1 Les coordonnées polaires (probablement inutile).

Un système de coordonnées très important à maitriser et celui des coordinnées polaires. Au lieu de repérer le point P par (x, y, z), on le repère par $(\rho\,\theta, z)$, où ρ est la distance à l'origine et θ est l'angle que fait le rayon vecteur avec l'axe x. Les vecteurs unitaires de ce repère que l'on notera $\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_z$ sont définie comme suit : $\mathbf{u}_\rho$ est le vecteur unitaire parallèle au rayon vecteur, $\mathbf{u}_\theta$ est le vecteur dans le plan xy perpendiculaire à ce dernier, et $\mathbf{u}_z$ est le même que pour le système cartésien. La direction de $\mathbf{u}_\theta$ est choisi de façon à ce que le trièdre $\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_z$ soit droit. Nous pouvons décrire n'importe qu'elle point d'espace par ces trois vecteurs. Les composants dans les deux systèmes sont reliés par :

$$x = \rho\cos\theta \quad ; \quad y = \rho\sin\theta$$
$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} \quad ; \quad \tan\theta = y/x$$

Le mouvement circulaire de l'exemple 2 ci-dessus est caractérisés par $\rho = R, \theta = \omega t$. Nous avons alors $d\rho/dt = 0$, $d\theta/dt = \omega$

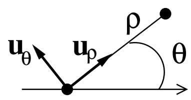

FIG. 1 – Le système de coordonnées polaire.

Exercice. Démontrer que l'ellipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ s'ecrit, en coordonnées polaires, $\rho = a/\sqrt{1 + k\sin^2\theta}$, où $k = a^2/b^2 - 1$.

On désignera par la suite le repère cartésien par $\mathcal{R}$ et le repère polaire par $\mathcal{R}'$. Dans le repère cartesien, si le point P bouge, le repère $\mathcal{R}$ lui même ne change pas. Dans le repère $\mathcal{R}'$ par contre, si le point P bouge, les vecteurs $\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\theta$ bougent également. Si on veut calculer les *vecteurs* vitesse et accélération dans ce repère, il faut également tenir compte des changements de ces vecteurs. Nous avons les relations suivantes pour ces vecteurs :

$$d\mathbf{u}_\rho/dt = (d\theta/dt)\mathbf{u}_\theta \ ; \ d\mathbf{u}_\theta/dt = -(d\theta/dt)\mathbf{u}_\rho. \tag{1}$$

Le rayon vecteur du point P est $\mathbf{r}(t) = \rho(t)\mathbf{u}_\rho$. Sa vitesse vaut alors :

$$\mathbf{v}(t) = d\mathbf{r}/dt \quad = \quad \dot\rho\mathbf{u}_\rho + \rho\dot\theta\mathbf{u}_\theta \tag{2}$$
$$\mathbf{a}(t) = d\mathbf{v}/dt \quad = \quad (\ddot\rho - \rho\dot\theta^2)\mathbf{u}_\rho + (2\dot\rho\dot\theta + \rho\ddot\theta)\mathbf{u}_\theta \tag{3}$$

La signification de la relation 1nécésite des eclaircissements. Supposons qu'à l'instant $t = t_0$, le repère $\mathcal{R}'$ est donné par $\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\theta$. A l'instant $t_0 + dt$, le point P a bougé d'une quantité infinitésimal. Le nouveau repère $\mathcal{R}''$ est donné par deux nouveaux vecteurs $\mathbf{u}''_\rho, \mathbf{u}''_\theta$. La relation 1relie ces deux nouveaux vecteurs aux deux anciens :

$$\mathbf{u}''_\rho \quad = \quad \mathbf{u}_\rho + \dot\theta\mathbf{u}_\theta dt$$
$$\mathbf{u}''_\theta \quad = \quad \mathbf{u}_\theta - \dot\theta\mathbf{u}_\rho dt$$

On sait d'après le premier principe de Newton