Cours de mécanique, résumé.

17th May 2004

Abstract

Le but de ce texte est de résumé l'ensemble des concept que nous avons rencontré lors du cours. Nous nous contenterons de simplement rappeler les concepts, sans les démontrer. Pour ce dernier, revisiter le cours.

1 Equilibre d'un système mécanique.

Nous avons commencé le cours par le concept d'équilibre d'un système mécanique. Nous avons supposé que nous savons ce qu'est une force, et avons défini deux notions très importante : le travail et le potentiel. Le travail d'une force pour un déplacement infinitésimal est définie par $\delta W = \mathbf{F}.d\mathbf{r}$. Pour un déplacement fini, nous avons juste à integrer cette expression :

$$W = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}.d\mathbf{r}$$

où $\mathcal{C}$ est la trajectoire choisie lors du déplacement. La force $\mathbf{F}$ est une fonction des coordonnées, et le travail dépend donc de la trajectoire suivie. Si cependant, la force dérive d'une potentielle, c'est à dire que l'on peut écrire $\mathbf{F} = -\nabla U$, le travail effectué ne dépend plus de la trajectoire en entier, mais seulement de ses extrémités : $W = U(1) - U(2) = -\Delta U$.

définition 1. Un système mécanique est à l'équilibre si la somme des forces qui lui sont appliquées est nulle.

En réalité, cette définition est souvent peut utilisable telle quelle. Un système mécanique est souvent astreint à des contraintes géométriques, comme par exemple un point qui doit rester sur une ligne où un autre qui doit rester à distance fixe d'un troisième. Les contraintes géométriques exercent des forces sur le système mécanique qui ne sont pas connu d'avance : on ne peut connaitre à priori que la direction selon laquelles elle s'exercent. L'utilisiation de la définition (1) telle quelle nécéssite alors l'introduction des inconnues supplémentraires qui sont les forces de réaction des contraintes.

Le principe des travaux virtuels nous évite l'obligation d'utiliser ces variables additionnelles.

définition : principe des travaux virtuels. Un système mécanique est à l'équilibre si le travail des forces extérieures est nul pour *tout* déplacement infinitésimal *compatible* avec les contraintes géométriques.

En faite, les contraintes géométriques diminuent le nombre de degrés de liberté et le principte des travaux virtuels utilise cette réduction pour éviter l'introduction des variables additionnelles. Nous avons vu le pourquoi dans le cours.

Si les forces dérivent de potentielles, on peut également expliciter l'énergie potentielle totale du système en fonction des *seul* degrès de liberté, et chercher le minimum de cette fonction pour obtenir les positions d'équilibre. La plupart des TD de ce chapitre était sur des système à un ou deux degrès de liberté (cadres mobiles, échelle contre le mur, ...). Nous avons également visité quelques problèmes plus compliqués comme l'équilibre d'un corps flottant, le flambage d'une barre et la capillarité[1].

[1]qui bien sûr sont trop compliqués pour un examen ... N'ayez crainte.

2 Cinématique.

Choix du système des coordonées. La mécanique étant la science des mouvements, nous avons consacré un cours à définir ce que sont les vitesses ($d\mathbf{r}/dt$) et les accélérations ($d^2\mathbf{r}/dt^2$). Ces expressions sont très simples tant que l'on utilise le système de coordonnées cartésien. Il se trouvent que les forces sont parfois plus simple si on utilisait d'autres systèmes de coordonées (comme par exmple l'interaction gravitationnelle entre deux masses). Comme la relation de Sir Newton relie les accélérations aux forces, nous avons vu qu'il peut être parfois judicieux d'utiliser d'autres systèmes de coordonnées. Nous nous sommes contenté dans ce cours à un seul autres système : les coordonnées polaires[2]. Dans ce système, une particule est reperée par ses coordonnées (r, θ)

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= r\mathbf{u}_r \\
\mathbf{v} &= \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta \\
\mathbf{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta
\end{aligned}$$

On obtient facilement ces relations en se souvenant que $d\mathbf{u}_r/dt = \dot{\theta}\mathbf{u}_\theta$ et $d\mathbf{u}_\theta/dt = -\dot{\theta}\mathbf{u}_r$. Un résultat important est le carré de la vitesse $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$qu'on aura à utiliser souvent pour l'expression de l'énergie cinétique.

Changement de repère. Soit deux repère $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_1$ en mouvement l'un par rapport à l'autre. Nous supposons connu ce mouvement. Connaissant la vitesse et/ou l'accélération d'une particule dans un des repères, nous avons vu commant obtenir ces qantités dans l'autre repère. Nous avons étudié divers quantité comme l'accélération de Coriolis. Un resultat extremement important est obtenu quand le mouvement relatif des deux repère est uniforme : dans ce cas, l'accélération mesurée d'une particule est la même dans les deux repères. Cela nous donnera plus tard *la* relation entre les repères Gallileéen.

Les TD de ce chapitres ont dû vous habituer à utiliser les coordonnées polaires, et nous avons également vu l'origine de la déviation vers l'est pour la chute des corps et le pendule de Foucault.

3 Dynamique I.

Sous l'action des forces, les objets changes de positions, de vitesse, ... Monsieur Newton a découvert qu'il existe des repères particuliers, appelés Galiléen, dans lesquelles il existe une relation très simple entre la force appliquée à une particule et son accélération : $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. La quantité m, appelé la masse, et le coefficient de proportionnalité entre la force et l'accélération. Et nous avons vu, grâce aux relations obtenues auparavent, que tout repère en mouvement uniforme par rapport à un repère Gallileéen est lui même Gallileéen. Nous avons revu l'expression de quelques forces souvent rencontré dans la nature : la force de la gravité (proche de la surface de la terre) $m\mathbf{g}$, la force magnétique exercée sur une particule chargée $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, la force exercée par un ressort $-k(r - l_0)\mathbf{u}_r$ etc. Nous avons également vu les forces de frottement visqueux $-\lambda\mathbf{v}$ et solide.

Lors des TD, nous nous sommes entrainées à obtenir les positions (en fonction du temps) des particules en integrant la relation de Newton. Ce chapitre a également fait l'objet d'un DM (mouvement d'un projectile, CAPES 96).

4 Dynamique II.

Dans cette partie du cours, nous avons dégagé les loi de conservations qui peuvent nous donner directement des intégrales premières.

[2]Dans l'ensemble de ce cours, nous nous sommes bornés à des problèmes à deux dimensions, *i.e.* des mouvements confinés à un plan.

La quantité du mouvement (ou l'impulsion) d'un système est $\mathbf{p} = \sum m_i \mathbf{v}_i$. La relation fondamentale de la dynamique peut se réecrire comme $d\mathbf{p}/dt = \sum \mathbf{F}_i$. Nous avons montré, en utilisant la relation entre l'action et la réaction, que dans cette expression comptait seule les forces extérieures au système. Si la projection de la somme des forces selon une direction est nulle, l'impulsion selon cette direction est une constante du mouvement.

Le moment cinétique, (ou moment angulaire) par rapport à un point O est $\mathbf{L} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$. Le moment des forces par rapport à ce point est $\mathbf{N} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$. Nous avons démontré que $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{N}$. Un cas important est celui où les forces sont centrales, auquel cas le moment cinétique (un vecteur donc) est une constante du mouvement.

L'énergie cinétique est $T = (1/2) \sum m_i v_i^2$, et nous avons vu que si les forces dérivent des potentielles U, il existe une quantité très importante, appelée énergie (totale) du système $\mathcal{E} = T + U$ qui est conservé lors du mouvement. L'énergie est une quantité scalaire.

Les TD de ce chapitre avait pour objet de montrer comment l'obtention des lois de conservations peut être utilisée pour faciliter la résolution des equations du mouvement.