Dynamique du solide.

17th May 2004

1. Introduction.

Le but de ce devoir est d'obtenir les équations du mouvement d'un corps solide. Jusque là, nous n'avions traité que les particules ponctuelles, c'est à dire des objets entièrement caractérisés par la donnée de leur trois coordonnées (x, y, z par exemple). Les corps solides ont plus de degrès de liberté que trois, mais pas beaucoup plus. En effet, on peut considérer un corps solide comme un ensemble de points materiels *rigidement* attaché les uns aux autres. Dans le mot rigidement, est contenu une réduction importante des degrès de liberté. Pour plus de simplicité (sans réel perte de généralité), considérons des mouvement bidimentionnels, c'est à dire des particules contraintes à rester dans un plan, qu'on appelera xy par la suite. Dans ce cas, si chaque particule était libre, elle aurait 2 degrès de liberté et n particules en aurait $2n$. Supposons maintenant que ces particules font parti d'un corps solide, c'est à dire qu'elles conservent leur position relative vis à vis des autres. Dans ce cas, le nombre de degrès de liberté de l'ensemble du solide est seulement 3 : il suffit de se donner les 2 coordonnées d'un point quelconque du solide, plus une rotation θ autour de ce point pour caractériser entièrement le solide[1] . Nous allons donc écrire un lagrangien pour ces trois degrès de liberté, et déduire les équations du mouvement de notre solide. On demmarera doucement, en supposant le solide simplement formé de deux points. On corsera ensuite le problème en l'étendant à n points discret. Enfin, nous considérerons le cas d'une distribution continue de masse. On verra également un cas particulier de contrainte, le roulement sans glissement, qui n'est pas une contrainte géométrique habituelle, mais impose une relation entre les différentielles des degrès de liberté.

2. Solide formé de deux points.

Soit deux particules de masse m_1 et m_2 attaché rigidement l'une à l'autre par une barre de longueur l. Les positions des deux particules sont notées $\mathbf{r}_1$ et $\mathbf{r}_2$ (les lettres non italisées en gras désigne des vecteurs).

a. Ecrire les coordonnées x_i, y_i de ces deux masses en fonction des coordonnées x_g, y_g du centre d'inertie et de l'angle θ que fait la barre avec l'axe x. En déduire l'expression de l'énergie cinétique du système sous la forme

$$T = M\dot{\mathbf{r}}_g^2 + I\dot{\theta}^2 \tag{1}$$

Que vallent M et I ? I est appelé le moment d'inertie et joue un rôle équivalent à la masse dans les problème de rotation du solide.

b. On suppose le solide libre, c'est à dire soumis à aucune force exterieure. Ecrire alors les équations Les variables $\mathbf{r}$ et θ étant cyclique dans ce cas,

[1] Pour un solide à trois dimension (un vrai solide), le nombre de degrès de liberté serait de 6 (pourquoi ?).