pour distinguer les formes : on reconnaît un visage ami parmi des centaines en une fraction de seconde. Au 17ème siècle, un scientifique (René Descartes) a trouvé un moyen très astucieux de présenter une fonction sous forme de graphe que le lecteur connaît certainement : la figure 2.3 représente la fonction ci-dessus.

La notion de la graphe d'une fonction nous est si familier que nous identifions souvent la fonction et son graphe. Nous disons par exemple que la fonction $f(t) = at$ est linéaire, en partie parce que son graphe est en effet une ligne.

Il ne faut cependant pas oublier que le graphe est juste une représentation de la fonction, au même titre que le tableau. Pour "tracer" une fonction, nous échantillonnons comme toujours l'intervalle d'intérêt, et pour point t_n, nous créons un point $(t_n, f(t_n))$ dans l'espace bidimensionnel. Si nous avons échantillonné suffisamment fin, la courbe ainsi créée nous paraît continue. En général, pour renforcer l'illusion du continu, nous relions ces points par des "lignes".

Pour représenter fidèlement une fonction, il faut échantillonner fin là où la fonction varie rapidement, et moins quand la fonction varie lentement. [4]

L'intérêt de la représentation graphique des fonctions est multiple. On peut par exemple nous servir de nos intuitions géométriques pour imager certains concepts. Ainsi, la dérivée et la "tangente" sont reliés, de même que l'intégrale et "l'aire sous la fonction". Il ne faut pas oublier que les pères fondateurs étaient d'abord des géomètres et que l'outil géométrique leur était aussi naturel que ... l'air.

4. Il existe un théorème fameux démontré par Shanon qui donne le taux d'échantillonnage minimum qui reste fidèle à la fonction. Nous avons besoins de connaître les séries de Fourier avant de pouvoir énoncer ce théorème.

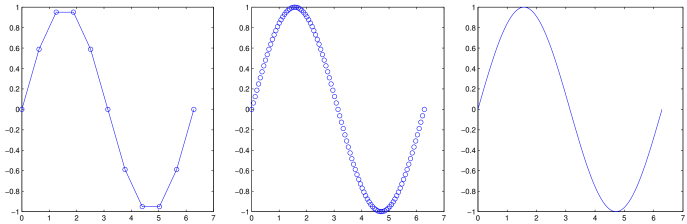

FIGURE 2.4.: Le graphe de la fonction $\sin(t)$ pour $t \in [0, 2\pi[$ avec différent échantillonnage. Figure de gauche : $dt = \pi/5$, les points et les lignes qui les rejoignent sont représentés. Centre : $dt = \pi/50$, seul les points sont représentés. Droite : $dt = \pi/50$, les points ne sont pas représentés, mais les lignes qui les rejoignent.

Changement de variable ou de fonction. Le cerveau humain a évolué pour distinguer des formes ; parmi les formes, certaines sont détectées de façon encore plus efficace et la forme la mieux détectée est la ligne droite. On a du mal en regardant un morceau de courbe de distinguer un hyperbole d'un parabole, mais on peut très efficacement dire si une courbe est une droite ou non. Mettons nous à la place de Galilée, et supposons que nous voulons découvrir la loi de la chute des corps. Deux théories s'affrontent : (i) la position est proportionnelle au carré du temps ; (ii) la position est proportionnelle à la puissance troisième du temps. Pour vérifier cela, nous reprenons notre tableau et en dessous de la ligne correspondant à t, nous construisons une nouvelle ligne (appelons la u) correspondant au carré du temps.

t	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$u = t^2$	0	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25	0.36	0.49	0.64	0.81	1
I	0	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25	0.36	0.49	0.64	0.81	1

TABLE 2.3.: changement de variable $u = t^2$

On trace ensuite la courbe $I(u)$, et nous pouvons vérifier d'un seul coup d'oeil qu' effectivement, cette courbe est bien une droite (Figure 2.3c). Par conséquent, la chute des corps se passe bien selon le carré du temps. Remarquer que nous aurions pu tout aussi bien construire une nouvelle ligne $H = \sqrt{I}$, et tracer la courbe $H(t)$ pour arriver au même résultat. En général,

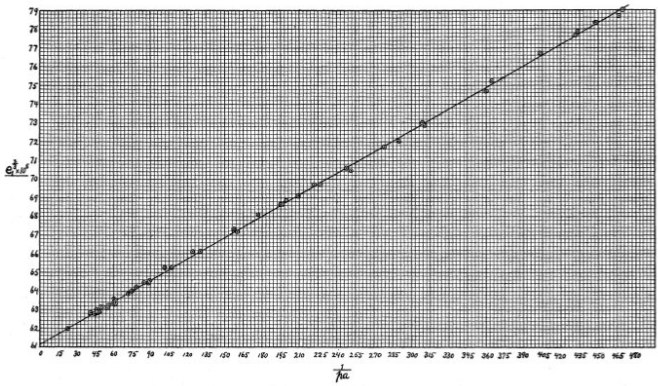

Fig. 2.

FIGURE 2.5.: détermination de la constante A de l'expérience de Milikan. Phys. Rev, **2** :109 (1913)

quand on change la première ligne, on appelle cela changement de variable, ou changement de la variable indépendante ; quand on change la deuxième ligne, on appelle ça changement de la variable dépendante, ou changement de fonction. En réalité, très souvent, on procède aux deux opération en même temps.

Les changements de variables constituent une des méthodes les plus répandues pour analyser nos données. Un exemple de changement de variable (parmi des milliards) est l'expérience de Milikan de 1913 pour déterminer la charge de l'électron. C'est une des très belle expérience de la physique où en mesurant la chute des petites gouttes d'huile dans le champs de gravité et d'un potentiel électrique, Milikan pour la première fois a donné la charge (presque) exacte de l'électron. Pour cette expérience, Milikan suppose que la vitesse de chute de la goutte d'huile dépend de sa taille a. Cette une des hypothèses cruciales de l'expérience ; si cela était vrai, dans ces expériences, une quantité appelé e_1 (relié à la charge de l'électron) pour une goutte doit être proportionnelle à l'inverse de la taille de la goutte, via une puissance 2/3. Il a donc tracé $e_1^{2/3}$ en fonction de $1/a$, et comme nous pouvons le constater sur la figure 2.5, cela confirme magnifiquement sa théorie.

En résumé, toutes les mathématiques que nous allons développer doivent pouvoir prendre en compte les changements de variables et de fonctions. Nous allons revenir longuement là dessus.

Fonctions de plusieurs variables.

3. Concept de dérivée.

3.1. La dérivée première.

Reprenons notre concept de fonction comme un tableau à deux lignes, nous continuons d'appeler la première ligne t et la deuxième I. Nous pouvons, en partant de ces lignes, en construire d'autres. Souvent en regardant un tableau, ce qui nous intéresse n'est pas tellement les valeurs dans une colonne, mais combien ces valeurs varient quand on passe d'une colonne à une autre ; autrement dit, quelle est l'incrément. A partir de la ligne t, nous pouvons construire une nouvelle ligne que nous appelons dt (pour différentiel t) en effectuant l'opération suivante : la $n-$ième colonne de la ligne dt est constitué par la différence entre la $n+1-$ème et la $n-$ième colonne de la ligne t :

$$dt_n = t_{n+1} - t_n$$

on peut imaginer cela vectoriellement : on copie la ligne t et on la met sous la ligne originale, on le translate d'une case vers la gauche, on effectue la différence entre les deux lignes (l'original et la translaté) et on appelle dt la nouvelle ligne (voire figure 3.1) . On fait exactement la même chose avec la ligne I pour créer la ligne dI.

Ces opérations sont facile, mais nous posent plusieurs problèmes. Premièrement, les lignes dt et dI dépendent fortement de notre échantillonnage. Si nous avions échantillonné notre signal tous les 1s par exemple, la ligne dt sera rempli de chiffre 1, tandis que si nous avions échantillonné tous les 0.1

t		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$t_{\leftarrow}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	
$dt = t_{\leftarrow} - t$		0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	

FIGURE 3.1.: l'obtention de dt à partir de t en dupliquant la ligne t, la translatant d'une case vers la gauche pour obtenir $t_{\leftarrow}$, et en soustrayant les deux lignes.

seconde, la ligne dt serait rempli du chiffre 0.1. Il se trouve que les humains, pour gérer le monde autour d'eux ne travaillent qu'avec un petit nombre de fonctions qu'ils appellent dérivable. Pour ces fonctions, si on forme une nouvelle ligne $\tilde{I}'$ par le *rapport* entre les deux lignes dI et dt,

$$\tilde{I}' = dI/dt$$

alors cette ligne ne dépend pas trop de l'échantillonnage. Plus exactement, nous pouvons écrire la ligne $\tilde{I}'$ comme la somme de deux lignes, dont une est proportionnelle à l'échantillonnage

$$\tilde{I}' = I' + A.dt$$

Si nous effectuons un échantillonnage très fin, la deuxième partie tend vers zéro [1]. La première partie, qui ne dépend pas de l'échantillonnage est appelé la dérivée de la fonction $I(t)$ et on note

$$I' = dI/dt$$

où l'on suppose que l'échantillonnage est infiniment fin.

L'ensemble des fonctions dérivables que nous avons défini (connu sous le nom de l'ensemble $\mathcal{C}_1$) est un peu trop petit. Nous pouvons travailler avec des fonctions qui sont presque dérivable, c'est à dire qu'ils peuvent ne pas être dérivable en un petit nombre de point.

Exercice. Considérer la fonction $f(x) = 1$ si $x > 1$ et $f(x) = 0$ sinon. En utilisant un échantillonage qui comprend le point $x = 0$, démontrer que cette fonction n'est pas dérivable au point $x = 0$. De même pour la fonction $g(x) = 2x$ si $x > 1$ et $g(x) = x$ sinon.

Pertes de points. Le deuxième problème qui se pose à nous, si on regarde bien le tableau de la figure 3.1, est que le tableau des dérivées *possède un point de moins* que le tableau du signal original : l'opération de translation vers la gauche nous gâche une colonne du tableau. Si nous avions énuméré les colonnes du tableau original de 0 à N, nous voyons que le tableau des dérivées possède les colonnes allant de 0 à $N-1$. On peut se dire à priori que cela ne porte pas à conséquence : notre tableau a tellement de colonne qu'une de plus ou de moins ne doit pas être si important. Et pourtant si !

1. A priori, la ligne A dépend de l'échantillonnage. Cependant, pour une fonction dérivable, nous pouvons majorer la ligne A par une ligne constante C ($|A|<|C|$) qui elle ne dépend pas de l'échantillonnage.

Le problème se pose quand nous étudierons les équations différentielles (par exemple $y' + ay = 0$). Dans ce cas, la ligne y' à une colonne de moins que la ligne y et l'équation n'est pas équilibrée. Nous verrons alors que pour pouvoir équilibrer une telle équation, nous avons besoin d'y ajouter des conditions initiales (ce qui revient à raccourcir d'autant la ligne y). Nous reviendrons longuement là-dessus quand nous traiterons les équations différentielles.

Sens de la translation. Nous avons construit la ligne dt et dI en translatant vers la gauche le dupliqua de ses lignes et en effectuant la soustraction : $dt = t_{\leftarrow} - t$; autrement dit, la colonne n de dt était défini par $dt_n = t_{n+1} - t_n$. Il n'y a à priori aucune raison de préférer les translations gauche, nous pourrions procéder par des translation droite :

$$dt_n = t_n - t_{n-1}$$

ou encore, écrit de façon vectoriel, $dt = t - t_{\rightarrow}$. Nous pouvons procéder exactement comme précédemment et obtenir une nouvelle ligne $\tilde{I}'$ en formant le nouveau ratio dI/dt. De nouveau, de ce ratio (si la fonction est dérivable) nous pouvons tirer une partie qui ne dépend pas de l'échantillonnage que nous appelons encore I'. En réalité, une fonction est dérivable que si les deux translations donne exactement le même résultat I'. Comme précédemment, nous travaillerons avec des fonctions qui sont dérivable presque partout. Noter que par des translation à droite, nous perdons toujours un points, mais cette fois, c'est la colonne 0.

Exercice. Démontrer que les deux fonctions de l'exercice précédent sont dérivable par les translations à droite au point $x = 0$.

Note. Nous allons voire plus tard comment on construit la solution des équations différentielles numériquement. En mathématique, l'échantillonnage peut-être aussi fin que l'on veut. En pratique, le numéricien veut obtenir une bonne solution (exemple : le missile atteint bien son objectif, à plus ou moins 1 mètre). Il doit donc prendre un échantillonnage suffisamment fin pour obtenir cette solution mais pas trop fin pour que ses temps de calculs n'explosent pas. Il se trouve que dans ce cas, il y a une réelle différence dans l'efficacité des calculs selon le sens de translation que l'on prend. On appelle cela les schéma explicite et implicite, nous y viendront plus tard.

Construction explicite de la fonction dérivée. Pour certaines fonctions que nous pouvons manipuler à l'aide des règles (comme les polynômes, la fonction exponentielle, ...), nous pouvons parfois déduire également des règles pour la fonction dérivée. [To develop].

3.2. La dérivée seconde.

Nous pouvons continuer notre construction. Considérons comme toujours notre tableau à deux lignes t et I. A partir de maintenant, pour ne pas trop alourdir les calculs, nous allons faire l'hypothèse suivante : l'échantillonnage de la première ligne est régulière, c'est à dire que la ligne dt est rempli de la même valeur à toute ses colonnes. Cette hypothèse se fait sans perte de généralité.

Reprenons une de nos translations (gauche ou droite, cela n'a aucune importance), et construisons les deux lignes dt et dI et la ligne I'. Nous pouvons maintenant considérer le tableau à deux ligne (t, I'), ou autrement dit la fonction $I'(t)$. Rien ne nous empêche[2] de procéder exactement comme avant et de construire les lignes dt, dI' et la nouvelle ligne $I'' = dI'/dt$.

Que vaut I'' par rapport à la ligne I ? En utilisant la définition de I', et en notant que la ligne dt est une constante, nous avons

$$I'' = \frac{d(dI/dt)}{dt} = \frac{\frac{d(dI)}{dt}}{dt} = \frac{d(dI)}{(dt)^2}$$

Le sens du dénominateur ne fait aucun doute : c'est la ligne dt élevé au carré. Le numérateur est l'opérateur d appliqué à la ligne dI, ce qui revient à appliquer deux fois l'opérateur d à la ligne I, c'est pourquoi on le note d^2I. Regardons plus précisément cet élément :

$$\begin{aligned} d(dI) &= d(I_{\leftarrow} - I) \\ &= (I_{\leftarrow} - I)_{\leftarrow} - (I_{\leftarrow} - I) \\ &= I_{\leftarrow\leftarrow} - I_{\leftarrow} - I_{\leftarrow} + I \\ &= I_{\leftarrow\leftarrow} - 2I_{\leftarrow} + I \end{aligned}$$

Cela veut dire que de la ligne I, nous construisons deux duplicata, on translate une de deux colonnes, l'autre d'une colonne, on somme la première et la troisième ligne et on retranche deux fois la deuxième. Nous avons pris ici des translations gauche, nous aurions pu prendre des translations droites ; ou mieux encore pour être encore plus symétrique, nous pouvons prendre

2. Si la fonction I' est dérivable bien sûr

une translation gauche et une translation droite pour compenser mieux les erreurs d'échantillonnage :

$$\begin{aligned} d_+(d_-I) &= d_+(I_\leftarrow - I) \\ &= (I_\leftarrow - I) - (I_\leftarrow - I)_\rightarrow \\ &= I_\leftarrow - I - I + I_\rightarrow \\ &= I_\leftarrow - 2I + I_\rightarrow \end{aligned}$$

Exercice. Montrer sur un tableau (comme la figure 3.1) la construction ci-dessus.

Pour voir encore plus claire, nous pouvons regarder plus en détaille certains éléments d'un tableau :

I	...	I_{n-1}	I_n	I_{n+1}	...
d_-I	...	$I_n - I_{n-1}$	$I_{n+1} - I_n$	$I_{n+2} - I_{n+1}$	...
$d^2I = d_+(d_-I)$	...	...	$(I_{n+1} - I_n) - (I_n - I_{n-1})$	...	...

Nous pouvons résumer ce tableau en écrivant

$$I''_n = \frac{I_{n+1} - 2I_n + I_{n-1}}{(dt)^2}$$

N'oublions pas que les problèmes d'échantillonnage continuent d'intervenir, mais quand l'échantillonnage devient très fin, nous tendons vers une ligne indépendante de l'échantillonnage.

Note. Remarquer que pour les dérivées secondes, nous perdons deux points dans le tableaux ; les équations différentielles de second ordre doivent donc comporter deux conditions initiales pour être soluble.

On peut bien sûr donner un sens à la dérivée $n-$ième, en continuant ce procédé.

3.3. Calcul pratique de quelques dérivée.

Tout ce que nous avons dit plus haut ne serait pas très pratique si nous ne savions pas concrètement calculer quelques dérivées. Comme nous l'avons dit, l'espace des fonctions est (très très) vaste. Les humains utilisent, pour quelques fonctions en particulier, des règles de calcul, qui les libèrent de manipulation de tableau. Ces fonctions sont les polynômes et leur inverse. Une autre fonction est particulièrement importante, la fonction exponentielle (et son inverse). Cette dernière ne pas pas être construit exactement, mais elle est tellement utile et tellement étudiée que nous la connaissons pratiquement aussi bien que les polynômes. On peut combiner ces fonctions pour en construire d'autres, par exemple $\sqrt{t}\exp(-2t)$ ou $\exp(-x^2/4)$, ...

Pour ses quelques fonctions, nous pouvons également donner l'expression de leurs dérivée par des règles.

Soit par exemple la fonction carré $I(t) = t^2$. Échantillonnons cette fonction comme il se doit par pas de dt et calculons la la dérivée au $n-$ème point d'échantillonnage t_n.

$$\begin{aligned} \left.\frac{dI}{dt}\right|_{t_n} &= \frac{t_{n+1}^2 - t_n^2}{t_{n+1} - t_n} \\ & t_{n+1} + t_n \\ &= 2t_n + dt \end{aligned}$$

Si le pas d'échantillonnage est très fin, nous ne commettons pas une grande erreur en écrivant $I'(t_n) = 2t_n$. Comme en général on consulte le tableau par la valeur au temps t et non pas par son numéro d'échantillonnage, nous avons $I'(t) = 2t$. Voilà, nous connaissions la règle de la fonction $I(t)$, nous avons déduit la règle pour la fonction $I'(t)$.

Exercice. Montrer que si $I(t) = t^n$, alors $I'(n) = nt^{n-1}$

L'opération "dérivation" est linéaire : Si nous avons deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$, alors

$$[f(t) + g(t)]' = f'(t) + g'(t)$$

Il suffit de construire le tableau d'échantillonnage pour s'en convaincre. Plus intéressant est le calcul de la dérivée de $f(t)g(t)$. En échantillonnant dans notre tableau, nous avons

$$\left.\frac{d\left(f(t)g(t)\right)}{dt}\right|_{t_n} = \frac{f_{n+1}g_{n+1} - f_n g_n}{t_{n+1} - t_n}$$

D'après nos concept de dérivée, nous avons

$$f_{n+1} = f_{n+1} + f'(t_n)dt$$

Si nous reportons cela dans l'expression ci-dessus, nous avons

$$\left.\frac{d\left(f(t)g(t)\right)}{dt}\right|_{t_n} = f'(t_n)g_n + f_n g'(t_n) + f'(t_n)g'(t_n)dt$$

A nouveau, pour dt petit, le second terme est négligeable et nous avons, de façon formelle, en tout point t,

$$\frac{d\,(f(t)g(t))}{dt} = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$$

Exercice. En partant de la dérivée de la fonction $I(t) = t$, calculer par récurrence la dérivée de la fonction $I(t) = t^n$.

A partir de maintenant, nous pouvons raccourcir un peu nos lignes en court-circuitant les échantillonnages.

La fonction $f(t) = a^t$ est assez remarquable, de part la nature de sa dérivée. Nous savons par définition que $f(0) = 1$. Donc, :

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{a^{t+dt} - a^t}{dt} \\ &= a^t \frac{a^{dt} - 1}{dt} \\ &= f'(0)a^t \end{aligned}$$

La règle de dérivée, moyennant un coefficient, est self-similaire. Nous définissons le nombre e tel que pour $f(t) = e^t$, $f'(0) = 1$ et donc

$$\left(e^t\right)' = e^t$$

C'est à dire que la dérivée de la fonction exponentielle est la fonction exponentielle. IL n'est alors pas difficile de démontrer que la dérivée de la fonction $\log t$ est la fonction $1/t$. Pour cela, nous avons besoin de calculer la dérivée de la fonction inverse, que nous verrons plus bas.

Exercices. Calculer les dérivées (i) des fonctions $\sin t$ et $\cos t$; (ii) de la fonction $1/t$ et de façon générale $1/t^n$.

3.4. Changement de variable.

Nous avons vu l'importance des changements de variable et leur usage répandu. Nous devons maintenant étudier l'influence des changements de variables sur les dérivées. Donnons nous une fonction $I(t)$, et échantillonnons cette fonction à intervalle dt pour construire notre tableau de données comme d'habitude. Cependant, entre la ligne t et la ligne I, glissons une nouvelle

t	...	t_{n-1}	t_n	t_{n+1}	...
x	...	x_{n-1}	x_n	x_{n+1}	...
I	...	I_{n-1}	I_n	I_{n+1}	...
dI/dt	...	...	$\frac{I_{n+1}-I_n}{t_{n+1}-t_n}$	...	
dI/dx	...	...	$\frac{I_{n+1}-I_n}{x_{n+1}-x_n}$	...	
dx/dt	...	...	$\frac{x_{n+1}-x_n}{t_{n+1}-t_n}$	...	

TABLE 3.1.: Changement de variable. La ligne x est liée à la ligne t par la relation $x = \phi(t)$. Le signal I peut-être vu comme une fonction de la variable t ou de la variable x.

ligne [3] $x = \phi(t)$ entre la ligne des t et la ligne des I. Nous appelons x notre nouvelle variable (tableau 3.1). . Regardons maintenant la $n-$ième colonne ; nous pouvons construire soit la dérivée de I par rapport à la variable initiale t, soit par rapport à la nouvelle variable x. Il n'est pas très difficile de voir que ces deux quantités sont liées algébriquement par la relation

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dI}{dx}\frac{dx}{dt} \tag{3.1}$$

Cette relation paraît évidente lorsqu'on regarde le tableau. Cependant, en général, quand nous parlons des fonctions, nous n'accédons pas à leurs valeurs par leurs numéro de ligne comme on vient de le faire ici. Nous ne disons pas en général "quelle est la valeur au 122-ème point de la fonction $y = x^2$, échantillonnée à $dx = 0.001$ en partant de $x_0 = 1$". Nous disons plutôt "quelle est la valeur de la fonction $y = x^2$ au point $x = 1.122$". La réponse dans tout les deux cas est bien sûr $y(1.122) = 1.258884$.

Cette façon de consulter la valeur des tableaux complique très légèrement notre compréhension de la relation de la relation (3.1). La question que nous posons souvent en mathématique est : connaissant la dérivée de la fonction $I(t)$ (par rapport à t) en chaque point t et connaissant la relation entre la variable x et la variable t (que nous désignons par la fonction $x = \phi(t)$), comment déterminer la dérivée de la fonction $I(x)$? La fonction $I(t)$ est "consultée" par la valeur t (par exemple $I(t) = t^2$ et $dI/dt = 2t$), nous voulons obtenir la fonction dI/dx en fonction de la variable x. Prenons par

3. A partir de maintenant, pour garder un peu de cohérence dans les notations, nous utiliserons les lettres grecques pour désigner les changements de variables, comme ici $x = \phi(t)$.

exemple $I(t) = t^2$ et $x = \sqrt{t}$. Nous avons, d'après la relation (3.1)

$$2t = \frac{dI}{dx}\frac{1}{2\sqrt{t}}$$

ou encore $dI/dx = 4t^{3/2}$. Cette relation cependant n'est pas satisfaisant, puisque dI/dx est donnée en fonction de l'ancienne variable t. Par contre, nous pouvons inverser la relation qui lie x et t et écrire $t = x^2$ et obtenir ainsi

$$dI/dx = 4x^3$$

La relation (3.1) est souvent appelé la règle de dérivation en chaîne. Quand on acquiert des automatismes, nous effectuons cette règle sans même plus y penser, en écrivant

$$[f(\phi(t))]' = \phi'(t)f'(\phi(t))$$

mais ceci est une notation dangereuse, puisque le symbole de dérivation que nous utilisons se réfère à la dérivation par rapport à différentes variables. Calculons par exemple

$$\frac{d}{dt}\left[\log\left(\cos t\right)\right]$$

Nous posons $x = \cos t$. Considérons maintenant la fonction $I = \log(x)$. Nous savons, d'après ce que nous venons de dire que

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{dI}{dx}$$

Nous connaissons $dI/dx = 1/x$; mais elle est exprimée en fonction de la variable x et nous devons l'exprimer en fonction de la variable t : $dI/dx = 1/\cos t$. Par ailleurs, nous savons que $dx/dt = -\sin t$ et cette fois, nous n'avons pas de problème, c'est déjà exprimé en fonction de la variable t. Nous pouvons donc écrire

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\log\left(\cos t\right)\right] = -\sin t\frac{1}{\cos t} = -\tan t$$

Exercices.

1. Calculer d/dx des fonctions suivantes : $\exp(\log x)$, $\sin(x^2)$, $\tan(1/\sqrt{x})$.
2. Généraliser la règle de dérivation en chaîne et calculer d/dx pour $\sin(\cos x^2)$ et $\sqrt{\log(x^2+2x-1)}$.

t	$\dots$	t_{n-1}	t_n	t_{n+1}	$\dots$
I	$\dots$	I_{n-1}	I_n	I_{n+1}	$\dots$
dI/dt	$\dots$	$\dots$	$\frac{I_{n+1}-I_n}{t_{n+1}-t_n}$	$\dots$	
dt/dI	$\dots$	$\dots$	$\frac{t_{n+1}-t_n}{I_{n+1}-I_n}$	$\dots$	

TABLE 3.2.: Changement de variable. La ligne x est liée à la ligne t par la relation $x = \phi(t)$. Le signal I peut-être vu comme une fonction de la variable t ou de la variable x.

3. Soit l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dt} - \cos t(y-1) = 0$$

Comment se transforme cette équation si nous changeons de variable et posons $x = \sin t$?

3.5. La dérivée de la fonction inverse.

Reprenons notre signal I que nous échantillonnons à dt pour construire notre tableau. Comme nous l'avons dit, nous pouvons soit consulter le tableau par sa première ligne et voir la deuxième ligne comme une fonction de la première ligne, et écrire $I = f(t)$, soit consulter le tableau par sa deuxième ligne et voir la première ligne comme une fonction en écrivant $t = g(I)$). Pour bien souligner que nous sommes en train de consulter le même tableau, à la place de la lettre 'g', nous utilisons le symbole 'f^{-1}' et écrivons $t = f^{-1}(I)$. Il faut considérer 'f^{-1}' comme une seule lettre, et ne pas accorder plus d'importance que cela à l'exposant, cela n'a surtout aucun sens algébrique.

Nous pouvons former deux nouvelles lignes dans le tableau, soit dI/dt soit dt/dI. En jetant un coup d'œil sur la $n-$ième colonne du tableau, il est évident que

$$dI/dt = dt/dI$$

Calculer la dérivée de la fonction inverse est donc très simple. Sauf que nous devons prendre les mêmes précautions que dans la section précédente. Nous ne consultons pas les fonctions en accédant aux colonnes, mais directement à partir de la première ou la deuxième ligne. Ainsi, quand nous parlons de la fonction $f'(t)$, nous voulons disposer d'une règle qui nous fait consulter le tableau par les valeurs t, tandis que par $\left(f^{-1}\right)'(I)$, nous consultons le tableau par les valeurs de I.

Prenons par exemple la fonction

$$I = \exp t$$

et nous savons que

$$\frac{dI}{dt} = \exp t$$

Pour la fonction inverse, nous avons donc

$$\frac{dt}{dI} = \frac{1}{\exp t}$$

mais évidemment, cette relation n'est pas satisfaisante et nous devons exprimer la partie droite en fonction de I, ce qui dans ce cas est simple

$$\frac{dt}{dI} = \frac{1}{I}$$

Nous pouvons donc écrire

$$\frac{d}{dI}\left[\exp^{-1} I\right] = 1/\mathrm{I}$$

Il se trouve que la fonction $\exp^{-1}$ est tellement utilisée qu'on lui a donné le nom de logarithme [4] et qu'on note log. Par ailleurs, le nom qu'on utilise pour la variable n'a aucune importance, nous pouvons donc écrire

$$\frac{d}{dx}\left[\log x\right] = \frac{1}{x}$$

Exercices. Calculer la dérivée de la fonction inverse des fonctions suivantes : x^2, x^n, $\sin x$, $\tan x$.

Précautions. Les fonctions multivaluées. Renvoie au chapitre concerné.

3.5.1. La dérivée seconde de la fonction inverse.

La règle des dérivées premières était simple. Il en va autrement des dérivées seconde.

[to do : Régularisation d'échantillonage, que faire quand l'échantillonnage n'est pas régulière. Illustrer la différence entre d^2I/dt^2 et d^2t/dI^2.

4. En réalité, logarithme a été inventé (découvert ?) avant l'exponentiel par monsieur Neper, au temps où le calcul différentiel n'existait pas encore.

3.6. calcul des fonctions par approximations.

Il existe des opérations que nous savons faire exactement et en un temps fini : addition, soustraction, multiplication, division. Et c'est tout. Grâce à ces opérations, nous pouvons résumer certaines fonctions par des règles simple que nous appelons polynômes.

Il se trouve que la nature est cependant beaucoup trop riche pour pouvoir être maîtrisée par seulement des polynômes. Nous pouvons par exemple avoir besoin de déterminer le nombre qui, élever au carré, nous donne x. Nous pouvons même donner un nom à la fonction qui, à chaque nombre x, associe un nombre y tel que $y^2 = x$; cette fonction, comme vous le savez, est notée $\sqrt{x}$. Malheureusement, nous n'avons aucun moyen ou règle simple pour "capturer" cette fonction en un temps fini et nous devons revenir à nos tables : dresser une ligne des valeurs x pour x variant par pas de 0.01 entre 1 et 2, et pour chaque valeur, par exemple 1.5, déterminer par approximation successive sa racine carré.

Ces tables étaient d'usage courant jusqu'à très récemment. Il se trouve cependant qu'à partir de 1680 et l'avènement du calcul différentiel, les gens ont découvert une méthode très générale pour calculer ses tables de façon très général, en approximant une fonction quelconque par un polynôme précis. Par exemple, nous pouvons affirmer que dans l'intervalle $[1, 2]$ nous avons

$$\sqrt{x} = 1+\frac{x-1}{2}-\frac{1}{8}(x-1)^2+\frac{1}{16}(x-1)^3-\frac{5}{128}(x-1)^4+\frac{7}{256}(x-1)^5+O\left((x-1)^6\right) \tag{3.2}$$

Le dernier terme $O((x-1)^6)$ est une façon symbolique de nous indiquer l'amplitude d'erreur que nous commettons en utilisant cette expression.

Prenons par exemple $x = 1.5$. Selon la formule ci-dessus, nous avons $y_{essai} = 1.22498$. Nous pouvons vérifier l'exactitude de notre prédiction en élevant cette valeur au carré $y_{essai}^2 = 1.50057$. Nous voyons que l'erreur relative que nous commettons est de l'ordre de 10^{-4} .

Déduire le polynôme approximant est une procédure (algorithme) rgoureux qui découle directement de nos définitions des dérivées. C'est ce que nous allons voir maintenant.

note : bien insister comment on calcule $d\sqrt{x}/dx$ en utilisant la règle des fonctions inverse.

note 2 : passer un peu de temps sur $O(x^n)$;

note 3 : bien insister que ce n'est pas la meilleure méthode pour approximer une fonction sur l'ensemble de l'intervalle ; Introduire peut-être, comme un exercice, les polynômes de Chebychef.

4. Intégrale.

Le lecteur connaît déjà la notion de l'intégrale, qui n'est en réalité rien d'autre qu'une opération d'addition.

Supposons par exemple que nous sommes au bord d'un canal et que nous mesurons la vitesse instantanée du flot $v(t)$. Nous voulons à l'aide de cette information, connaître la masse d'eau qui est passée par notre repère du lundi 31/12 4h24 au mardi 01/01 à 15h36. Si nous parlons du courant électrique $I(t)$, la charge dQ qui traverse un endroit du circuit pendant un temps d'échantillonnage dt est $dQ = Idt$, si notre échantillonnage est suffisamment fin. IL faut ensuite sommer toutes ces petites charges pour calculer la charge totale entre les deux instants t_A et t_B.

L'origine de ce genre de calcul remonte à Archimède, qui a réussi à calculer le volume enclos dans une surface complexe en le découpant en élément infinitésimal. La méthode a ensuite (mille et quelques années après) été formalisée par Newton et Leibnitz.

[Reprendre le tableaux précédent, et construire la somme cumulative. Utiliser ce tableaux pour illustrer le théorème fondamental :

$$\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} f(s)ds = f(t)$$

Utiliser le tableaux des changements de variables pour construire les deux intégrales $\sum I\Delta x$ et $\sum I\Delta t$ et chercher la relation entre les deux et surtout, la condition pour qu'ils puissent représenter la même valeur

Illustrer le théorème fondamental.]

Bien insister que échantillonnage régulier n'est pas nécessaire, cf les changements de variable.

Nous pouvons bien sûr très rapidement échantillonner et calculer les sommes

dt	0.1	0.01	0.001	0.0001	...
$\int_0^2 tdt$	2.1	2.01	2.001	2.0001	...

TABLE 4.1.:

à l'aide de logiciels spécialisés [1]. Calculons par exemple

$$I = \int_0^2 tdt$$

pour différent valeur d'échantillonnage. Nous trouvons numériquement les valeurs données dans le tableau (4.1). Nous remarquons que plus dt devient petit, plus I s'approche de 2, et la différence est de l'ordre de dt.

Il se trouve que pour les fonctions non-pathologique, ceci est un phénomène général, et l'erreur est toujours de l'ordre de Cdt, où C est une constante.

4.1. Calcul explicite.

Pour certaines fonctions, il est assez facile de calculer la somme. Prenons par exemple le problème d'Archimède du calcul de l'air sous un parabole, qui revient à calculer l'intégrale de la fonction $I(t) = t^2$. Nous divisons l'intervalle entre t_A et t_B en N morceau de taille $dt = (t_A - t_B)/N$ et nous posons $t_0 = t_A$, $t_1 = t_A + dt$,...$t_N = t_A + Ndt$. Nous avons alors

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} t_n^2 dt &= \sum_{n=0}^{N} (t_A + ndt)^2 dt \\ &= Nt_A^2 dt + 2t_A dt^2 \sum_{n=0}^{N} n + dt^3 \sum_{n=0}^{N} n^2 \qquad (4.1)\end{aligned}$$

1. Citons par exemple octave, scilab et matlab. Le calcul se fait en deux trois lignes, par exemple

```
dt=0.01;
x = 0:dt:2;
y = x;
sum(y*dt);
```

Il existe une règle, un truc, très simple, pour calculer des sommes du genre $f(k) = \sum_n n^k$. Considérons par exemple la somme

$$I = \sum_{n=0}^{N} (n+1)^2 - n^2 \tag{4.2}$$

Il ne faut pas se laisser impressionner par les symboles. La somme ci-dessus veut dire quelque chose du genre

$$1^2 - 0^2 + 2^2 - 1^2 + 3^2 - 2^2$$

et nous voyons que tous les termes s'annulent deux par deux, sauf le premier et le dernier et donc $I = (N+1)^2$.

Par ailleurs, si nous développons l'expression (4.2), nous trouvons que

$$I = 2\sum_{n=0}^{N} n + N + 1$$

et par conséquent,

$$f(1) = \sum_{n=0}^{N} n = N(N+1)/2$$

en formant la somme $\sum (n+1)^3 - n^3$, nous calculons de la même manière

$$\begin{aligned} f(2) &= \sum_{n=0}^{N} n^2 = N(N+1)(2N+1)/6 \\ &\approx N^3/3 \end{aligned}$$

quand N est un très grand nombre [2].

En remplaçant tout cela dans l'expression (4.1), nous trouvons

$$\begin{aligned} I &= t_A^2(t_B - t_A) + t_A(t_B - t_A)^2 + (t_B - t_A)^3/3 \\ &= (t_B - t_A)(t_B^2 + t_A t_B + t_A^2)/3 \\ &= \frac{1}{3}(t_B^3 - t_A^3) \end{aligned}$$

Un petit calcul par récurrence nous donne la formule générale nous montre alors que

$$\int_{t_A}^{t_B} t^n dt = \frac{1}{n+1}(t_B^{n+1} - t_A^{n+1})$$

2. par exemple, pour $N = 10^6$, la différence relative entre ces deux valeurs est de l'ordre 10^-6.

4.2. Fonctions définies par une intégrale et le théorème fondamental.

Jusque là, nous avons considéré l'intégrale comme un nombre fixe. Il est évident cependant que si nous changeons les limites de l'intégration, la valeur de l'intégrale change également. Nous pouvons donc considérer l'intégrale comme une *fonction* des limites. Pour ne pas nous compliquer la tâche, fixons pour l'instant la limite inférieure à t_0 donné, et considérons la fonction

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau$$

voyons comment on peut envisager cette fonction : pour une valeur de t, nous échantillonnons par pas de $d\tau$ de t_0 à t. Nous avons donc $N = (t - t_0)/d\tau$ échantillons et calculons la somme $\sum f(t_0+nd\tau)d\tau$. Il est évident qu'à chaque valeur de t, nous trouvons une valeur particulière de la somme ; $F(t)$ est bien une fonction de t.

Ce qui a fait exploser les mathématiques c'est quand Newton a réalisé qu'il existe une relation très particulière entre l'intégrale et la dérivée. Considérons en effet la quantité $F(t) - F(t - dt)$ en échantillonnant par pas de $d\tau = dt$:

$$F(t) - F(t - dt) = \sum_{0}^{N} f(t_0 + nd\tau)d\tau - \sum_{0}^{N-1} f(t_0 + nd\tau)d\tau$$

Le lecteur a bien sûr remarqué que ceci est une somme du genre $(1+2+3+4)-(1+2+3)$ et il n'y a que le dernier terme qui survit. Donc

$$\begin{aligned} F(t) - F(t - dt) &= f(t_0 + Nd\tau)d\tau \\ &= f(t)d\tau \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$\frac{d}{dt}F(t) = f(t)$$

Exercice. Calculer $\int_0^t f(\tau)d\tau$ pour les fonctions x^n, $\exp(x)$, $1/x^2$.

4.2.1. Quelques fonctions particulière, définie par des intégrales.

Log, ArcSin et surtout erf.

t	$t_0 = t_A$	t_1	t_2	$\dots$	$t_N = t_B$	
dt	$dt_0 = t_1 - t_0$	$dt_1 = t_2 - t_1$	$dt_2 = t_3 - t_2$	$\dots$		
f	$f_0 = f(t_A)$	$f_1 = f(t_A + dt)$	f_2	$\dots$	f_N	
fdt	$f_0 dt_0$	$f_1 dt_1$	$f_2 dt_2$	$\dots$	$f_N dt_N$	$\sum f_n dt_n$
$x = \phi(t)$	$x_0 = x_A = \phi(t_A)$	x_1	x_2	$\dots$	$x_N = \phi(t_B)$	
dx	$dx_0 = x_1 - x_0$	$dx_1 = x_2 - x_1$	$dx_2 = x_3 - x_2$	$\dots$		
fdx	$f_0 dx_0$	$f_1 dx_1$	$f_2 dx_2$		$f_N dx_N$	$\sum f_n dx_n$

Table 4.2.: Changement de variable dans une intégrale. La ligne x est liée à la ligne t par la relation $x = \phi(t)$.

4.3. Changement de variable.

Il est très important de ne pas oublier que l'intégrale est une somme du *produit* de deux termes : la valeur de la fonction en un point *et* le pas d'échantillonnage. On n'insiste jamais assez sur ce point. Ecrire une expression du genre

$$\int_a^b f(t)$$

est horriblement faux et n'a pas de sens mathématique, puisqu'il y manque la moitié de l'information. Nous devons donner autant d'importance à l'échantillonnage qu'à la fonction, et toujours écrire $\int_a^b f(t)dt$. dt n'est pas simplement une décoration symbolique, elle a une valeur et cette valeur rentre dans le calcul de la somme.

Ceci prend tout son sens quand on effectue des changement de variable. Nous avons déjà pas mal insister sur les changements de variable et de leur utilité. Pour l'intégration, ils ont de plus l'utilité de transformer une intégrale inhabituelle en quelques chose de plus usuel : nous n'avons pas à apprendre des milliers de recettes, mais seulement quelques une et le pouvoir de réduire les autres en ces quelques cas connu.

Seulement voilà : il faut prendre des précautions avec l'échantillonnage. Regardons cela sur le tableau 4.2 en calculant $I = \int_{t_A}^{t_B} f(t)dt$. Comme d'habitude, nous échantillonnons la fonction entre t_A et t_B par pas de dt et calculons la somme

$$I_1 = \int_{t_A}^{t_B} f(t)dt = \sum f_n dt_n$$

.

Changeons de variable maintenant et formons la ligne $x = \phi(t)$. Dans chaque colonne, la valeur x_n est calculer à l'aide de la relation $x_n = \phi(t_n)$.

Nous pouvons également former la ligne dx, où dans chaque colonne nous avons $dx_n = x_{n+1} - x_n$. Nous pouvons maintenant former la somme

$$I_2 = \int_{x_A}^{x_B} f(x)dx = \sum f_n dx_n$$

Il est évident que ces deux sommes représentent des valeurs différentes. En effet, dans chaque colonne, nous retrouvons la même valeur de f_n ; par contre, il n'y a aucune raison pour que $dx_n = dt_n$.

Pour nous en convaincre, prenons le cas où nous avons échantillonné la variable t par pas régulier de 0.001 entre $t_A = 1$ et $t_B = 2$. Effectuons maintenant le changement de variable $x = t^2$, et regardons la colonne $n = 500$. Nous avons $t_{500} = 1.5$, $t_{501} = 1.501$; $x_{500} = 2.25$; $x_{501} = 1.501^2 = 2.25300100$; $dt_{500} = 0.001$; $dx_{500} = 0.00300100$: la valeur de dx dans cette colonne est trois fois supérieure à la valeur de dt au même endroit.

Si nous voulons que les deux sommes correspondent, nous devons réajuster dans chaque colonne le pas d'échantillonnage, et former la somme

$$I_3 = \sum f_n dx_n \frac{dt_n}{dx_n}$$

et dans ce cas là, il est évident que $I_3 = I_1$.

Exemples. Supposons que nous voulons calculer $I = \int_0^1 \exp(2t)dt$. Nous connaissons l'intégrale de la fonction $\exp(t)$, nous voulons nous ramener à ce cas. Posons alors $x = 2t$. Les bords de l'intégrale change alors en $x_A = 2t_A = 0$ et $x_B = 2t_B = 2$. Bien. La partie délicate et le calcul de dt/dx, puisque nous avions préciser x comme une fonction de t et non t comme une fonction de x. Ici, ce n'est pas très compliqué puisque nous pouvons facilement inverser la relation et écrire $t = x/2$ et donc $dt/dx = 1/2$. Nous avons alors

$$I = \int_0^2 \exp(x)\frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right)$$

Prenons maintenant un cas légèrement plus compliqué, comme par exemple $I = \int_0^2 t\sin(t^2)dt$. Nous savons intégrer la fonction $\sin t$, nous voulons donc nous rapprocher de ce cas. Posons alors $x = t^2$. Nous avons alors $t = \sqrt{x}$ et $dx = 2tdt$ ou encore, en inversant la relation, $dt = dx/(2\sqrt{x})$. Nous avons donc

$$I = \int_0^4 \sqrt{x}\sin x \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2}\left(-\cos 4 - 1\right)$$

Voilà. Les changement de variables pour transformer les intégrales en des formes plus sympathique demande une certaine dextérité qui ne s'acquiert qu'en faisant des centaines d'exercices. Des livres entiers y sont consacrés et nous référons le lecteur à ces livres.

4.3.1. Les changements de variables linéaires.

Insister sur la mise en forme de somme de carré.

4.3.2. Les fonctions trigonométriques.

4.3.3. L'art de deviner les changements de variables quelconque.

4.4. L'intégration par partie.

Introduire la fonction Γ et $(1/2)!$ entre autre.

Soit deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$. Nous connaissons la règle de la dérivation de produit, que l'on peut réecrire : f(t

$$f(t)\frac{d}{dt}\left(g(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(f(t)g(t)\right) - g(t)\frac{d}{dt}\left(f(t)\right)$$

En intégrant des deux côtés, nous aboutissons à l'égalité

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} f'(t)g(t)dt$$

Cette relation triviale nous permet parfois de calculer exactement certaines intégrales qui paraissent compliquées. Prenons par exemple $\int_a^b t\sin t dt$. Nous savons calculer la primitive de $\sin t$. D'autre part, la dérivée de t nous donne une fonction constante. En choisissant $f(t) = t$ et $g'(t) = \sin t$, nous pouvons transformer cela en

$$\int_a^b t\sin t dt = -\left[t\cos t\right]_a^b + \int_a^b \cos t$$

et la dernière intégrale s'effectue sans complication.

Exemple 2. Pour calculer $\int_a^b \log t dt$, le choix peut laisser perplexe au début. Ceci dit, la dérivée de la fonction $\log t$ est très simple. En prenant $g'(t) = 1$, nous aboutissons à

$$\begin{aligned} \int_a^b \log t dt &= [t \log t]_a^b - \int_a^b dt \\ &= [t \log t - t]_a^b \end{aligned}$$

Exercices.

1. Soit $I_n = \int_a^b x^n \sin x dx$ et $J_n = \int_a^b x^n \cos x dx$. Trouver la relation entre I_n et J_{n-1} et I_{n-2}. En déduire la forme générale de I_n.
2. Que vallent $\int_a^b t^n \log t dt$ et $\int_a^b t^n \log^2 t dt$? Déduire la forme générale de $\int_a^b t^n \log^m t dt$.

Les factorielles généralisées. Nous connaissons la valeur de $n!$: en utilisant la propriété fondamentale des factorielles, $(n+1)! = (n+1)n!$, et en posant $1! = 1$, nous obtenons par récurrence $n! = n(n-1)(n-2)...2.1$. Peut on généraliser cela et calculer par exemple $(1/2)!$? Pour cela, nous avons besoin de trouver une fonction $f(s)$ telle que $f(s+1) = (s+1)f(s)$ et $f(1) = 1$. Remarquons en passant que $f(1) = 1f(0)$ et donc nécessairement, $f(0) = 1$. C'est de cela que vient d'ailleurs la convention $0! = 1$. De meme, $f(0) = 0f(-1)$, nous devons donc avoir quelque chose du genre $f(-1) = \infty$.

Considérons la fonction

$$f(s) = \int_0^\infty t^s e^{-t} dt$$

Il est evident que nous pouvons calculer $f(0) = 1$. Une intégration par partie par ailleurs nous montre que

$$f(s+1) = (s+1)f(s) \tag{4.3}$$

Voyons cela de plus près. Choisissons $g'(t) = e^{-t}$, dont la primitive $-e^{-t}$ est évidente. Nous avons alors

$$\int_0^\infty t^{s+1} e^{-t} dt = -\left[t^{s+1} e^{-t}\right]_0^\infty + (s+1) \int_0^\infty t^s e^{-t} dt$$

qui nous amène directement à la relation (4.3). Donc nous avons effectivement, pour des n entier,

$$f(n) = n!$$

Par contre, nous voyons que la valeur de f peut être définie ou évalué (au moins numériquement) pour n'importe quel nombre. Calculons par exemple

$$f(-1/2) = \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} dt$$

si nous posons $t = u^2$ et donc $dt = 2udu$; nous avons

$$\begin{aligned} f(-1/2) &= \int_0^\infty u^{-1} e^{-u^2} 2udu \\ &= 2\int_0^\infty e^{-u^2} du \\ &= \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

D'après notre discussion de la fonction erf plus haut. Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned} (-1/2)! &= \sqrt{\pi} \\ (1/2)! &= (1/2)(-1/2)! = \sqrt{\pi}/2 \\ (3/2)! &= 3\sqrt{\pi}/4 \\ &\ldots \end{aligned}$$

4.5. Intégrale multiple.

Notre définition d'intégrale se généralise assez facilement aux fonctions de plusieurs variables. La seule chose à la quelle il faut faire un peu plus attention est la frontière qui délimite le domaine d'intégration. [To be continued]

5. Equations différentielles.

5.1. Un système algébrique simple et une équation différentielle encore plus simple.

Commencer par faire un petit exercice de système algébrique et résolvons explicitement l'équation suivante :

$$y_{n+1} - y_n = \alpha y_n \quad n = 0, ..., N-1 \tag{5.1}$$

Parler de "l"'équation en l'occurrence est un abus de langage, l'équation ci-dessus n'est pas une équation, mais un système d'équations linéaires pour les inconnues $y_0, y_1, ..., y_N$ et nous devons plutôt l'écrire

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 &= \alpha y_0 \\ y_2 - y_1 &= \alpha y_1 \\ &\cdots \\ y_N - y_{N-1} &= \alpha y_{N-1} \end{aligned}$$

Si vous avez bien compté, vous avez déjà aperçu que nous avons un petit problème : nous avons $N+1$ inconnus mais seulement N équations ! Le mieux que nous puissions faire est donc d'exprimer N des inconnues en fonction d'une restante, par exemple $y_1, ...y_N$ en fonction de y_0. Si par ailleurs, nous avons des informations supplémentaires sur le système, que par exemple nous savons la valeur de y_0, alors tout rentre dans l'ordre : y_0 passe du statut d'inconnue au statut de connue et le nombre d'équations et d'inconnues s'équilibre.

Il se trouve que les équations de type ci-dessus se résolvent facilement par récurrence. Nous remarquons que nous pouvons réarranger les termes et écrire

$$y_n = (1+\alpha) y_{n-1}$$

et déduire tout simplement par récurrence

$$y_n = (1+\alpha)^n y_0$$

et voilà, notre équation est résolue.

On peu pousser un peu plus loin est remarquer que nous pouvons réarranger la solution sous forme de

$$y_n = e^{n \log(1+\alpha)} y_0$$

et si le coefficient α est très petit, nous ne commettons pas une grande erreur en écrivant (voir notre chapitre sur les développements limités)

$$\log(1+\alpha) = \alpha$$

et notre solution peut alors s'écrire

$$y_n = e^{\alpha n} y_0$$

Bien. Nous voyons que pour résoudre cette équation particulière, nous n'avons pas à utiliser autre chose que nos connaissances des opérations d'addition et de multiplication. Comme nous allons le voir, une équation différentielle n'est rien d'autre que cela.

Considérons l'équation différentielle

$$y' = ay \tag{5.2}$$

Ceci est, géométriquement parlant, une relation entre la pente de la fonction et la valeur de la fonction en *chaque* point [1]. Revenons cependant à notre conception de fonction en tant que tableau, que nous avons échantillonné sur l'intervalle $[x_0, x_1]$ par pas de dx. Nous savons bien sur que plus l'échantillonnage est fin, meilleur est notre représentation en tableau. Nous poserons donc, pour un point $x_n = a + ndx$ $y_n = y(x_0 + ndx)$. Nous savons par ailleurs que si notre échantillonnage est assez petit, nous pouvons en chaque point approximer la dérivée par

$$\begin{aligned} y'(x_n) &= \frac{y(x_n + dx) - y(x)}{dx} \\ &= (y_{n+1} - y_n)/dx \end{aligned}$$

et donc notre équation différentielle (5.2) peut être approximée par un système linéaire d'équation

$$y_{n+1} - y_n = (adx) y_n$$

1. Cette remarque nous ouvrira les portes de l'approche variationnelle des équations différentielles. Nous verrons cela plus tard.

Mais nous avons déjà résolu cette équation et nous savons que sa solution est donnée par

$$\begin{aligned} y_n &= e^{andx} y_0 \\ &= e^{a(x_n - x_0)} y_0 \end{aligned}$$

Si nous voulons revenir à nos notations continues, nous écrirons la relation ci-dessus comme

$$y(x) = e^{a(x-x_0)} y(x_0)$$

Cette une relation que le lecteur connaît probablement comme la solution de "l'équation différentielle linéaire à coefficients constants de premier ordre", et qui est la brique de base de toute notre arsenal d'équations différentielles linéaires.

Je voudrais insister sur deux points très important à ce niveau. Premièrement, comme dans le cas des système algébrique, la discrétisation nous fournit une inconnue de plus que d'équation ; nous devons donc connaître à priori une des inconnues pour équilibrer le système. Nous avons supposée ci-dessus que nous connaissions la valeur $y(x_0)$ de la fonction au point x_0, mais bien sûr la valeur de la fonction en n'importe quel autre point fera l'affaire.

Ensuite nous pouvons remarquer que

$$a(x - x_0) = \int_{x_0}^{x} a dx$$

et nous allons tenter de généraliser les conséquences de cette remarque apparemment futile.

Exercice. Résoudre l'équation différentielle

$$y' = ay + b$$

5.2. Un système algébrique un peu moins simple et ses applications.

Dans le système (5.1) que nous avons étudié, le coefficient α était constant. Compliquons nous la tâche et essayons de résoudre

$$y_{n+1} - y_n = \alpha_n y_n$$

c'est à dire que la valeur du coefficient change à chaque ligne. Nous voyons cependant que notre résolution par récurrence ne change pas vraiment et nous avons

$$\begin{aligned} y_n &= (1+\alpha_{n-1})(1+\alpha_{n-2})...(1+\alpha_0)y_0 \\ &= \left[\prod_{i=0}^{n-1}(1+\alpha_i)\right] y_0 \end{aligned}$$

le symbole $\prod$ est juste une façon rapide de résumer le "produit" de plusieurs facteurs, de la même façon que $\sum$ résume l'addition de plusieurs termes. Nous pouvons à nouveau utiliser les logarithmes pour nous simplifier la tâche, en notant que $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$ et donc par généralisation,

$$\begin{aligned} \log\left[\prod_{i=0}^{n-1}(1+\alpha_i)\right] &= \sum_{i=0}^{n-1}\log(1+\alpha_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i \quad \text{si}\, \alpha_i \ll 1 \end{aligned}$$

et donc finalement, la solution approximative de notre équation peut s'écrire

$$y_n = e^{\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i} y_0 \tag{5.3}$$

Bien. Regardons maintenant l'équation différentielle

$$y' = a(x)y$$

Si nous reprenons notre schéma de discrétisation, nous pouvons écrire

$$y_{n+1} - y_n = (a_n dx)y$$

dont la solution est donnée par (5.3). Nous pouvons de plus remarquer que

$$\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i dx = \int_{x_0}^{x} a(u)du$$

si notre échantillonnage est très fin ; si nous revenons en notation continue,

$$y(x) = e^{\int_{x_0}^{x} a(u)du} y(0)$$

Le lecteur a probablement déjà entrevue cette solution en utilisant une méthode appelé "la variation des constante".

5.3. la méthode d'Euler.

La méthode exposée ci-dessus marche très bien pour les équations linéaires, nous pouvons la généraliser à n'importe quelle équation en utilisant la méthode développée par Euler dans les années 1730.

Utiliser ce schéma de discrétisation pour construire explicitement la solution d'équation différentielle de premier ordre et surtout de second ordre et faire apparaître les oscillations.

Insister beaucoup sur les constructions graphiques. Mentionner en passant Runge-Kutta.

Aborder quelques ED plus compliquées et construire par exemple graphiquement les comportements assymptotiques , ...

5.4. Méthodes analytiques : ED de premier ordre.

Analyse graphique.

5.4.1. La méthode de la séparation des variable.

Illustrer le paradigme $y' = ay$ et passer au cas général $y' = a(x)f(y)$.

5.4.2. L'équation de premier ordre non-homogène.

Illsutrer le faite que nous ne savons pas résoudre $y' = ay + f(t)$ par la séparation des variable. Introduire le changement de fonction $y(t) = z(t)\exp(at)$ et donner la solution générale :

$$y(t) = e^{at}\left(\int_0^t e^{-a\tau}f(\tau)d\tau + y_0\right)$$

Généraliser au cas $y' = a(t)y + f(t)$.

5.4.3. L'équation de second ordre.

Considérons maintenant l'équation linéaire homogène à coeffcient constante

$$y'' + by' + cy = 0 \tag{5.4}$$

Comment le résoudre à l'aide des méthodes que nous avons déjà rencontré ? Avant de procéder au cas général, considerons l'équation plus simple

$$\begin{aligned} y'' - \alpha^2 y &= 0 \\ y(0) = y_0 \quad &; \quad y'(0) = v_0 \end{aligned}$$

Posons la fonction

$$z = y' - \alpha y \tag{5.5}$$

Nous ne connaissons évidemment pas la fonction $z(t)$ et nous n'avons fait qu'augmenter le nombre d'inconnu pour l'instant. Mais si nous arrivions à déterminer par hasard (ou non) la fonction z, nous pouvons alors regarder la relation 5.5 comme une équation différentielle de premier ordre en y avec second membre, dont la solution est

$$y = e^{\alpha t}\left(\int_0^t e^{-\alpha\tau} z(\tau) d\tau + y_0\right) \tag{5.6}$$

Regardons maintenant la relation (5.5) de plus près. En dérivant une fois, nous obtenons

$$\begin{aligned} z' &= y'' - \alpha y' \\ &= \alpha^2 y - \alpha y' \\ &= -\alpha z \end{aligned}$$

miracle ! z obéit à une équation différentielle simple dont la solution est

$$\begin{aligned} z(t) &= z_0 e^{-\alpha t} \\ z_0 &= v_0 - \alpha y_0 \end{aligned}$$

En injectant cette solution dans la relation (5.6), nous obtenons la solution

$$\begin{aligned} y &= -\frac{z_0}{2\alpha} e^{-\alpha t} + (\frac{z_0}{2\alpha} + y_0) e^{\alpha t} \\ &= (\frac{y_0}{2} - \frac{v_0}{2\alpha}) e^{-\alpha t} + (\frac{y_0}{2} + \frac{v_0}{2\alpha}) e^{\alpha t} \end{aligned}$$

Résumons : nous avons transformé une equation de second ordre $y'' - \alpha^2 y = 0$ en un système de deux équations de premiers ordre

$$\begin{aligned} z' &= -\alpha z \\ y' &= \alpha y + z \end{aligned}$$

nous avons facilement résolut la première ligne, ce qui nous a permis de résoudre facilement la seconde ligne. En langage savant, on dit que nous avons triangulé une matrice. [2]

La généralisation au cas général (5.4 est très simple. En suivant la même ligne générale, posons

$$z = y' - r_1 y$$

où r_1 est une des racines de l'équation algébrique

$$r^2 + br + c = 0$$

Notons que nous pouvons réecrire l'équation algébrique

$$\frac{c}{r+b} = -r$$

et que de plus, nous avons

$$r_1 + b = -r_2$$

où r_2 et l'autre racine. La même manipulation que précédemment nous emmène maintenant à l'équation triangulaire

$$\begin{aligned} z' &= r_2 z \\ y' &= r_1 y + z \end{aligned}$$

dont la solution générale est de la forme

$$y = e^{r_1 t}\left(z_0 \int_0^t e^{-r_1\tau} e^{r_2\tau} d\tau + y_0\right)$$

Dans le cas où $r_1 \neq r_2$, y prend la forme

$$y = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

Dans le cas où $r_1 = r_2$ (racine double de l'équation algébrique), la solution prend la forme

$$y = e^{r_1 t}(At + B)$$

où les coefficients constantes A et B dépendent des conditions intiales.

2. En notation matricielle, nous pouvons écrire

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix}$$

et la matrice a la forme d'un triangle, d'où le nom. Les relations triangulaires se résolvent ligne après ligne de façon automatique.

5.5. Une double récurrence et les équations de second ordre.

Nous pouvons résoudre également l'équation de second ordre comme la limite d'équation de récurrence discrète. Cela n'apporte pas plus d'information autre qu'un autre éclairage sur la même chose.

Tentons maintenant de résoudre le système d'équation algébrique

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = \alpha y_n \tag{5.7}$$

L'équation paraît vraiment complexe. Dans le cas simple que nous avions traité en section 5.1, nous avions pu former une récurrence simple et écrire

$$y_{n+1} = r y_n \tag{5.8}$$

ce qui nous emmenait naturellement, de proche en proche, à la relation $y_n = r^n y_0$.

A y regarder de plus près, une récurrence impliquant trois terme n'est pas très différent. Posons

$$p_{n+1} = y_{n+1} - y_n \tag{5.9}$$

L'équation (5.7) s'écrit alors

$$p_{n+1} - p_n = \alpha y_n \tag{5.10}$$

En, combinant (5.9,5.10) nous pouvons maintenant exprimer toutes les variable en $n+1$ en fonction des variables en n sous forme d'un système d'équations linéaires :

$$\begin{aligned} -y_{n+1} + p_{n+1} &= -y_n \\ p_{n+1} &= \alpha y_n + p_n \end{aligned}$$

ou même mieux, en le mettant sous forme canonique, en retranchant de la deuxième ligne la première ligne pour former une nouvelle équation

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= (1+\alpha) y_n + p_n \\ p_{n+1} &= \alpha y_n + p_n \end{aligned}$$

La relation commence à sérieusement ressembler à la relation (5.8), surtout si nous utilisons les notations vectoriel. Posons $\mathbf{u}_n = (y_n, p_n)$, nous avons alors

$$\mathbf{u}_{n+1} = R\mathbf{u}_n$$

où cette fois, au lieu d'être un nombre, R est la matrice

$$R = \begin{pmatrix} 1+\alpha & 1 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \tag{5.11}$$

et nous pouvons donc écrire, comme avant,

$$\mathbf{u}_n = R^n \mathbf{u}_0$$

Faisons deux remarques à ce niveau. Premièrement, nous voyons que comme l'équation (5.7) impliquait trois termes, nous avons besoin de *deux* condition initiale $\mathbf{u}_0 = (y_0, p_0)$.

Ensuite, il est bien beau d'écrire R^n, encore faut il pouvoir calculer cette quantité réellement. Heureusement, il s'avère que le calcul de R^n n'est pas beaucoup plus compliqué pour une matrice que pour un scalaire. Si une matrice est diagonale, sa manipulation devient vraiment analogue à celle d'un scalaire est nous avons bien sûr

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$$

Supposons maintenant que R ne soit pas diagonal, mais que l'on puisse trouver deux autre matrices P et D tel que

$$R = P^{-1}DP$$

où D est une matrice diagonale et P^{-1} la matrice inverse de P : $P^{-1}P = PP^{-1} = I$. Il ne faut pas beaucoup de calcul pour montrer alors que

$$R^n = P^{-1}D^nP$$

calculer D^n et la multiplier ensuite par P et P^{-1} est quelque chose de facile et faisable. Il se trouve que le problème de trouver les matrices D et P ont été résolu depuis longtemps ; les éléments diagonaux de D s'appellent les valeurs propres de R, et la matrice P s'appelle la matrice de passage. Nous reviendrons sur les bases de ce genre de calcul plus tard dans ce cours. Pour l'instant, il nous suffit de savoir que pour la matrice R de l'équation (5.11), les coefficients de la matrices D sont solutions de l'équation

$$\lambda^2 - (2+\alpha)\lambda + 1 = 0$$

et que pour α très petit [3], nous avons

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 \pm \sqrt{\alpha} \\ \log\lambda &= \pm\sqrt{\alpha} \\ \lambda^n &= e^{\pm n\sqrt{\alpha}} \end{aligned}$$

3. En nous contentant de l'ordre 1 du développement limité

et finalement, après un peu d'algèbre linéaire, nous obtenons finalement

$$R^n = (1/2)\begin{pmatrix} \lambda_1^n + \lambda_2^n & -\lambda_1^n + \lambda_2^n \\ -\lambda_1^n + \lambda_2^n & \lambda_1^n + \lambda_2 \end{pmatrix}$$

et donc, finalement, de façon générale, nous obtenons

$$y_n = ae^{n\sqrt{\alpha}} + be^{-n\sqrt{\alpha}}$$

où a et b sont deux coefficients qui dépendent de nos conditions initiales.

[Equation de 2nd ordre.]

[Montrer, illustrer le processus de diagonalisation à travers l'emploi des nombres complexe, comment l'équation $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$ se transforme en $\dot{u} + i\omega u = 0$ où $u = \dot{y} + i\omega y$, en refaisant d'abord l'exercice sur le cas discret. Eventuellement, faire le rapprochement entre les 2-matrices et les nombres complexes.]

5.6. Les équations linéaires d'ordre quelconque.

5.7. Changement de variable.

Comment introduire les changements de variables ? Utiliser la même approche que pour les intégrales.

6. Éléments d'algèbre linéaire.

- Un concept géométrique : les vecteurs. [pas mal de parler sans détail ici même des groupes de transformations et leur redéfinition de la géométrie. Un chapitre sous forme d'un détour touristique pour les géométries non-euclidienne. Juste pour bousculer les automatismes.]
- Les transformations linéaires des vecteurs : application linéaire comme une généralisation de l'opération de multiplication scalaire.
- Interprétation géométrique des systèmes linéaires. Unification à travers le concept des applications linéaires.
- Comment vraiment résoudre un système linéaire : méthode de Gauss. Insister sur l'hérésie du calcul de la matrice inverse.
- Les équations différentielles linéaire vue comme un système linéaire. Schéma de discrétisation ; re-visite de ce que nous avions intuitivement fait au chapitre précédent.
- Applications aux EDP. [ce n'est plus 13 cours qu'il me faut, mais 26].

6.1. Genèse d'une branche des mathématiques.

Depuis les temps anciens, les gens savent résoudre l'équation

$$ax = b \tag{6.1}$$

où x est "l'inconnu", b le second membre et a le coefficient. La solution complète de cette équation et ses conséquences algébriques sont apparus en 830 dans un livre fameux qui a fondé la discipline d'algèbre et qui s'appelle "al-djabre val moghabeleh [1]" par Khwarazmi, qui construit explicitement les algorithmes pour attaquer ce genre de problème.

Cette équation de nos jours paraît tellement élémentaire que nous oublions la beauté cachée à l'intérieur qui fonde notre compréhension du monde physique à travers les théories de la mécanique quantique, de la relativité restreinte, de l'électromagnétisme, de l'élasticité, ... Cette beauté s'appelle la "*linearité*" et les scientifiques ont mis plus de 100 ans pour comprendre sa

1. titre complet : "précis de calcul et de résolution par complétion et équilibrage

capacité à unifier les méthodes mathématiques des diverses branches de la physique [2].

Que veut on dire par linéarité ? Supposons que nous savons résoudre l'équation (6.1) pour un a_1 et un b_1 donné, et nous écrivons la solution sous forme de x_1. Supposons maintenant que nous voulons résoudre cette équation pour la même valeur de a, mais pour avec un second membre b_2 double $= 2b_1$. Doit on reprendre de zéro l'algorithme de résolution ? La réponse est bien sûr non, la solution est donnée par $x_2 = 2x_1$.

De même, supposons que nous savons résoudre l'équation avec le même a pour deux valeurs de b différents (b_1 et b_2) que nous notons x_1 et x_2. Si maintenant nous voulons résoudre l'équation avec la même valeur de a et pour le second membre $b_3 = b_1 + b_2$, nous savons à l'avance, sans refaire les calculs, que la solution sera $x_3 = x_1 + x_2$.

Pour résumer la situation, nous voyons qu'une fois le coefficient a fixé, l'inconnue x est une fonction du second membre

$$x = f(b)$$

et la fonction f a ceci de particulier que

$$\begin{aligned} f(b_1 + b_2) &= f(b_1 + b_2) && (6.2) \\ f(\lambda b) &= \lambda f(b) && (6.3) \end{aligned}$$

où λ est un nombre. Des fonctions avec la propriété ci-dessus sont appelées des fonctions ou applications linéaires.

Bien, compliquons un peu la chose et considérons un système à deux équations et deux inconnues x et y :

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

Supposons à nouveaux que nous savons résoudre cette équation pour des coefficients a_{ij} donnés et un couple (b_1, b_2) et notons la solution (x_α, y_α). Peut-on résoudre cette équation sans effort si l'on garde les a_{ij} inchangés, mais qu'on double tous les éléments du second membre ? La réponse est bien sûr que toutes les inconnues sont également doublées par rapport au cas précédent et la solution est $(2x_\alpha, 2x_\beta)$.

2. En 1920, quand Heisenberg et co. ont développé la “mécanique matricielle” pour développer la nouvelle physique, les matrices étaient considérées par les physiciens comme des objets abstraits des mathématiciens et n'étaient enseignées, si elles l'étaient, qu'au niveau doctoral. Einstein en 1910 a du apprendre tout seul le concept de tenseur développé par Ricci et Levi-Civita et cela lui a pris quelques années.

Le système de notation a une grande importance dans notre façon de réfléchir. Si l'équation (6.1) nous paraît si simple aujourd'hui, c'est qu'au cours du 16ème siècle, cette notation abstraite a remplacé la description des équations par des mots. Pour résoudre les systèmes[3] à $n-$équations et $n-$inconnues, nous allons suivre une démarche similaire : toutes les inconnues $(x_1, x_2, ...x_n)$ seront empaqueté symboliquement dans un objet qu'on appelle *vecteur*[4] et qu'on notera en gras $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ...x_n)$. Nous faisons de même avec les éléments du second membre $\mathbf{b} = (b_1, b_2, ...b_n)$. Les coefficients sont empaquetés dans un tableau que nous appelons matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ & & ... & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

et nous écrivons formellement

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Nous supposons que le lecteur est familier de cette notation et connaît les règles de *multiplication* des vecteurs par des matrices.

Cette notation non-seulement nous libère d'écriture fastidieuse de coefficients, mais surtout nous permet de dégager la similarité avec l'équation (6.1) et nous permet de dégager facilement les mêmes concepts de linéarité.

Revenons sur le concept de vecteur. Pour mériter s'appeler un vecteur, un paquet d'objets doit pouvoir être muni d'opération d'addition (entre eux) et de multiplication (par un nombre). Nous devons être capable de donner un sens précis au vecteur $\mathbf{u_3} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3 = \lambda\mathbf{u}_2$, du moment que nous avons défini $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$. Ici, cette définition est très simple et nous "héritons" simplement ce que nous savons faire dans le domaine des nombres :

$$\begin{aligned} (b_1, ...b_n) + (c_1, ...c_n) &= (b_1 + b_2, ...b_n + c_n) \\ \lambda(b_1, ...b_n) &= (\lambda b_1, ...\lambda b_n) \end{aligned}$$

Il est très important de noter qu'à gauche, l'opération d'addition est entre deux vecteurs, et à droite entre n nombre. En toute logique, nous aurions du utiliser une autre notation pour l'addition entre les vecteurs, par exemple $\boxplus$;

3. Le nombre d'équations et d'inconnues n'ont pas à être égaux, mais nous évitons ce cas général pour l'instant.

4. N'importe quel paquet n'a pas le droit de s'appeler vecteur ; ce terme est étroitement lié au concept de linéarité.

mais ceci nous aurait caché la similarité entre l'addition des vecteurs et des nombres. En faite, nous pouvons repenser au nombres comme des vecteurs simples.

Ayant fait cela, nous pouvons voir comme précédemment que pour A fixée, l'inconnu $\mathbf{x}$ est une fonction du second membre $\mathbf{b}$

$$\mathbf{x} = f(\mathbf{b})$$

Nous devons étendre notre définition de fonction : ici, c'est un objet qui prend en entrée un *vecteur* et produit en sortie un autre vecteur. Cependant, la fonction qui relie $\mathbf{x}$ et $\mathbf{b}$ est linéaire au sens défini en (6.2) :

$$f(\lambda\mathbf{b}_1 + \mu\mathbf{b}_2) = \lambda f(\mathbf{b}_1) + \mu f(\mathbf{b}_2)$$

où λ et μ sont des nombres. Souvent, à la place du mot "fonction linéaire", nous utiliserons le mot plus répandu d' "application linéaire".

6.2. Le vecteur comme concept géométrique.

Très probablement, le lecteur a rencontré le mot "vecteur" la première fois dans un cours de géométrie où ce mot désignait une ligne avec une flèche. [to be continued].

6.3. Unification d'objet disparate.

6.4. Qu'est ce qu'un déterminant ?

Maintenant que nous savons ce que sont les vecteurs, considérons quelques concepts comme l'aire, le volume [5], ... : nous pouvons parler de l'aire du parallélogramme défini par deux vecteurs, du volume défini par trois vecteur, ... Restons pour l'instant à 2d, donnons nous un repère cartésiens [6] et deux

5. Pour être tout à fait honnête : non, c'est trop tôt. Ces concepts ne sont pas algébrique, mais *topologique*, c'est à dire que nous devons définir la notion de distance. Il se trouve que si nous choisissons une bonne topologie, nous pouvons faire coïncider ce que nous faisons maintenant avec les définitions topologique que nous rencontrerons dans un cours de mathématiques plus avancé.

6. Ahan ... Voilà le mot magique qui fait coïncider les concepts algébriques et topologique. Nous ne pouvons pas parler de repère cartésien sans introduire celui du *produit scalaire* qui nous amène ensuite directement à introduire les distances. N'étant pas des mathématiciens, nous nous permettons de parler des choses que nous n'avons pas encore introduit rigoureusement.

vecteurs $e_1 = (x_1, y_1)$ et $e_2 = (x_2, y_2)$. Soit S la surface du parallélogramme enclos par ces deux vecteurs.

Donnons nous maintenant une application linéaire A et transformons les deux vecteurs $e_1' = Ae_1$ et $e_2' = Ae_2$. Soit maintenant S' la surface enclos par les deux vecteurs e_1' et e_2'. Comme S et S' sont deux nombres (nous disons que ce sont des scalaires), nous pouvons toujours écrire

$$S' = aS \tag{6.4}$$

Ce qui paraît magique est que ce nombre a ne dépend pas des vecteurs e_1 et e_2. Nous aurions pu prendre n'importe quel vecteurs, nous aurions toujours trouvé le même coefficient de proportionnalité, qui est une propriété de l'application linéaire A. Ce nombre est appelé le *déterminant* de l'application linéaire A, et on le note $det(A)$. Nous démontrerons à la fin de cette section pourquoi a ne dépend que de l'application linéaire, et non des vecteurs ; acceptons cela pour l'instant.

En fait, quelle est l'aire du losange enfermé par les deux vecteurs e_1 et e_2 ? Un peu de géométrie niveau collège (multiplier la base par la hauteur) nous donne le résultat :

$$S = x_1 y_2 - x_2 y_1 \tag{6.5}$$

En plus, la surface que nous avons défini a un signe et peut-être négative : cela dépend si le vecteur e_2 s'atteint en tournant e_1 dans le sens des aiguilles d'une montre ou l'inverse. Ceci a peu d'importance pour nous pour l'instant.

Revenons à notre application linéaire. Quelle est ce nombre $det(A)$? Donnons nous une base, disons par définition $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$. Pour représenter matriciellement A dans cette base, nous calculons $e_1' = Ae_1 = (a, c)$ et $e_2' = Ae_2 = (b, d)$. A est alors représenté par un tableau carré

$$mat(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

La surface entre e_1 et e_2 est $S = 1$. La surface entre e_1' et e_2' est

$$S' = ad - bc$$

d'après notre relation 6.4, nous en déduisons que

$$det(A) = ad - bc$$

Il est très important d'insister sur le point ci-dessus : la représentation matricielle de l'application A est arbitraire et dépend du choix de notre base.

Dans une autre base par exemple, nous aurions eu

$$mat(A) = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

et le déterminant aura été

$$det(A) = a'd' - b'c'$$

mais comme $det(A)$ est un invariant géométrique et ne dépend pas de la représentation matricielle de A, quelque soit la base choisie, nous devons avoir

$$ad - bc = a'd' - b'c'$$

Système dégénérée. Les mathématiciens utilisent parfois des termes qui ont des connotations particulières en langage de tous les jours. Considérons une application linéaire A, qui appliquée à deux vecteurs e_1, e_2 non-colinéaire produit deux vecteurs colinéaire e'_1, e'_2. L'aire entre e'_1 et e'_2 est nulle, nous pouvons donc déduire sans calcul que

$$det(A) = 0$$

De telles applications linéaires sont un peu particulier est posent souvent des problèmes.

Voyons un peu les conséquences de cette dégénérescence. Quand nous disons que e'_1 et e'_2 sont colinéaire, nous voulons dire qu'il existe un scalaire b tel que

$$e'_1 = be'_2$$

ou encore $e'_1 - be'_2 = \vec{0}$. Considérons maintenant le vecteur $f = e_1 - be_2$. D'après ce que nous venons de dire,

$$Af = \vec{0}$$

c'est à dire qu'il y a des vecteurs que notre application linéaire transforme en vecteur nul.

Essayons maintenant de résoudre le système d'équation linéaire

$$Ax = b$$

si nous trouvons une solution x_0, il est évident alors que $x_0 + f$ est aussi solution : ce système linéaire n'a pas de solution unique ! Aïe. L'équation est mal posée, il faut faire quelque chose de plus pour s'en sortir et "lever la dégénérescence". Nous rencontrerons souvent ce genre de problème. Pour l'instant, il nous faut retenir le message suivant : $det(A) = 0$ veut dire source potentiel de problème.

Pourquoi $det(A)$ est un invariant ?

Pourquoi la surface entre deux vecteurs est défini par la relation (6.5) ? Prenons d'abord, pour simplifier, un vecteur $e_1 = (x_1, 0)$ et un vecteur $e_2 = (x_2, y_2)$. La base multipliée par la hauteur nous donne $S = x_1 y_2$. Prenons maintenant un vecteur $e_1 = (x_1, y_1)$ quelconque. Nous pouvons tourner les deux vecteurs pour que e_1 soit à nouveau le long de l'axe x. Nous pouvons accepter que la rotation ne change pas la surface[7]. La matrice de rotation est donnée par

$$R = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{r_1} & \frac{y_1}{r_1} \\ -\frac{y_1}{r_1} & \frac{x_1}{r_1} \end{pmatrix}$$

où $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$. Nous vérifions bien que $Re_1 = (r_1, 0)$. De même, nous avons

$$Re_2 = (\text{qqchose}, (x_1 y_2 - x_2 y_1)/r_1)$$

et d'après ce que nous venons de voir, la surface est

$$S = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

Déterminant vu comme une *forme n-linéaire* alternée. Cette façon de calculer la surface et de remonter au déterminant est un peu pénible. Si il s'agit de calculer le volume enclos par trois vecteurs, ou l'hyper-volume enclos par quatre, ... cela devient infaisable.

Mais nous pouvons faire beaucoup mieux que cette méthode pédestre, en revenant aux principes de base. Reprenons le cas à deux dimensions et intéressons nous à la surface S enclos par deux vecteurs e_1 et e_2. Nous l'écrirons $S(e_1, e_2)$. Remarquons que $S(e_1, e_2)$ est une *fonction* de deux vecteurs, auxquels il associe un nombre. Nous exigeons de cette fonction que

- $S(e_1, e_2) = -S(e_2, e_1)$ puisque comme nous l'avons dit, nous considérons les surfaces algébriques. Remarquons que cette relation nous impose de plus d'avoir $S(e_1, e_1) = 0$, ce qui nous convient bien puisque la surface enclos par deux vecteurs colinéaires doit être nulle.
- $S(e_1, ae_2) = aS(e_1, e_2)$ où a est un nombre : la surface est une fonction linéaire de ses arguments. si un des vecteurs est doublé, la surface double également. La règle de permutation nous impose d'ailleurs la relation symétrique $S(ae_1, e_2) = aS(e_1, e_2)$.

7. Nous sommes en train d'utiliser sans honte des concepts topologiques euclidien que nous n'avons jamais définis. Il nous faut un cours de géométrie pour aller au delà de ces concepts très familier et très particuliers. Ces "démonstrations" sont au plus des illustrations, que nous utilisons parce que le lecteur en est familier.

– $S(e_1, e_2 + e_3) = S(e_1, e_2) + S(e_1, e_3)$: même remarque sur la linéarité.

Donnons nous maintenant deux vecteurs de bases u_x et u_y pour lesquels nous avons $S(u_x, u_y) = 1$. Nous pouvons écrire les deux vecteurs e_1 et e_2 comme combinaison de ces vecteurs

$$\begin{aligned} e_1 &= x_1 u_x + y_1 u_y \\ e_2 &= x_2 u_x + y_2 u_y \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant utiliser les "lois" de la surface pour calculer $S(e_1, e_2)$:

$$\begin{aligned} S(e_1, e_2) &= S(x_1 u_x + y_1 u_y, x_2 u_x + y_2 u_y) \\ &= x_2 S(x_1 u_x + y_1 u_y, u_x) + y_2 S(x_1 u_x + y_1 u_y, u_y) \\ &= x_1 x_2 S(u_x, u_x) + x_2 y_1 S(u_y, u_x) + x_1 y_2 S(u_x, u_y) + y_1 y_2 S(u_y, u_y) \\ &= -x_2 y_1 S(u_x, u_y) + x_1 y_2 S(u_x, u_y) \\ &= x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{aligned}$$

Bien sûr, cette relation se généralise à n-dimension.

Déterminant et intégrale multiple. [to be continued].

6.5. Représentation matricielle des applications linéaires.

6.6. Valeurs et vecteurs propre.

6.7. Relation entre équations différentielles et algèbre linéaire.

Index

A. Les fonctions multi-valuées.

Éclaircir le lien entre les fonctions multi-valuées et un paramétrage qui le transforme en fonction vectorielle uni-valuée. Parler de la détermination par continuité. Exemple typique de paramétrage : la colonne du tableau. On peut pousser éventuellement assez loin pour parler des surfaces de Rieman, je crois qu'on peut le faire sans trop de snobisme, à la Arnold.

B. Continuité, convergence et les autres.

Soit une fonction $f(x)$. Instinctivement, quand nous parlons de fonction “continue”, nous imaginons un graphe sans “saut”. Si nous voulions formaliser l'absence de saut en un point x_0, nous dirions que la valeur de fonction autour du point x_0 ne doit pas être trop différent de la valeur de la fonction au point x_0.

Les mots “autour”, “pas trop différent”, ... doivent recevoir un sens précis. Cauchy a fait ce travail pour nous : $f(x)$ est continue en x_0 si quelque soit la précision ϵ que je choisi, je peux rendre la différence entre $f(x)$ et $f(x_0)$ plus petit que cette précision pourvu que je restreint x à un voisinage de x_0. Cela nous garantit qu'il n'y a pas de “sauts”.

Prenons par exemple la fonction $f(x) = x^2$ au point $x_0 = 2$ et $f(x_0) = 4$. Si je veux que $|f(x) - 4| < 0.01$, il suffit que j'exige de x d'être dans l'intervalle $[1.998, 2,002]$; Si je suis plus exigeant et que je demande $|f(x) - 4| < 0.01$, je doit restreindre x à l'intervalle $[1.9998, 2,0002]$. Le fait est que si f est continue en $x_0 = 2$, quelque soit mes exigences, je peux trouver un voisinage de x pour les satisfaire. En langage mathématique,

$$\forall \epsilon,\ \exists \eta \ \text{ tq } \ |x - x_0| < \eta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Une fois muni de cet instrument “je peux approcher ma fonction autant que je veux si j'approche suffisamment ma variable”, nous pouvons l'appliquer à des situations proches.

Prenons par exemple une suite a_n. Nous disons que cette suite converge vers la valeur a si je peux rendre la différence entre a_n et a aussi petit que je veux ; il me suffit de prendre des n suffisamment grand :

$$\forall \epsilon,\ \exists N \ \text{ tq } n > N \implies |a - a_n| < \epsilon$$

C'est le sens qu'à donné Riemann dans les années 1840 à l'intégrale de la fonction $f(t)$: Nous pouvons nous donner un N, échantillonner l'intervalle

$[x_A, x_B]$ par pas de $1/N$ et construire la quantité

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} f_n dt$$

Si la suite S_N est convergente et converge vers la quantité S, nous disons alors que $\int_{x_A}^{x_B} f(t)dt$ existe et sa valeur est S. Le grand travaille de Riemann était de trouver les conditions auxquelles la fonction f doit obéir pour que cette intégrale existe. Il a démontrer que si la fonction est continue sur l'intervalle d'intégration, l'intégrale existe toujours. Il a étendu un peu plus la classe des fonctions intégrables.

Des mathématiciens ont ensuite essayé d'aller encore plus loin et s'intéresser aux fonctions que les humains rencontrent rarement. Comme par exemple la fonction

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ &= 1 \text{ sinon} \end{aligned}$$

N'essayez même pas de tracer cette fonction. Cette effort leur a pris quelques 80 années supplémentaire et a donné lieu à l'intégrale de Lebesgue ; c'est l'une des très belles pages de l'histoire des mathématiques. Le lecteur intéressé trouvera le récit ailleurs.

C. Que sont les nombres ?

Illustrer la différence entre ensemble algébrique et topologique en introduisant la notion de proximité et de distance. Rappeler la controverse fin XIX sur l'existence de nombre non-algébrique. C'est l'endroit pour discuter du concept de continuité et l'existence physique des nombres réel.