TD Mécanique du solide.

17th May 2004

1. Moment d'inertie. Pour chacun des objets suivants, calculer les centres d'inertie, et le moment d'inertie par rapport à ce centre. (a) un disque homogène de masse M et de rayon r ; (b) un rectangle homogène de masse M et de côté $2a$ et $2b$; (c) un disque homogène, intitialement de masse M et de rayon r dans lequel on a taillé un trou carré de côté $2a$; (d) une barre de masse m et de longeur l au bout de laquelle on a acroché un disque de rayon r et de masse M.

2. Oscillation d'un carré. Soit un carré de côté $2a$ et de masse M, suspendu par un de ses coin. Quelle est sa position d'équilibre ? Obtenir l'équation des petites oscillations autour de cette position.

3. Solide accélérée. Soit un solide de masse M, de moment d'inertie I accroché par un de ses points A à une droite horizontal Δ. Soit l la distance de son centre de masse G à ce point A. Quelle est sa position d'équilibre ? Le point A est accéléré uniformément le long de Δ : $x_A = \gamma t^2/2$. Démontrer que ce système possède un seul degrés de liberté. On choisira l'angle θ que fait l'axe AG avec la verticale comme ce degrés de liberté. Obtenir l'équation de mouvement de θ. Quelle est la position d'équilibre de θ en fonction de M, I, l, g, γ ? Ecrire l'équation d'évolution de θ autour de cette position.

4. Remonter une pente. Un cylindre de masse M et de rayon r roule sans glissement le long d'un plan horizontal à vitesse v. Quelle est son énergie cinétique ? Le cylindre arrive devant un plan incliné. Quelle est la hauteur maximum qu'il peut atteindre ? Même question si le cylindre glissait sans frottement et sans roulement.

5. Descendre une pente. Le même cyclindre roule sous glissement le long d'un plan incliné d'un angle α. Obtenir l'équation du mouvement de son centre. (Note : le système possèdant un seul degrès de liberté, choisir la hauteur y comme degrès de liberté).

6. Un peu compliqué. Un cyclindre de masse m et de rayon r est placé à l'interieur d'un autre cylindre de rayon R ($R \gg r$) (voir fig.1). Il roule sans glissement. Obtenir l'équation de son mouvement pour de petite oscillation autour du point le plus bas. Help : obtenir d'abord la relation entre l'angle de rotation propre du cylindre θ et l'angle ϕ du centre de gravité avec la verticale.

7. Pendule d'Huygens. A la périphérie d'un disque de masse negligeable et de rayon r, nous avons attaché une particule ponctuelle de masse m. Le disque peut rouler sans glissement ***sous*** un plan (voir figure 2). Nous appelons O le centre du disque et G le point d'attachement du point (qui est le centre d'inertie du système). Le système ayant un seul degrès de liberté, on choisit l'angle θ comme ce degrés.

1. En utilisant la condition de roulement sans glissement, démontrer que $\dot{x}_O = r\dot{\theta}$.
2. Utiliser cette relation pour obtenir les coordonnées x_G,y_G en fonction de θ. Exprimer ensuite l'énergie cinétique et potentielle en fonction de theta.

3. Le problème est encore un peu compliqué comme cela. Mais on fait un autre changement de variable $s = 2\sin(\theta/2)$. Obtenir alors l'énergie cinétique et potentielle en fonction de $\dot{s}$ et s. (Help : $\cos\theta = 2\cos^2\theta/2 - 1 = 1 - 2\sin^2\theta/2$)

4. Ecrire le lagrangien, obtenir l'équation d'évolution de s.

Comme vous le constatez, la période des oscillation ne dépend pas de l'amplitude. Pour un pendule simple, ceci n'est vrai que dans le régime des faibles amplitude. La pendule d'Huygens permet de corriger l'effet des variations d'amplitude sur la période.

8. Bis pour les vraiment intéressés. Vous pouvez vous demander pourquoi il a fallu mettre le cylindre en *dessous*. Vous pouvez reprendre le problème précédent en posant le cylindre au *dessus* du plan, et refaire le calcul. Si vous tracez le potentiel en fonction de s, vous vous rendrez compte qu'il y a une singularité à $s = 0$. Pouvez vous discuter intuitivement l'effet de cette singularité ?

9. L'expérience de Trouton–Noble. Cette expérience a joué un très grand rôle à la fin du XIXème (fig.3). Deux charges $+q$ et $-q$ (de masse m) sont fixées par une barre rigide. Le centre O de la barre est asreint à bouger à vitesse constante v le long d'une droite. La barre réside dans un plan horizontal. On repère la position de la barre par son centre O et l'angle θ avec l'horizontal.

1. Calculer, en fonction de θ, le champ magnétique que chaque charge crée au niveau de l'autre. En déduire la force de Lorentz sur chaque charge en fonction de l'angle θ, et le moment des forces par rapport au point O.

2. Le point O est suspendu à un fil qui exerce un couple $-k\theta$. Trouver en fonction de la vitesse v, l'équation d'évolution de l'angle θ, et la position d'équilibre.

3. Refaire le même calcul du point de vue d'un observateur qui bouge avec le point O.

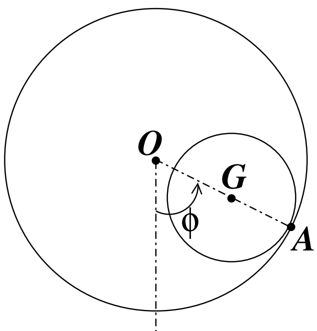

fig. 1

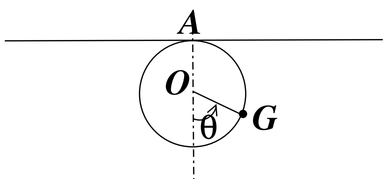

fig.2

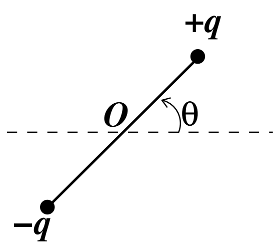

fig.3