Mécanique Analytique.

17th May 2004

Résumé.

Pour un système à n degrès de liberté $q_1, q_2, ...q_n$, le lagrangien est défini par $\mathcal{L} = T - U$, où T est l'énergie cinétique est U l'énergie potentielle. Les équations du mouvement (appelé équation d'Euler–Lagrange) sont

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

La démarche à suivre pour résoudre un problème est (i) dénombrer les degrés de libertés du système n et choisir autant de variable pour décrire le système ; (ii) écrire l'énergie cinétique et potentielle en fonction de ces variables ; (iii) en déduire le Lagrangien et les équations du mouvement.

Exercices.

1. Un objet de masse m peut glisser sans frottement sur un plan incliné d'angle α. Déduire l'équation du mouvement selon la verticale z. (Fig1)

2. Même question que précedemment, mais cette fois, le plan incliné se meut horizontalement à vitesse constante V. Est ce qu'un observateur associé au repère du plan peut déterminer si il bouge ou non en mesurant simplement la chute de l'objet ?

3. Même question qu'au 2, mais cette fois, le plan incliné se meut horizontalement à *accélération* constante. Déduire d'abord la vitesse de l'origine du repère associé au plan incliné (en fonction du temps). En déduire ensuite le lagrangien pour l'objet et son équation du mouvement selon z. Répondre à la question philosophique du 2.

4. On suppose mainteant que le plan est immobile, mais que sont angle oscille faiblement : $\alpha = \alpha_0 \sin \omega t$. Déduire l'équation du mouvement.(Fig.2);

4. Une tige tourne à vitesse angulaire constante ω dans le plan horizontal autour d'un point fixe O. Un objet de masse m peut glisser sans frottement le long de la tige. En déduire son équation du mouvement (comparer avec exercice analogue en Dynamique I).(Fig.3)

5. Une masse m est accroché par un fil à un point fixe O. La longueur du fil oscille dans le temps : $l = l_0 + l_1 \sin \omega t$. En déduire l'équation du mouvement. Gravité selon z.(Fig.5)

5. Une masse m_1 est accroché à un point fixe par un ressort de raideur k (potentiel du ressort $U(r) = kr^2/2$). Déduire sa position d'équilibre. Déduire son équation du mouvement pour les faibles équarts à cette position.(Fig.4)

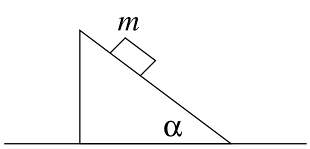
5. La masse $m_1$est astreinte à rester sur la tige horizontal Δ, sur laquelle elle coulisse sans frottement. La masse m_2 est attachée par une barre rigide de longueur l à la masse m_1. Le système ayant deux degrés de liberté, nous utiliserons x_1 (l'abscisse de m_1) et θ (l'angle de la barre avec la verticale) comme variable pour décrire le système. (Fig.6)

1. Obtenir le lagrangien de ce système.
2. En utilisant le fait que x_1n'apparait pas explicitement dans le lagrangien, démontrer que
$$(m_1 + m_2)\dot{x}_1 + m_2 l \cos\theta.\dot{\theta} = Cte.$$
3. On choisit les conditions initiales telle que cette constante soit nulle. Integrer cette relation pour trouver une relation entre $x_1$et θ. Utiliser comme C.I. $x_1(0) = 0, \theta(0) = 0$.
4. En utilisant cela, démontrer que m_2, de coordonnées x_2, y_2 décrit une ellipse.
5. En utilisant les relations trouvé en 2 et 3, réecrire le lagrangien seulement en fonction de θ et $\dot{\theta}$ (en éliminant x_1). En déduire la pulsation d'oscillation pour les faibles amplitude.

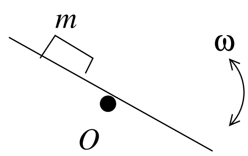
6. Même exercice qu'avant, mais on suppose la masse $m_1 = 0$, et le point d'accroche soumis à une oscillation de pulsation ω. Déduire les équations du mouvements.

7. Même exerercice qu'avant, mais on suppose la droite Δ verticale.

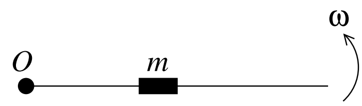
Figures.



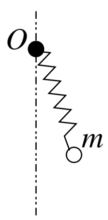
(1)



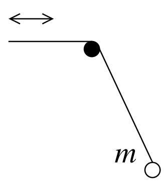
(2)



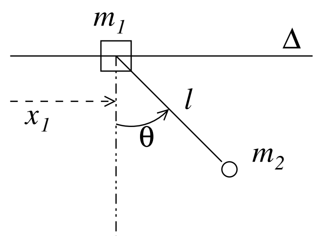
(3)



(4)



(5)



(6)