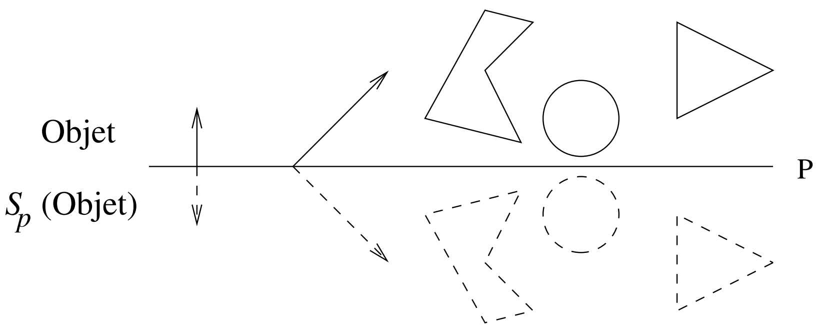
Utilisation des symétries.

On peut utiliser les symétries d'un système donné pour obtenir des informations sur la forme des champs (électrique, magnétique, gravitationnel, ...), et ceci sans faire de calcul. L'étude systématique des symétries se fait en théorie des groupes. Nous ne donnons ici qu'un aperçu des ces techniques, applicable aux cas les plus simples.

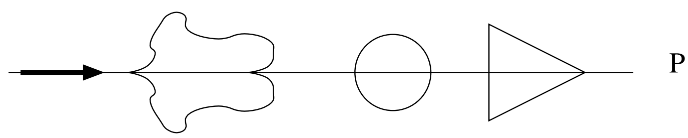
Nous nous intéresserons, dans la première partie de ce document, qu'aux symétries par rapport à un plan. Plus tard, nous parlerons également des symétries de translation et de rotation. En gros, les premières nous donnerons la direction des champs en un point, tandis que les secondes nous donnerons la dépendance de l'intensité du champs en fonction des coordonnées.

1 Symétrie par un plan.

L'opération de symétrie par rapport à un plan P qu'on notera S_P transforme un objet en son image miroir où le plan P justement joue le rôle de miroir.



Un objet est invariant par S_p si (et seulement si) objet $= S_p$(objet), c'est à dire que l'objet et son image sont identique. Aucun des objets ci-dessus n'est invariant par symétrie par rapport au plan P. Par contre, les objets ci-dessous le sont :



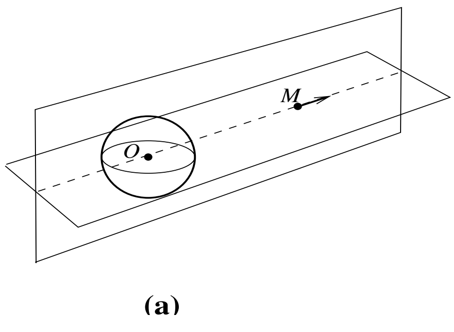
2 Principe de Curie.

C'est *Monsieur* Curie qui a énoncé ce principe : "la symétrie des effets est au moins aussi grande que la symétrie des causes". Cela veut dire par exemple que si la distribution des charges dans l'espace (les causes) possède une certaine symétrie, le champs électrique (l'effet) créé par ces charges aura également la même symétrie. Pour utiliser ces symétries, quand on veut calculer la direction du champ en un point M, on cherche tous les plans qui passent par M et qui laisse le système invariant. Comme le champ (l'effet) en M doit également être invariant par symétrie par rapport à ces même plans, il doit appartenir à chacun de ces plans : il n'y a que la composante dans le plan qui reste invariant par symétrie, la composante perpendiculaire au plan s'inverse. Si le champ avait une composante perpendiculaire au plan, il ne resterai pas invariant par S_P. Voir les deux figures ci–dessus pour s'en persuader. Voyons cela à travers quelques exemples.

1. Charges uniformément distribuée dans une sphère. Soit O le centre de la sphère. On veut calculer le champ en un point $M(r,\theta\phi)$ (voir Fig.1a). Tous les plans qui passent par M et O laissent la distribution des charges invariants. Le champs $\mathbf{E}(M)$ doit donc appartenir à tous ces plans, c'est à dire qu'il doit être parallèle à l'axe OM. Dit autrement : $\mathbf{E}(M) = f(M)\mathbf{u}_r = f(r,\theta\phi)\mathbf{u}_r$. Notez que l'utilisation des symétries miroir ne nous permet pas de deviner la dépendance de l'intensité en fonction des coordonnées, et ne nous donne que la direction du champ.

2. Ligne uniformément chargée. Soit une ligne uniformément chargée que l'on prend selon l'axe z. Nous voulons calculer le champ en un point $M(r,\theta z)$ (Fig.1b). Le plan P_1 qui contient M et l'axe z est un plan de symétrie. Le vecteur $\mathbf{E}(M)$ doit appartenir donc à ce plan, c'est à dire $E_\theta(M) = 0$. Le plan P_2 qui contient M et est *perpendiculaire* à l'axe z est également un plan de symétrie, donc $E_z(M) = 0$. Nous avons donc finalement $\mathbf{E}(M) = f(r,\theta z)\mathbf{u}_r$.

3. Plan uniformément chargée. Soit un plan uniformément chargé. Nous désignons par l'axe z l'axe perpendiculaire à ce plan. Démontrer, en suivant les deux exemples précédents, qu'en un point $M(x,y,z)$, le champ est de la forme $\mathbf{E}(M) = f(x,y,z)\mathbf{u}_z$. Que vaut le champ quand le point M est *sur* le plan ?



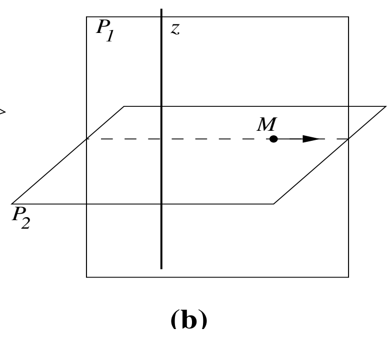


FIG. 1: Distribution uniforme de charges (a) sphérique ; (b) linéaire.

Les exemples précédents font partie des rares cas où on peut déterminer la direction du champ exactement partout dans l'espace. Pour des cas "moins" symétrique, on ne peut en général donner la direction du champ qu'en certains points. Par exemple, pour un carré uniformément chargé, on ne peut donner la direction du champ que si le point M est sur un axe de symétrie du carré (exercice : le faire).

4. Mouvement planétaire. Soit une planète dont la distribution de charge est de symétrie sphérique. Soit une satellite au point M de l'espace au temps t_0 dont la vitesse est $\mathbf{v}_0$. Le plan P qui contient le point M, la vitesse $\mathbf{v}_0$ et le centre de la sphère laisse toutes ces quantités (les causes) invariant par symétrie. La trajectoire (l'effet) doit donc également être invariant par S_P : il reste donc dans le plan P.

3 Vecteur polaire et axial.

Tout ce que l'on a dit jusque là ne concerne en fait qu'une certaine classe (très majoritaire) de vecteur qu'on appelle *polaire.* Les vecteurs dits axial obéissent à d'autres règles de symétrie que nous allons voir ci-dessous.

Les vecteurs polaires sont les "vrais" vecteurs. Exemple : la force $\mathbf{F}$, la position $\mathbf{r}$, la vitesse $\mathbf{v}$, le champ électrique $\mathbf{E}$. Leur direction ne dépend pas de la façon dont on a orienté les axes. Les vecteurs axiaux sont des "faux" vecteurs[1], c'est à dire que leur direction *dépend* de la façon dont on a orienté le trièdre *xyz*. En réalité, cela est étroitement lié au produit vectoriel entre deux vecteurs : le résultat du produit vectoriel de deux vecteurs *polaires* est un vecteur axial. Plus généralement, dans le produit $\mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$, si deux des vecteurs sont polaires, alors le troisième est axial. Parmi les vecteurs axiaux, nous avons le champ magnétique $\mathbf{B}$ (souvenons nous par exemple que $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$) et le vecteur rotation $\overrightarrow{\varpi}$(puisque $d\mathbf{r} = d\overrightarrow{\varpi} \times \mathbf{r}$).

Les vecteurs axiaux obéissent à des relations de symétrie inverse à ceux des vecteurs polaires : une symétrie miroir qui laisse un vecteur polaire invariant *inverse* un vecteur axial ; une symétrie miroir qui inverse un vecteur polaire laisse un vecteur axial *invariant.* Cela peut paraître bizarre à priori. Mais à nouveau, cela découle du produit vectoriel. Par exemple, si un vecteur axial est perpendiculaire à un plan P, c'est que deux vecteurs polaires dont il est le produit vectoriel sont

[1]Les mots "vrai" et "faux" vecteurs ne sont utilisés que dans ce document et n'ont aucune valeur mathématique ou physique.

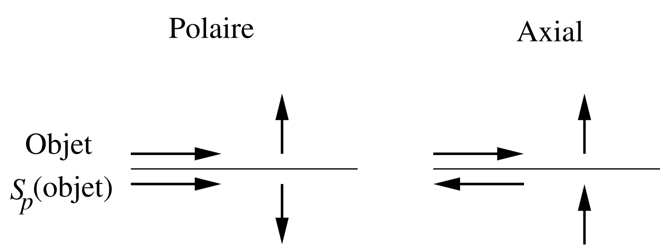


FIG. 2: Règles de symétrie pour les vecteurs polaires et axials.

dans le plan. Comme ces deux vecteurs polaires restent invariant par symétrie par rapport au plan P, leur produit vectoriel (le vecteur axial) doit le rester également.

Muni de ces règles de symétrie et du principe du curie, ont peut, en suivant le démarche développé plus haut pour le champ électrique, déterminer la direction du champ magnétique.

1. Ligne de courant. Soit un fil infini selon l'axe z dans lequel nous avons un courant I qui s'écoule dans le sens des z positif. Nous voulons calculer le champ magnétique $\mathbf{B}$ en un point $M(r, \theta, z)$. Un plan P_1qui contient le point M et l'axe z est un plan de symétrie. Le vecteur $\mathbf{B}(M)$ doit donc être *perpendiculaire* à ce plan. Donc, $\mathbf{B}(M) = f(r, \theta z)\mathbf{u}_\theta$. Par contre, attention : le plan P_2 qui contient le point M et est perpendiculaire à l'axe z *n'est pas* un plan de symétrie, puisque S_{P_2}inverse le sens du courant (et donc, ne laisse pas le système invariant).

2. Bobinage. Soit un bobinage très très serré (on peut l'approximer par un ensemble d'anneaux empilés) d'axe z. Le plan qui contient le point $M(r, \theta z)$ et qui est perpendiculaire à l'axe z est un plan de symétrie. $\mathbf{B}(M)$ est donc perpendiculaire à ce plan : $\mathbf{B}(M) = f(r, \theta z)\mathbf{u}_z$. Cette fois par contre, c'est le plan qui contient M et l'axe z qui inverse le courant par symétrie et qui n'est donc pas un plan de symétrie.

Voila le nécessaire à savoir pour les plans de symétrie et les vecteurs polaires et axials. On peut trouver des règles plus compliquées et beaucoup moins utilisées : par exemple, si S_P+"inversion de temps" laisse le système invariant, alors $\mathbf{B}$ se comporte comme vecteur polaire (vérifier, si courage, sur les deux exemples précédents).

4 Symétrie de translation et de rotation.

Jusque là, nous n' avons parlé que des symétries miroir qui nous permettent de déduire la *direction* des champs. Les symétries continues nous permettent d'éclaircir la dépendance du champ en fonction des coordonnées.

L'opération de translation de vecteur $\mathbf{t}$, que l'on note ici $T_\mathbf{t}$, appliqué à un objet, translate tous les points de l'objet d'une valeur égale à $\mathbf{t}$. Dit plus mathématiquement, $T_\mathbf{t}(\mathbf{a}) = \mathbf{a} + \mathbf{t}$. Un objet est invariant par translation si la "translatée" de l'objet est égale à l'objet : $T_\mathbf{t}(\text{objet}) =$ objet. Évidemment, il n'y a que des objets infinis qui peuvent être invariant par translation. Par exemple, la ligne infinie de l'exemple 2.2 ou 3.1 sont invariant par translation selon l'axe z. Le plan chargé de l'exemple 2.3 est invariant par translation selon l'axe x *et* l'axe y.

Nous pouvons à nouveau appliquer le principe de Curie : si la distribution de charge est invariant par translation selon l'axe z par exemple, le champ électrique résultant doit l'être également. Dans l'exemple 2.2, on a démontré que $\mathbf{E}(r, \theta z) = f(r, \theta z)\mathbf{u}_r$. Comme le système est invariant par translation selon z (de n'importe quelle quantité h), on doit avoir $f(r, \theta, z+h) = f(r, \theta z)$ $(\forall h)$. La seule possibilité est que f ne dépende pas du tout de z, c'est à dire $\mathbf{E}(r, \theta z) = f(r, \theta)\mathbf{u}_r$. De même, dans l'exemple du plan chargé 2.3, on démontre que le champ ne peut pas dépendre de x ni de y : $\mathbf{E}(x, y, z) = f(z)\mathbf{u}_z$.

L'opération de rotation $R_{\mathbf{t},\theta}$ est similaire à celui de translation. Un objet est invariant par rotation si sa transformée par rotation et lui même sont identique. Par exemple, un triangle équilatéral est invariant par rotation de $\pi/3$ autour de son axe. On dit d'un objet qu'il est de symétrie de révolution si il est invariant pour toute rotation ω autour d'un axe donné. Une sphère a une symétrie de révolution autour de n'importe quel axe passant par son centre. Un cylindre a une symétrie de révolution autour de son axe.

Si la distribution de charge (de courant) possède une symétrie de révolution, alors le champ électrique (magnétique) aura la même symétrie. La ligne chargée est évidemment de révolution. Donc, dans l'exemple ci-dessus, $f(r,\theta+\omega) = f(r,\theta)$ $\forall\omega$ ce qui implique que la fonction ne doit pas dépendre de θ.

Exercice. Déduire pour les champs électriques et magnétique des exemples précédents, leur dépendance en fonction des coordonnées : sphère chargée : $\mathbf{E}(r,\theta\phi) = f(r)\mathbf{u}_r$; ligne chargée : $\mathbf{E}(r,\theta z) = f(r)\mathbf{u}_r$; plan chargé : $\mathbf{E}(x,y,z) = f(z)\mathbf{u}_z$; ligne infinie de courant : $\mathbf{B}(r,\theta z) = f(r)\mathbf{u}_\theta$; bobine : $\mathbf{B}(r,\theta z) = f(r)\mathbf{u}_z$.