Mouvement dans un champ de force centrale.

Rappel pour la gravitation.

- $\mathbf{F} = (-K/r^2)\mathbf{u}_r$, et donc $U(r) = -K/r$.
- Le moment cinétique $\mathbf{L}$ est une constante du mouvement ($\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$).
- Pour L donné, il existe une trajectoire d'énergie minimum qui est circulaire. Son rayon est $r^* = L^2/mK$, et sa périoide τ obéit à $\tau^2 = 4\pi^2(m/K){r^*}^3$
- Pour la gravité, $K = GMm$, $G = 6.7\,10^{-11}$S.I., $M_{\text{Terre}} = 6\,10^{24}$kg, $M_{\text{lune}} = 7\,10^{22}$kg, $M_{\text{Soleil}} = 2\,10^{30}$kg, $R_{\text{terre}} = 6400$ km, $R_{\text{lune}} = 1800$ km, $R_{\text{Soleil}} = 700000$ km.

1. A quelle vitesse Obelix doit lancer son javelot (horizontalement) pour qu'il ne retombe jamais ? Quelle est la période de révolution de ce javelot ? On suppose de façon très réaliste qu'il n'y a pas de frottement d'air sur le javelot. Même question si Obelix se trouve sur la lune (volume co-édité avec Hergé).

2. A quelle altitude doit on placer un satelite geostationnaire ? Quel travail faut il fournir pour le placer là ? Quelle fraction, au mieu, de ce travail peut être fourni par la rotation de la terre ?

3. En supposant l'orbite de la lune autour de la terre circulaire, quelle est la distance terre–lune ? Même question pour la distance terre–soleil.

4. Un satelite se trouve sur un orbite circulaire à distance r_0 du centre de la terre. Quelle est son energie potentielle ? Son énergie cinétique (exprimé en fonction de r_0) ? Son énergie totale ? Sa vitesse de translation?

A cause du frottement de l'air, son énergie mécanique décroît à chaque révolution. Supposons qu'après une révolution, son orbite change de r_0 à $r_0 - \Delta r$. De combien change sa vitesse ?(help: calculer la variation de l'énergie totale et de l'énergie potentielle, et trouver la variation de l'énergie cinétique). La vitesse augmente ou diminue ?

5. Mouvement dans un potentiel harmonique. Supposons qu'une particule se trouve dans un potentiel harmonique $U(r) = Kr^2$ où $K > 0$ est une constante. C'est par exemple, le potentiel dans lequel baigne un atome dans un cristal. Ce problème peut se traiter soit en coordonnées polaire, soit en coordonnées cartesienne. Nous le traitons d'abord en polaire.

1. Démontrer que le moment cinétique est une constante du mouvement, et donc que le mouvement est confiné à un plan. On repère la particule par ses coordonnées polaires dans ce plan.
2. En exploitant la conservation du moment cinétique, écrire l'énergie totale du système en fonction de r et de $\dot{r}$. Peut on identifier un potentiel effectif ?
3. Pour un moment cinétique donnée, trouver les trajectoires circulaires : quelle est leur rayon et leur période de révolution ? Quelle est la relation entre l'énergie totale et le moment cinétique pour ces orbites ?

4. Le potentiel, en cartésien, s'écrit $U(x, y) = K(x^2 + y^2)$. Ecrire les équations du mouvement en coordonnées cartesiennes, les résoudre. Pour quelles conditions initiales la trajectoire est circulaire ? Quelle est alors la relation entre le rayon et le moment cinétique ? Entre le moment cinétique et l'énergie totale ?

6. Mouvement dans un potentiel en $1/r^2$ Une particule se trouve dans un potentiel $U(r) = -K/r^2$, où $K > 0$ est une constante. Répondre aux questions 1 et 2 du problème précédent. En étudiant la forme du potentiel effectif, démontrer que le moment cinétique doit être inférieur à une certaine quantité pour qu'un état lié puisse exister. Existe-t-il des trajectoires circulaires ?

7. Chute d'un satellite. Un sattelite est placé sur un orbite circulaire à r_0. On diminue brusquement sa vitesse à $v_1$en exerçant une poussée opposée à sa vitesse initiale. Que doit être v_1 pour que le sattelite retombe sur terre ? A.N. $r_0 = 1.1R$ (R rayon de la terre). Quelle est sa vitesse sur cette orbite circulaire ? quelle doit être sa vitesse pour qu'elle tombe ?

Help : Après son changement de vitesse, le satellite va décrire une ellipse de paramètre p, d'excentricité e et de demi-axe a. Ces trois quantité sont reliées par $a = p/(1 - e^2)$. L'equation de l'ellipse est $r = p/(1 + e \cos\theta)$. A l'instant $t = 0$, le satellite est à distance r_0 du centre de la terre, et possède une vitesse $v_1$perpendiculaire au rayon vecteur.

1. Quelle est la distance minimum (en fonction de p et e)entre le satellite et le centre de la terre ? Il y a chute si cette distance est égale au rayon de la terre R . Obtenir une relation entre p, e et R pour qu'il y ait chute.

2. En utilisant la relation entre p, e et a, éliminer e de la relation précédente et démontrer qu'il y a chute si $p/R^2 = 2/R - 1/a$.

3. a ne dépend que de l'énergie totale du satellite : $E = -K/2a$ (voir le cours). Après le changement de vitesse (qu'on a supposé instantanée), l'énergie est une quantité conservée. Calculer sa valeur en fonction de $v_1$et de r_0. En déduire une relation entre $1/a$, $1/r_0$ et v_1^2.

4. p ne dépend que du moment cinétique, autre quantité conservée après le changement de vitesse : $p = L^2/mK$. Calculer p en fonction de r_0 et de v_1.

5. En utilisant les relations obtenues aux (3) et (4), et en les injectant dans (2), obtenir la condition sur v_1, en fonction de R et r_0, pour qu'il y ait chute.

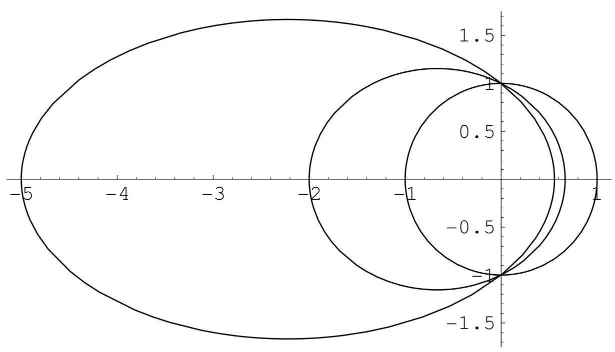

Figure 1: Ellipses à $p = 1$. $e = 0, 0.5, 0.8$