Examen de Mécanique

Licence Sciences Physiques, Janvier 2003

Notes sur les notations.

1. Les vecteurs sont notés par des lettres en **gras** non *italisées*. Ainsi, $\mathbf{F}$ et $\overrightarrow{F}$ désigne la même chose.
2. Les vecteurs unitaires dans les direction x, y, z sont notés, respectivement, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

A- Chute d'une échelle.

Une barre de masse m et de longueur l est posée contre un mur (voir figure 1). Cette barre est soumise à deux contraintes géométriques : (i) une des extrémités de la barre (point A) doit rester sur le mur vertical (qu'on choisit comme l'axe y) ; (ii) l'autre extrémité (point B) doit rester sur le plan horizontal (qu'on choisit comme l'axe x). Nous supposerons dans la première partie de ce problème que la masse de la barre est concentrée en son centre : le point G de la barre possède une masse m, le reste de la barre est de masse négligeable. La force de gravité est selon $-y$: $\mathbf{F}_g = -m.g.\mathbf{j}$.

1. Démontrez que ce système possède un seul degrés de liberté. On choisira l'angle θ que fait la barre avec la verticale comme ce degrés de liberté.
2. Trouvez les coordonnées x et y des points A, B et G en fonction de θ et de l. Montrez (si vous pouvez, pas nécessaire pour la suite) que le point G est sur un cercle dont vous préciserez le centre et le rayon.
3. Écrire l'expression de l'énergie cinétique T, de l'énergie potentielle U et du lagrangien $\mathcal{L}$ en fonction de θ et (éventuellement) de $\dot{\theta}$.
4. Déduire l'équation Euler–Lagrange du mouvement pour θ.
5. On choisit comme conditions initiales à $t = 0$ $\theta = \epsilon \ll 1$ et $\dot{\theta} = 0$. Nous pouvons alors supposer que pour les temps suffisamment court, $\theta \ll 1$. Linéarisez alors l'équation du mouvement obtenue en (5) et résolvez la. Pouvez–vous estimer (environ) jusqu'à quel temps notre approximation de linéarisation reste valable ?
6. Nous supposons maintenant que la masse de la barre est répartie de façon homogène : la barre est un solide de masse m, de longueur l, de moment d'inertie $I_0 = ml^2/12$. Comment les expressions de l'énergie cinétique et du lagrangien de la question (4) sont modifiées ? En déduire les équations du mouvement. La barre est–elle plus ou moins accélérée que le cas où toute sa masse était concentrée au centre ?

B- Mouvement dans un canal.

Nous utiliserons dans ce problème directement la relation fondamentale de la dynamique pour retrouver la trajectoire d'une particule. Une particule de masse m est confinée à bouger dans un canal de largeur $2a$ (voir figure 2). Dans ce canal, la *seule* force exercée sur la particule est $\mathbf{F} = F(x, y)\,\mathbf{j}$ où

$$F(x, y) = k(a^2 - x^2).$$

k est une constante. La force $\mathbf{F}$ est donc toujours parrallèle à l'axe y, mais son amplitude ne dépend que de l'abscisse x.

1. Ecrire et résoudre les équations du mouvement en utilisant la relation fondamentale de la dynamique.
2. Nous supposons les conditions initiales suivante : à $t = 0$, $x = -a$, $y = 0$, $\dot{x} = v_0$, $\dot{y} = 0$. Trouver alors les constantes d'intégration du mouvement.
3. Au bout de quel temps la particule atteint l'autre rive (c'est à dire $x = +a$) ? Quelle distance alors la particule a parcouru dans la direction y ? Trouver la trajectoire $y(x)$, et la représenter graphiquement.
4. Est-ce que la force $\mathbf{F}$ de ce problème dérive d'un potentiel ? Quelle quantité est conservée lors du mouvement (et pourquoi) ?

C- Equilibre d'une manivelle.

Une barre de masse m et de longueur r est soumise à deux contraintes géométrique : une de ses extrémités (A) doit rester sur un cercle de rayon r (dont le centre est sur l'axe x) et l'autre extrémité (B) sur l'axe x (voir figure 3). Nous supposons que toute la masse de la barre est concentré en son centre au point G. Ce problème est à un degrés de liberté, que l'on choisit comme l'angle θ que fait OA avec l'axe x. Pour résoudre ce problème, utiliser le principe des travaux virtuels.

1. Quelle force *horizontal* $F_{ext}\,\mathbf{i}$ faut–il appliquer au point A pour que la barre soit à l'équilibre avec un angle θ ? (Help : trouver seulement x_A et y_G en fonction de θ, et appliquer le PTV).
2. Même question si on applique la force horizontal au point B. (Help : noter que $OA = AB = r$).

C- Disque qui roule ...

Un disque de masse m, de rayon r et donc de moment d'inertie $I_0 = mr^2/2$ roule sans glissement le long d'une courbe représenté sur la figure 3. A l'instant initiale, sa vitesse est $\mathbf{v} = v_0\mathbf{i}$. Quelle est sa vitesse au point A (sommet de la courbe) et au point B ? Les coordonnées de ces points sont (x_A, y_A) et (x_B, y_B). A quelle condition le disque peut atteindre le point B ?

D- Simultanéité en relativité.

Dans un référentiel $\mathcal{R}$, deux évenements se produisent : l'événement A aux coordonnées $x_A = 0$, $y_A = 0$, $z_A = 0\,t_A = 0$; l'évenement B se produit plus tard aux coordonnées $x_B = L\,, y_B = 0\,, z_B = 0\,, t_B = T$. On suppose L et T positifs. Un référentiel $\mathcal{R}'$ est en mouvement relatif uniforme à vitesse $\mathbf{v} = v\,\mathbf{i}$ par rapport à $\mathcal{R}$. A l'instant $t = t' = 0$, les origines de ces deux repères se croisent.

1. Quelle est, dans le cadre de la relativité restreinte, les coordonnées spatio–temporelles de ces deux événements dans le référentiel $\mathcal{R}'$?
2. Pour quelle vitesse v, les deux événements sont simultanés dans le referentiel $\mathcal{R}'$?
3. Cela est-il possible si $L/T < c$? Des commentaires ?