

Chapitre 1

Forces, travail et équilibre.

1.1 Forces.

Nous ne rentrons pas dans le détail de ce qu'est une force. Grossièrement, l'application d'une force à un point induit le mouvement de ce point. Dans un repère Galiléen, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, où \mathbf{a} est l'accélération du point. Cela s'appelle le premier principe de Newton et on reviendra en détail sur cela quand nous traiterons la dynamique. Notons que la force est une quantité *vectorielle*, dont la dimension est $[F] = MLT^{-2}$.

1.2 Travail.

Le travail est une quantité *scalaire*. Si sous l'action d'une force, un objet se déplace d'une quantité infinitésimal $d\mathbf{r}$, le travail infinitésimal est

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (1.1)$$

La dimension du travail est donc $[W] = ML^2T^{-2}$. Si sous l'action de la force, le point matériel bouge du point A au point B en suivant la trajectoire \mathcal{C} , le travail total effectué est

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (1.2)$$

où l'intégrale est effectuée le long de la trajectoire \mathcal{C} .

Exemple 1. Travail d'une force constante.

Soit une force constante (par constante, on entend une force dont sa valeur ne dépend pas de la position d'espace, comme la force de gravité) $\mathbf{F} = F_x \mathbf{u}_x + F_y \mathbf{u}_y$ appliqué à un point matériel qui bouge le long de la ligne Δ $ax + by = c$, du point (x_0, y_0) au point (x_1, y_1) . Quel est le travail effectué ?

R. Le déplacement infinitésimal du point est donné par $d\mathbf{r} = dx \mathbf{u}_x + dy \mathbf{u}_y$, où dx et dy sont les déplacements infinitésimaux dans les direction x et y . Or, le point se meut le long de la ligne Δ , donc dx et dy ne sont pas indépendants, mais obéissent à la relation $adx + bdy = 0$. Le travail s'écrit :

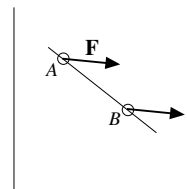


FIGURE 1.1 – travail d'une force constante.

$$W = \int F_x dx + F_y dy \quad (1.3)$$

$$= \int (F_x - (a/b)F_y)dx \quad (1.4)$$

$$= (F_x - (a/b)F_y)(x_1 - x_0). \quad (1.5)$$

Ce qui, en se souvenant de la définition de la ligne, s'écrit :

$$W = F_x(x_1 - x_0) + F_y(y_1 - y_0). \quad (1.6)$$

Q. Dans quelle condition le travail est nul ?

Exemple 2. Même question, mais le point maintenant bouge le long du cercle $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = R^2$.

R. Cette fois, le long de la trajectoire, dx et dy sont liés par la relation :

$$xdx + ydy = 0 \Rightarrow dy = (x/\sqrt{R^2 - x^2})dx.$$

En remplaçant dans l'éq. 1.3, en faisant plusieurs changement de variable sioux, en réarrangeant les termes correctement, on trouve :

$$W = F_x(x_1 - x_0) + F_y(y_1 - y_0).$$

Q. Pourquoi la réponse est similaire à celle de l'exemple 1 ?

1.3 Le potentiel.

Soit une quantité scalaire, dont la valeur dépend de l'espace : $V = V(\mathbf{r}) = V(x, y, z)$. On appelle gradient de V , noté $\mathbf{grad}.V$ (ou ∇V) le vecteur

$$\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{u}_z$$

Le gradient généralise la notion de dérivée d'une fonction d'une seule variable. C'est un vecteur qui pointe dans la direction de la plus forte pente. Le vecteur perpendiculaire au gradient pointe dans la direction des courbes de niveau.

On dit d'une force \mathbf{F} qu'elle dérive d'un potentiel si on peut trouver une fonction scalaire V tel que $\mathbf{F} = \mathbf{grad}.V$. (**Q.** quelle est la dimension de V ?).

Exemple 1. On peut, en différentiant, vérifier qu'une force constante $\mathbf{F} = F_x \mathbf{u}_x + F_y \mathbf{u}_y$ dérive du potentiel

$$V = -F_x x - F_y y.$$

Q. quel est le potentiel du champ de gravité à la surface de la terre ?

Exemple 2. Une force qui ne dérive pas d'un potentiel :

Les forces qui dérivent d'un potentiel simplifient le calcul du travail. Supposons que sous l'effet d'une force \mathbf{F} qui dérive d'un potentiel V , un point matériel bouge de A à B en suivant la trajectoire \mathcal{C} . Le travail est alors :

$$\begin{aligned} W &= \int_{\mathcal{C}} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \\ &= - \int_{\mathcal{C}} \left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right) \\ &= - \int_{\mathcal{C}} dV \\ &= V(A) - V(B). \end{aligned}$$

Le travail ne dépend pas de la trajectoire suivie, mais seulement des points de départ et d'arrivée : $W = -\Delta V$.

Q. Revoir les exemples 1 et 2 de la section précédente.

Il existe une relation très précise à laquelle doit obéir une force pour dériver d'un potentiel. A suivre.

1.4 Les contraintes.

Dans la plupart des problèmes de mécanique de tous les jours, les objets ne sont pas libres de bouger arbitrairement, mais sont soumis à des contraintes qui limitent leur degrés de libertés. Un objet posé sur une table $z = 0$, bien que soumis à la force de la gravitation $-mg\mathbf{u}_z$, ne peut pas atteindre les régions $z < 0$. Pour éviter des contradictions avec son premier principe (l'objet ne bougeant pas malgré une force appliquée), Newton a énoncé le principe suivant : Si A applique une force \mathbf{F} à B, alors B applique une force $-\mathbf{F}$ à A. Dans le cas de l'objet précédent, il applique, par contact, une force $-mg\mathbf{u}_z$ à la table, donc la table applique une force $\mathbf{N} = mg\mathbf{u}_z$ à l'objet. La somme des forces appliquées à l'objet est nulle et l'objet est à l'équilibre.

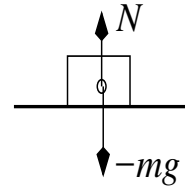


FIGURE 1.2 – Les forces de contraintes.

Le concept de contraintes géométriques est une idéalisation mathématique. En réalité, la table est un objet élastique et sous l'effet du poids de l'objet qui se trouve dessus, elle se déforme. L'objet ne reste donc pas à $z = 0$, mais elle s'enfonce jusqu'à $z = -\epsilon$. La valeur de ϵ dépend de la rigidité de la table. Si cependant cette déformation est de l'ordre du micron et qu'on ne peut que mesurer des distances de l'ordre du millimètre, on néglige la déformation de la table et on suppose la contrainte géométrique rigoureusement respectée.

Comme nous l'avons dit plus haut, les contraintes enlèvent des degrés de libertés et il est extrêmement important de déterminer combien de degrés de liberté sont perdus à cause des contraintes. Un point matériel a trois degrés de liberté (en gros x, y et z). Si on lui impose de rester dans le plan $z = 0$ comme pour l'exemple de la table ci-dessus, il ne lui reste plus que deux. Si l'objet est contraint de rester sur une ligne, il ne lui reste qu'un degré de liberté, la translation le long de l'axe. Dans l'exemple de la pendule ci-dessous, le point ne peut parcourir qu'une calotte sphérique, donc elle n'a plus que deux degrés de liberté.

On ne connaît pas a priori les valeurs des forces de réaction appliquées par les contraintes. Elle dépendent des forces extérieures appliquées. Les contraintes impose *juste* assez de force pour que la contrainte géométrique soit satisfaite.

Par contre, on peut déterminer en général la *direction* selon laquelle les contraintes exercent des forces. Les forces qui bougeraient l'objet sans violer la contrainte géométrique ne provoquent pas de réaction. Dans l'exemple ci-contre d'une pendule, les seules forces qui peuvent changer la longueur de la barre sont dans la direction radiale, donc la force de réaction ne peut s'exercer que dans cette direction.

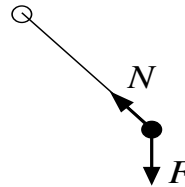


FIGURE 1.3 – La réaction d'une pendule.

Notion avancée : Cela a un lien très profond avec les multiplicateurs de Lagrange que nous verrons plus tard.

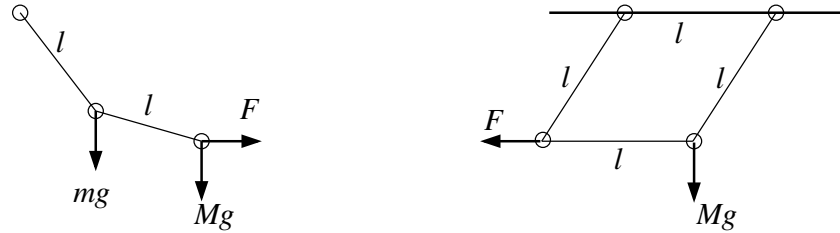


FIGURE 1.4 – Trouver les positions d'équilibre. a) double pendule ; b) cadre mobile.

1.5 Équilibre.

Un point est à l'équilibre si la somme des forces qui lui sont appliquées est nulle. Si les forces dérivent d'un potentiel, ce point correspond à un extremum du potentiel.

Exemple. Une force constante pousse contre l'extrémité d'un ressort de raideur k . Quelle est le point d'équilibre ?

R. On oriente notre repère pour que l'axe x soit dans la direction de la force, *i.e.* $\mathbf{F}_{\text{app}} = F\mathbf{u}_x$ et on choisit l'extrémité du ressort au repos comme l'origine. La force exercé par la ressort est alors $\mathbf{F}_{\text{res}} = -kx\mathbf{u}_x$. Au point d'équilibre, la condition $\mathbf{F}_{\text{app}} + \mathbf{F}_{\text{res}} = 0$ est satisfaite, donc $x = F/k$.

Quand l'objet que l'on considère est en plus soumis à des contraintes géométriques, il faut en plus calculer la réaction de ces forces.

Q. En supposant que la force extérieure de la figure 1.3 est la force de gravité, trouver l'angle d'équilibre.

L'existence des contraintes géométriques nous impose, pour trouver la position d'équilibre, de calculer des inconnues additionnelles que sont les forces de contrainte. Chaque contrainte ajoute une nouvelle inconnue (qui plus est, est *vectorielle*). On peut résoudre encore facilement le problème tant que le nombre de contrainte est faible, mais le problème devient ardu quand ce nombre augmente. Pour s'en convaincre, il suffit de résoudre les deux problème de la figure 1.4.

En réalité, cette méthode des forces nous oblige de calculer des quantités (les forces de réactions) qui ne nous intéressent pas en général. Dès le début de la naissance de la mécanique, les gens ont essayé de trouver des méthodes qui donnent directement les positions d'équilibre sans calculer les forces de réaction. Cela s'est appelé le principe des travaux virtuels.

1.6 Le principe des travaux virtuels.

Comme nous l'avons dit plus haut, les contraintes géométriques s'occupent d'imposer assez de réaction pour qu'elles soient respectées. Les forces qui tendraient à violer les contraintes sont juste contrebalancées, et ne peuvent donc pas induire de mouvement (et de mettre le système hors d'équilibre). Il suffit donc, pour qu'il y ait équilibre, que la somme des forces dans les directions libres des contraintes soit nulle. Dans l'exemple de la pendule de la figure 1.3, le seul déplacement qui ne viole pas la contrainte est dans la direction orthoradiale (qui correspond à un mouvement de rotation autour du point fixe). Il faut donc que la projection des forces dans *cette* direction s'annule. Le principe des travaux virtuels nous facilite ces projections quand le système devient plus compliqués.

Principe des travaux virtuels. Si un système est à l'équilibre, le travail virtuel des déplacements infinitésimaux *compatibles* avec les contraintes imposées est NUL.

Exemple 1. Reprenons le cas de la pendule de la figure 1.3. Prenons le point fixe comme l'origine et l'axe y dans la direction verticale vers le haut. La force de la gravité est alors $\mathbf{F}_g = -mg\mathbf{u}_y$ et la force appliquée $\mathbf{F}_{ap} = F\mathbf{u}_x$. Soit l la longueur de la pendule, et nous repérons la position de l'extrémité de la pendule par son angle θ que fait la barre avec l'axe horizontale. La position (x, y) de l'extrémité est relié à l'angle θ :

$$x = l \cos \theta ; y = l \sin \theta.$$

Comme nous l'avons indiqué, le seul déplacement possible est la variation d'angle. Si θ varie de $d\theta$, alors x et y varient de $dx = -l \sin \theta d\theta$ et $dy = l \cos \theta d\theta$. Le travail virtuel infinitésimal est donc :

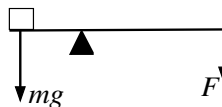
$$\begin{aligned} \delta W &= (\mathbf{F}_g + \mathbf{F}_{ap})d\mathbf{r} \\ &= -mgdy + Fdx \\ &= l(-mg \cos \theta - F \sin \theta)d\theta \end{aligned}$$

A l'équilibre, ce travail virtuel doit être nul quelque soit $d\theta$, donc la position d'équilibre est donnée par $\tan \theta = -mg/F$. Notons simplement que si $F = 0$, $\theta = -\pi/2$ et si $F = \infty$ (c.à.d très grand devant mg), $\theta = 0$. Magique, non ? Nous n'avons calculé aucune force de réaction.

En mécanique des corps *rigides*, on énonce souvent la condition d'équilibre par "la somme des forces appliquées *et* de leur moments est nulle". Jusque là, nous n'avons jamais parlé du moment d'une force. Cette condition sur les moments vient en faite de la contrainte que le corps est rigide, *i.e.* les seuls déplacements permis sont ceux qui conservent la position relative des points du corps les uns par rapport aux autres. Cette condition découle directement du principe des travaux virtuels. Voyons cela d'abord sur un exemple simple.

Exemple : le levier Soit le levier suivant, de bras l_1 et l_2 . A une extrémité, disons le "2", une masse m est déposée. Quelle force verticale doit on appliquer à l'autre extrémité pour que levier soit horizontal ? Et pour le maintenir à un angle quelconque ?

Nous avons ici deux contraintes : la barre est rigide et elle est fixé à un point pivotant. Le seul déplacement compatible avec ces contraintes est une rotation de la barre autour du pivot. Prenons l'axe x selon l'horizontal, l'axe y selon la vertical. Et prenons θ comme l'angle que fait la barre avec l'axe x . Les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) des deux extrémités (les points où les deux forces s'appliquent) sont données par



$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \cos \theta & ; & & y_1 &= l_1 \sin \theta \\ x_2 &= -l_2 \cos \theta & ; & & y_2 &= -l_2 \sin \theta \end{aligned}$$

Le travail virtuel des forces pour une rotation $d\theta$ est donc :

$$\begin{aligned} \delta W &= \mathbf{F}.d\mathbf{r}_1 - mg\mathbf{u}_y.d\mathbf{r}_2 \\ &= Fdy_1 - mgdy_2 \\ &= (Fl_1 + mgl_2)d\theta \end{aligned}$$

La condition d'équilibre $\delta W = 0$ impose donc $F = -mgl_2/l_1$. C'est la condition de "somme des moments nulle".

Équilibre d'un corps rigide : cas général. Supposons qu'un corps rigide est soumis aux forces \mathbf{F}_k appliquées aux point P_k . Les seuls déplacements qui respectent la rigidité du corps sont des translations uniformes de tous ses points ou des rotations de tous ses points autour d'un point.

Dans le cas de translation infinitésimal $d\mathbf{r}$, chaque point P_k du corps est déplacé de $d\mathbf{r}_k = d\mathbf{r}$. Le travail associé est

$$\delta W = \sum_k \mathbf{F}_k d\mathbf{r}_k = \left(\sum_k \mathbf{F}_k \right) d\mathbf{r}$$

Comme le travail doit être nul à l'équilibre et que $d\mathbf{r}$ est arbitraire, nous avons la condition d'équilibre des forces $\sum_k \mathbf{F}_k = 0$.

Dans le cas de rotation infinitésimal autour d'un point O arbitraire et de vecteur $d\vec{\Omega}$ (souvenons nous que ce vecteur est parallèle à l'axe de rotation), soit $\mathbf{r}_k = \overrightarrow{OP_k}$. Le déplacement infinitésimal du point P_k est alors $d\mathbf{r}_k = d\vec{\Omega} \wedge \mathbf{r}_k$ (le symbole \wedge désigne le produit vectoriel). Le travail virtuel s'écrit :

$$\delta W = \sum_k \mathbf{F}_k d\mathbf{r}_k = \sum_k \mathbf{F}_k \cdot (d\vec{\Omega} \wedge \mathbf{r}_k) \quad (1.7)$$

Nous avons, pour le produit mixte de trois vecteurs

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a})$$

ces trois quantités désignant le volume du parallélépipède (et l'orthographe ?) sous ces trois vecteurs. En utilisant cette relation dans l'expression 1.7 on trouve :

$$\delta W = d\vec{\Omega} \cdot \left(\sum_k \mathbf{r}_k \wedge \mathbf{F}_k \right) \quad (1.8)$$

À l'équilibre, $\delta W = 0$ quelque soit $d\vec{\Omega}$, donc la quantité entre () de l'expression 1.8 doit être nulle, ce qui est la condition d'équilibre des moments.

Nous allons résoudre de nombreux exercices pour nous familiariser avec la méthode des travaux virtuels (voir à la fin de ce chapitre). Il est très important de compter pour chaque système le nombre de degrés de liberté réels, *i.e.* nombre de DL - nombre de DL enlevés à cause des contraintes, et de choisir judicieusement les variables qui caractérisent les mouvements compatibles avec les contraintes. Ces variables en langage savant s'appellent coordonnées généralisées. Les facteurs associés aux variations infinitésimales de ces variables dans l'expression du travail virtuel s'appellent les forces généralisées.

Nous allons voir dans quelques chapitres que le principe des travaux virtuels se généralise à la dynamique d'un système. On appelle cette formulation de la mécanique la méthode des moindres actions, ou la formulation Lagrangienne.

Résumé : La méthode des travaux virtuels permet de calculer la position d'équilibre d'un système sans calculer les forces de réaction des contraintes.

1.7 Détour : les multiplicateurs de Lagrange.

La méthode des travaux virtuels est très générale et ne suppose rien sur la nature des forces. Si cependant les forces appliquées au système dérivent d'un potentiel, la méthode des TV est équivalente à chercher l'extremum du potentiel. En effet, si les forces dérivent d'un potentiel, nous savons d'après la discussion de la section 1.3 que $\delta W = -dV$. À l'équilibre, selon PTV, $\delta W = 0$ et donc $dV = 0$. Le point d'équilibre correspond donc bien à un extremum du potentiel. Si le système possède des contraintes géométriques, il faut trouver les extrema liés de V . Nous allons éclaircir cela à travers des exemples.

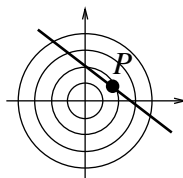


FIGURE 1.5 – Le point P astreint à rester sur une ligne Δ et baignant dans un potentiel harmonique. Les cercles sont les courbes de niveau du potentiel.

Supposons (figure 1.5) que nous voulons trouver les extrema de la fonction $V(x, y) = (x^2 + y^2)$ avec la contrainte géométrique que le point doit en plus rester sur la ligne $\Delta : ax + by = c$. Si il n'y avait pas de contrainte, on trouverait le point extremum en écrivant simplement $\partial V / \partial x = 0$ et $\partial V / \partial y = 0$. Ceci nous donne deux équations à deux inconnues, dont la solution est $x = y = 0$. À cause de

la contrainte cependant, nous n'avons en réalité qu'une seule degrés de libertés (au lieu de deux précédemment). Nous pouvons résoudre y en fonction de x par exemple en utilisant l'équation de la ligne : $y = c/b - (a/b)x$ et ré-écrire notre potentiel en fonction du seul degrés de liberté réel :

$$V(x, y(x)) = V(x) = \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)x^2 - 2\frac{ac}{b^2}x + \frac{c^2}{b^2}$$

Pour trouver le minimum (qu'on appelle maintenant lié, à cause de la contrainte), nous devons avoir $dV/dx = 0$, ce qui donne

$$x = ac/(a^2 + b^2)$$

et le y correspondant : $y = bc/(a^2 + b^2)$. Se sont en réalité les coordonnées du point sur la ligne le plus proche de l'origine.

Dans ce cas précis, il était facile de résoudre une des variable en fonction de l'autre et de récrire le potentiel en fonction d'une seule variable. Lagrange a trouvé une méthode astucieuse qui évite de résoudre explicitement une variable en fonction de l'autre. Au lieu de trouver l'extremum lié de la fonction V , cherchons, sans penser aux contraintes, l'extremum de la fonction

$$U(x, y, \lambda) = V(x, y) - \lambda(ax + by - c).$$

A priori, il semble que l'on ait rien gagné, puisque maintenant on doit minimiser une fonction de *trois* variables. Notons simplement que la condition $\partial U/\partial \lambda = 0$ n'est rien d'autre que la contrainte géométrique. Minimisons U :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \Rightarrow 2x = \lambda a \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 0 \Rightarrow 2y = \lambda b \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow ax + by = c \tag{1.11}$$

Des deux première équations, on obtient $x = \lambda a/2$ et $y = \lambda b/2$. En injectant dans la troisième, on trouve $\lambda = 2c/(a^2 + b^2)$, ce qui redonne bien la valeur de x et de y calculée précédemment.

De façon général, soit la fonction $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dont on cherche le minimum avec les contraintes $g_1(x_1, \dots, x_n) = 0$, $g_2(x_1, \dots, x_n) = 0$, ... $g_m(x_1, \dots, x_n) = 0$. Nous formons la fonction de $n + m$ variable

$$U(x_1, \dots, x_n; \lambda_1, \dots, \lambda_m) = V(x_1, \dots, x_n) - \lambda_1 g_1(x_1, \dots, x_n) - \dots - \lambda_m g_m(x_1, \dots, x_n)$$

et nous cherchons les extremums de ce dernier.

Bonus : Si V est un potentiel, la force exercée par la contrainte g_i au point d'équilibre est

$$\mathbf{F}_i = \lambda_i \mathbf{grad}.g_i$$

A nouveau, nous allons faire quelques exercices pour nous habituer à cette méthode. Les coefficients λ s'appellent des multiplicateurs de Lagrange.

1.8 Exercices.

1. Méthodes des forces. Trouver les positions d'équilibre des deux systèmes de la figure 1.4 en écrivant l'équilibre des forces appliquées et la réaction des contraintes.

2. PTV. Même chose que l'exercice précédent, mais en appliquant le PTV.

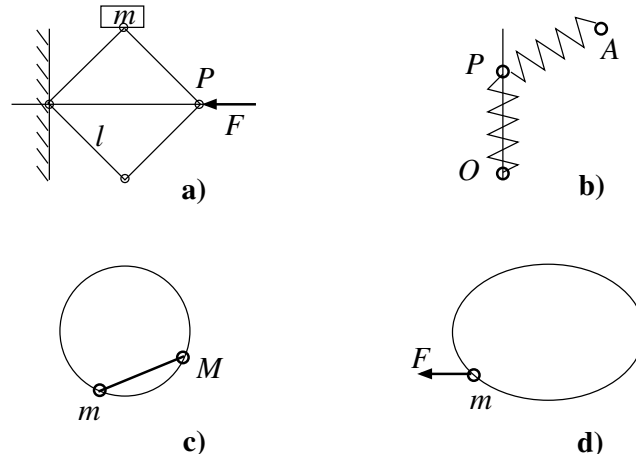


FIGURE 1.6 – Quelques exemples de l’application des travaux virtuels. Dans chaque cas, trouver les positions d’équilibre.

3. Le cric. Un cric est présenté grossièrement par la figure 1.6.a. Quatre barre rigide de longueur l sont assemblés par des joints pivotants. Une des extrémités est fixée. Une autre extrémité est astreint de rester sur une ligne horizontale. Une masse m est déposé sur le coin haut. Quelle force faut-il appliquer pour maintenir le système à l’équilibre? Discuter l’angle d’équilibre en fonction de la force F .

4. Ressorts. Le point P est astreint à rester sur une ligne (figure 1.6.b). P est lié à deux points fixe O et A par des ressorts de raideur k . Le point O est également sur la ligne. Trouver le point d’équilibre.

5. Contraintes de cercle. Deux masse m et M sont astreint à rester sur un cercle de rayon R . Elles sont reliés par une barre rigide de longueur l . Le cercle est orienté verticalement. Trouver le point d’équilibre.

6. Ellipse. Une masse m est astreint à rester sur une ellipse $\mathcal{C} : x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Elle est soumis à une force constante horizontale et à la force de gravité. Trouver le point d’équilibre.

7. Echelle Une échelle de masse m , de longueur l est posée contre un mur. On suppose qu’il n’y a aucun frottement dans les contacts entre l’échelle et le sol et le mur. Quelle force horizontal faut il appliquer au pied de l’échelle pour qu’elle reste à l’équilibre avec un angle θ avec l’horizontal?

8. flambage d’une barre Jusque là, nous avons toujours considérer le cas des barre rigide. Mais comme nous le savons tous, on peut toujours courber une barre si on applique assez de force. Si une barre est encastrée à une de ses extrémités et que nous lui appliquons suffisamment de force, elle va brusquement se courber. Cela s’appelle le flambage et a une grande importance pour le calcul des structure. Il faut par exemple prévoir un pilier de diamètre suffisant pour que le pont qu’il soutient ne s’effondre pas. Nous allons calculer ici la limite de flambage, *i.e.* la force minimum qu’il faut pour faire flamber une barre.

Si une barre de longueur l est courbée selon un cercle de rayon R , son énergie potentielle est $V = Bl/R^2$ (par rapport à sa position droite). B est une constante qui est caractéristique du matériau et de sa géométrie. Supposons maintenant cette barre encastré à une de ses extrémités, et qu’on lui applique une force F constante le long de son axe à l’autre extrémité. Nous repérons la position de cette dernière par son abscisse x . Supposons la barre courbée, de rayon de courbure

R. Qu'elle est son énergie potentielle? $V = Bl/R^2 - Fx$. Or, comme la longueur de la barre est constante, nous avons :

$$1/R^2 = 6x/l^3$$

Quand x est petit (devant quoi?). Pour obtenir cette dernière relation, utiliser un peu de géométrie, et noter que $\sin \theta \approx \theta - \theta^3/6$. L'énergie de la barre est donc

$$V = \left(\frac{6B}{l^2} - F\right)x$$

Si $F < F_c = 6B/l^2$, le minimum du potentiel est donnée par $x = 0$, la barre reste droite. Si $F > F_c$, le minimum est donnée par $x = \infty$, la barre flambe. En réalité, supposer que la barre se courbe selon un cercle est une approximation, sa vraie forme est donnée par une fonction elliptique, est il existe des termes d'ordre supérieurs en x dans son énergie potentielle qui font que quand $F > F_c$, la barre flambe mais le x_{min} , bien que > 0 , reste finie.

En général, pour une barre de section S , $B \approx CYr^4$ où Y est le module d'Young du matériau et r une dimension transverse de la barre. C est un facteur qui dépend de la géométrie de la barre. Si la barre est un cylindre, $B = (\pi/4)Yr^4$, si la section est un carré de côté a , $B = (1/12)Yr^4$. La force critique est alors

$$F_c \sim Yr^4/l^2$$

Pour multiplier la limite de flambage par 16, il suffit de multiplier le rayon par 2.

Prenons maintenant le cas d'une barre verticale encastrée dans le champs de gravité. A partir de quelle longueur l la barre s'écroule sous son propre poids? Définissons la fonction

$$K(z) = \rho g S(l - z) - 6B/z^2$$

Le premier terme est la force que la partie supérieure de la barre exerce sur l'extrémité de la partie inférieure à l'abscisse z . Il est évident que si $K(z) > 0$ il y a flambage. Le maximum de cette fonction est à

$$z_0 = (12B/\rho g S)^{1/3}$$

C'est l'abscisse à laquelle on est le plus sensible au flambage.

$$K(z_0) = \rho g S(l - z_0) - 6B/z_0^2 = \rho g S(l - 3/2z_0)$$

Il y a donc flambage si

$$l \geq \frac{3}{2}z_0 = \frac{3}{2}(12B/\rho g S)^{1/3}$$

Pour une barre de section carré a ,

$$l_c = \frac{3}{2} \left(\frac{Y a^2}{\rho g} \right)^{1/3}$$

Pour doubler la longueur limite, il faut multiplier la section par $2^{3/2} \approx 2.8$.

A.N. Pour l'acier, $Y \approx 200\text{GPa}$, $\rho \approx 8000\text{kg/m}^3$. Pour l'aluminium, ces valeurs sont respectivement de 70GPa et 2600kg/m^3 . Calculer pour chacune de ces matières, la hauteur critique d'une barre de section carré de 1mm et 1cm . **R.** environ 1.8 et 8.3 m pour le fer, légèrement plus (1.05) pour l'alu.

9. Poussée d'Archimède. Un cylindre de hauteur h , de section S et de densité ρ_1 est plongée dans un liquide de densité ρ_0 . A quel hauteur z il s'enfonce? Question plus difficile : est-ce que l'équilibre est stable? (Note : pour résoudre le problème, supposer le fond du cylindre à une distance z , et calculer le travail qu'il faut pour le monter de dz . Cela est d'une part le travail de monter le cylindre, et d'autre part le travail de descendre de l'eau de la surface pour remplir la zone laissée libre par le déplacement de l'objet.

10. capillarité. Calculer à quelle hauteur l'eau monte dans un capillaire.

Chapitre 2

Cinétique.

2.1 Généralités et définitions.

La position d'un point est donné par le vecteur $\mathbf{r}(t)$. La cinétique consiste à caractériser sa vitesse $\mathbf{v}(t)$ et son accélération $\mathbf{a}(t)$. Cette dernière quantité est très importante, puisqu'elle est reliée aux forces appliquées au point. Ainsi, connaissant la force, nous connaissons l'accélération, et en intégrant, on peut déterminer la position. Ceci nous amène à résoudre des équations différentielles et c'est l'objet du chapitre prochain sur la dynamique. Mais d'abord, familiarisons nous avec les vitesses et accélérations.

Vitesse et accélération sont les dérivées successives de la position :

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ \mathbf{a}(t) &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\end{aligned}$$

Définition. Soit un vecteur $\mathbf{u}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ dont les composant varient au cours du temps. La dérivée de ce vecteur *par rapport* au temps est définie par

$$d\mathbf{u}/dt = (dx(t)/dt, dy(t)/dt, dz(t)/dt).$$

La dérivée d'un vecteur par rapport au temps est donc un vecteur dont ses composants sont les dérivées du premier vecteur par rapport au temps.

Exemple 1. Mouvement linéaire. Supposons que la position dans le temps est donnée par $\mathbf{r}(t) = (a\mathbf{u}_x + b\mathbf{u}_y + c\mathbf{u}_z)t$. C'est ce que l'on appelle un mouvement rectilinéaire uniforme : le point se translate au cours du temps de façon uniforme parallèlement au vecteur (a, b, c) dans l'espace. La vitesse et accélération sont alors :

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) &= a\mathbf{u}_x + b\mathbf{u}_y + c\mathbf{u}_z \\ \mathbf{a}(t) &= 0!\end{aligned}$$

L'accélération lors d'un tel mouvement est donc nulle.

Exemple 2. Mouvement circulaire. Si le point tourne autour de l'origine et d'axe z , avec une vitesse angulaire ω constante, sa position est donnée par $\mathbf{r}(t) = R(\cos \omega t, \sin \omega t, 0)$ où R est le rayon du cercle parcouru. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) &= R\omega(-\sin \omega t, \cos \omega t, 0) \\ \mathbf{a}(t) &= R\omega^2(-\cos \omega t, -\sin \omega t, 0)\end{aligned}$$

on constate que la vitesse est perpendiculaire au rayon vecteur, puisque $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{v}(t) = 0$. De même, l'accélération est parallèle au rayon vecteur, puisque l'accélération vaut un scalaire ($R\omega^2$) qui multiplie le rayon vecteur. Notons également que le module de \mathbf{v} et de \mathbf{a} sont constante :

$$\begin{aligned} v(t) &= \|\mathbf{v}(t)\| = R\omega \\ a(t) &= \|\mathbf{a}(t)\| = R\omega^2 \end{aligned}$$

Le rayon de la terre est de l'ordre de 6000 km, ou $6 \cdot 10^6$ m. Sa rotation est de un tour par jour, c'est à dire $\omega = 2\pi/(24 \times 3600) \approx 7 \cdot 10^{-5} \text{s}^{-1}$. L'accélération d'un objet à la surface de la terre due à la rotation de ce dernier est donc de l'ordre $3 \cdot 10^{-2} \text{m/s}^2$. Cela est environ 300 fois plus faible que l'accélération à la surface de la terre due à la gravité.

La relation qui relie la force et l'accélération est $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. La difficulté de la mécanique est que bien que cette relation soit à priori simple, dans beaucoup de cas la résolution effective des équations différentielles est très compliquée. Il se peut que dans un certain système de coordonnées, l'expression des accélération soit simple, mais la forme de la force soit très complexe. Par exemple, à deux dimensions, et en coordonnées cartésiennes, l'accélération est donnée par $\mathbf{a} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j}$. Mais si on veut résoudre un problème où la force est centrale (tel les problèmes liés à la gravité), la force est de la forme $\mathbf{F} = K(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})/(x^2 + y^2)^{3/2}$ (justement pour la force de gravité). Les équations différentielles qui en résultent sont horrible à résoudre. Il se trouve que l'on peut choisir des systèmes de coordonnées où l'expression de la force est très simple, et l'expression des coordonnées légèrement plus compliqués, mais où on peut résoudre les équations sans trop d'effort. Il existe des dizaines de systèmes de coordonnées : pour chaque type de problème, les gens ont inventé des systèmes de coordonnées adaptés à ces problèmes, comme par exemple les coordonnées paraboliques, hyperboliques, ... Le système de coordonnées le mieux adapté à la résolution des problèmes avec des forces centrales est celui des coordonnées polaire (à 2d) et sphérique (à 3d). En gros, c'est la symétrie des forces qui nous guide dans le choix du système de coordonnées. Comme on aura beaucoup à utiliser les forces centrales, il faut nous habituer aux coordonnées polaires.

2.2 Les coordonnées polaires.

Un point P en coordonnées polaire est donnée par (r, θ) . Ces deux là sont liés aux coordonnées cartésiennes via

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned}$$

On notera les vecteurs unitaires de ce système ($\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta$). La différence essentielle par rapport au système cartésien est qu'ici, les vecteurs unitaires ne sont pas fixe mais *dépendent* du point P . Ainsi, ces vecteurs sont reliés au vecteurs unitaires du système cartésien par

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_r &= \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} \\ \mathbf{u}_\theta &= -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j} \end{aligned}$$

Le vecteur position $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = r\mathbf{u}_r$. La vitesse est alors donnée par

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = \dot{r}\mathbf{u}_r + r d\mathbf{u}_r/dt = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta$$

et l'accélération par

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\mathbf{u}_\theta$$

L'expression du carré de la vitesse (important quand on parlera de l'énergie cinétique) est simplement $v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2$

Exemple : Si le point P parcourt un cercle avec une vitesse angulaire ω constante, nous avons $\dot{r} = 0, \dot{\theta} = \omega$. La vitesse est alors $\mathbf{v} = r\omega\mathbf{u}_\theta$ et l'accélération $\mathbf{a} = -r\omega^2\mathbf{u}_r$. La vitesse est purement orthoradiale et l'accélération purement radiale.

2.3 Changement de repère.

Supposons que nous avons deux repères \mathcal{R}_1 et \mathcal{R} et nous connaissons le mouvement de l'un par rapport à l'autre. Nous connaissons la position $\mathbf{r}_1(t)$ de notre particule dans le premier (et donc sa vitesse et son accélération), et nous voulons déterminer ces quantités dans le deuxième. La raison est que souvent on mesure les positions dans un repère qui n'est pas Galiléen. Or, la relation de Newton entre la force appliquée et l'accélération n'est valable que dans un repère Galiléen. D'où la nécessité d'effectuer des changements de repère.

Dans tout ce qui suit, nous allons supposer que les deux repères conservent toujours un de leur axe (disons l'axe z) parallèle. Les relations que l'on va écrire se généralisent facilement au cas général. On notera les vecteurs unitaire d'un repère $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$

D'abord, qu'est ce qu'on veut dire par un repère ? Un repère est l'ensemble d'un point, que l'on appelle origine O et de n vecteurs (que l'on prendra toujours unitaire et perpendiculaire les uns aux autres). Ici, n est la dimension de l'espace. On restera pour l'instant au cas des mouvements dans un plan, *i.e.* $n = 2$ et on notera les deux vecteurs \mathbf{i}, \mathbf{j} . Quand on dit que les coordonnées d'un point sont (x, y) , on veut dire : "A partir de O , aller de x dans la direction \mathbf{u}_x et de y dans la direction de \mathbf{u}_y ", que l'on note en vectoriel : $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.

Et qu'est ce qu'on veut dire par "nous connaissons la position d'un repère par rapport à l'autre" ? Premièrement, on connaît la position de O par rapport à O_1 , que l'on notera $\mathbf{R} = \overrightarrow{O_1O}$. Deuxièmement, l'on connaît l'angle θ entre \mathbf{i} et \mathbf{i}_1 . On notera $\omega = \dot{\theta}$. Le vecteur vitesse de rotation est défini par $\vec{\omega} = \omega \mathbf{k}$

Soit maintenant un point P . Nous avons $\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \mathbf{r}$, où $\mathbf{r}_1 = O_1P$ et $\mathbf{r} = OP = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. Le repère \mathcal{R} peut tourner par rapport à \mathcal{R}_1 , nous avons donc à calculer des expression du genre $d\mathbf{i}/dt$. Voyons cela de plus près :

$$\begin{aligned} d\mathbf{i}/dt &= \omega \mathbf{j} = \vec{\omega} \wedge \mathbf{i} \\ d\mathbf{j}/dt &= -\omega \mathbf{i} = \vec{\omega} \wedge \mathbf{j} \end{aligned}$$

Nous ne justifions pas ces relations, prenons les comme la définition du vecteur rotation instantanée. Nous pouvons dériver encore une fois l'expression ci-dessus :

$$\begin{aligned} d^2\mathbf{i}/dt^2 &= d/dt(d\mathbf{i}/dt) \\ &= d/dt(\vec{\omega} \wedge \mathbf{i}) \\ &= \vec{\omega} \wedge \dot{\mathbf{i}} + \dot{\vec{\omega}} \wedge \mathbf{i} \\ &= \vec{\omega} \wedge \mathbf{i} - \omega^2 \mathbf{i} \end{aligned}$$

et la même chose bien sûr pour \mathbf{j} . Dérivons maintenant la relation entre les vitesses dans les deux repères :

$$\mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{R}} + \frac{d}{dt}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \quad (2.1)$$

$$= \dot{\mathbf{R}} + (\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}) + \vec{\omega} \wedge (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \quad (2.2)$$

$$= \dot{\mathbf{R}} + \vec{\omega} \wedge \mathbf{r} + (\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}) \quad (2.3)$$

Le dernier terme est la vitesse que mesurerait un observateur dans le repère \mathcal{R} . On l'appelle vitesse relative qu'on notera \mathbf{v}_r . Les deux premiers termes sont le résultats du mouvement de \mathcal{R} par rapport à \mathcal{R}_1 et on appelle leur somme vitesse d'entraînement, \mathbf{v}_e . Le premier terme de cette somme est dû à la translation et le deuxième à la rotation de \mathcal{R} .

Nous pouvons dériver l'expression 2.1 encore une fois pour trouver les accélérations. Nous utiliserons la relation $d^2/dt^2(fg) = \ddot{f}g + 2\dot{f}\dot{g} + f\ddot{g}$.

$$\mathbf{a}_1 = d\mathbf{v}_1/dt = \ddot{\mathbf{R}} + \frac{d^2}{dt^2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \quad (2.4)$$

$$= \ddot{\mathbf{R}} + (\ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j}) + 2(\dot{x}\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \dot{y}\frac{d\mathbf{j}}{dt}) + (x\frac{d^2\mathbf{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\mathbf{j}}{dt^2}) \quad (2.5)$$

$$= \ddot{\mathbf{R}} + (\ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j}) + 2\vec{\omega} \wedge \mathbf{v}_r + \vec{\omega} \wedge \mathbf{r} - \omega^2 \mathbf{r} \quad (2.6)$$

Pas très sympathique comme expression, mais voyons les termes individuellement.

1. La somme des termes $\ddot{\mathbf{R}} + \vec{\omega} \wedge \mathbf{r} - \omega^2 \mathbf{r}$ sont appelés accélération d'entraînement \mathbf{a}_e . Le premier est dû à l'accélération du point O par rapport au point O_1 . Le deuxième terme est dû à la variation de la vitesse de rotation. Le troisième terme est également dû à la rotation et nous l'avons déjà rencontré en début de chapitre quand on avait traité le mouvement circulaire simple.
2. Le terme $2\vec{\omega} \wedge \mathbf{v}_r$ est appelé l'accélération de Coriolis \mathbf{a}_c . Il est dû à la rotation *et* au fait que le point P bouge par rapport à \mathcal{R} . C'est grâce à ce terme que l'on a démontré définitivement dans les années 1850 que la terre tourne (pendule de Foucault).
3. Enfin, le terme $(\ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j})$ est l'accélération qu'un observateur attaché au repère \mathcal{R} mesurerait, et elle est appelée à juste titre accélération relative \mathbf{a}_r .

Résumons.

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r \quad (2.7)$$

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_c + \mathbf{a}_r \quad (2.8)$$

où

$$\mathbf{v}_e = \dot{\mathbf{R}} + \vec{\omega} \wedge \mathbf{r} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{a}_e = \ddot{\mathbf{R}} + \vec{\omega} \wedge \mathbf{r} - \omega^2 \mathbf{r} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \mathbf{v}_r \quad (2.11)$$

Repères en mouvement uniforme. Si les deux repères se déplacent à vitesse constante \mathbf{v}_e l'un par rapport à l'autre, les équations ci-dessus impliquent

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_r$$

C'est à dire que deux observateurs attachés à ces deux repère mesure *la même* accélération pour le mouvement d'un objet. Ceci est d'importance primordial quand on traitera les repères Galiléen.

Quelques ordre de grandeur. A la surface de la terre, nous subissons des accélérations dues à la rotation de la terre autour de son axe. Quelle est leur importance ?

Vu que c'est essentiellement les rotations qui nous posent problème, tous les exemples que nous traiterons ci-dessous seront là dessus.

En réalité, on utilise les relations ci-dessus pour décrire le mouvement dans un repère non-galliléen. La relation $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ est une équation différentielle : la force \mathbf{F} est connu en fonction des positions et des vitesses de la particule, et nous avons donc $m d^2 \mathbf{r} / dt^2 = \mathbf{F}(\mathbf{r}, d\mathbf{r}/dt)$. Cette relation est valable dans un repère Galliléen. Dans un repère non Galliléen, nous devons ajouter des termes supplémentaire à cette équation, qui découle directement des relations ci-dessus que nous avons obtenus. Si on prend \mathcal{R}_1 comme le repère Galliléen, nous savons que $\mathbf{a}_1 = \mathbf{F}/m$. L'équation (2.6) nous donne alors :

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} - m\ddot{\mathbf{R}} - m\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \mathbf{r} - m\vec{\omega} \wedge \mathbf{r} - 2m\vec{\omega} \wedge \mathbf{v}$$

Nous voyons que cela est une équation différentielle où par rapport à $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$, nous avons dû ajouter des termes supplémentaires.

Discussion sur les ordres de grandeurs, l'exemple de la personne qui lache une pomme dans un manège et les trajectoires qui s'en suivent, ... Traiter le problème de la déviation vers l'est et le pendule de Foucault.

Exemple 1. Soit deux repère \mathcal{R}_1 et \mathcal{R} dont l'origine est confondu. \mathcal{R} tourne autour de l'axe z à vitesse (de rotation) constante ω . à l'instant $t = 0$, les axes des deux repères sont confondu. Un point P est fixe dans le repère \mathcal{R}_1 , disons de coordonnées $(x_1, 0)$. Quelles sont ses trajectoire, vitesse et accélération dans le repère \mathcal{R} ?

R. Comme \mathbf{v}_1 est nulle, on a $\mathbf{v}_r = -\mathbf{v}_e = -\vec{\omega} \wedge \mathbf{r}$. En notant (x, y) les coordonnées du point P , nous avons :

$$\dot{x} = \omega y \quad (2.12)$$

$$\dot{y} = -\omega x \quad (2.13)$$

Ce sont deux équations différentielles couplées. En dérivant la première nous avons :

$$\ddot{x} = \omega \dot{y} = -\omega^2 x.$$

Cette dernière est une équation différentielle de second ordre, dont la solution, étant donnée la condition initiale, est

$$x = x_1 \cos(\omega t)$$

et en utilisant l'équation 2.12 on obtient

$$y = -x_1 \sin(\omega t)$$

C'est bien sur le mouvement circulaire que nous avons traité plus haut.

Exemple 2. Même chose que précédemment, mais maintenant le point P se déplace à vitesse constante le long de l'axe x_1 : $x_1(t) = vt$.

R. On applique notre relation de composition des vitesses (2.7) : $\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_e = \mathbf{v}_1 - \vec{\omega} \wedge \mathbf{r}$. De plus, nous savons que $\mathbf{v}_1 = v\mathbf{i}_1$. Or, nous devons tout exprimer dans le repère \mathcal{R} . L'angle entre \mathbf{i}_1, \mathbf{i} est $\theta = \omega t$, donc

$$\mathbf{i}_1 = \cos(\omega t)\mathbf{i} - \sin(\omega t)\mathbf{j}.$$

Donc :

$$\dot{x} = v \cos(\omega t) + \omega y$$

$$\dot{y} = -v \sin(\omega t) - \omega x$$

A nouveau nous avons deux équations différentielles couplés. En suivant l'exemple précédent, nous trouvons :

$$\ddot{x} = -\omega^2 x - 2v\omega \sin(\omega t)$$

C'est l'équation d'une oscillation forcée à la fréquence de résonance. La solution s'écrit :

$$x = vt \cos(\omega t)$$

$$y = -vt \sin(\omega t)$$

Remarquons que $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = vt$, ce qui est rassurant puisque dans les deux repère, on devait mesurer la même distance pour OP . Remarquons enfin que ceci est l'équation d'une spirale. Discuter la déviation vert l'est.

Exemple 3. Pendule de Foucault. Même chose que pour l'exemple précédent, mais cette fois, le point P oscille autour de l'origine le long de l'axe x_1 : $x_1 = a \sin(\Omega t)$

R. En suivant le même chemin que précédemment, nous obtenons deux équations :

$$\dot{x} = a\Omega \cos(\Omega t) \cos(\omega t) + \omega y$$

$$\dot{y} = -a\Omega \cos(\Omega t) \sin(\omega t) - \omega x$$

C'est fondamentalement la même équation qu'avant, sauf que cette fois le terme de forçage n'est plus à résonance.

2.4 Exercices.

Glissement le long d'un cercle. Lors du glissement le long d'un cercle la vitesse est donnée par $v^2 = v_0^2 + 2g(R - y)$. Trouver l'expression de l'accélération en coordonnées polaire, en fonction de l'angle θ .

glissement le long d'une spirale Un point parcourt une spirale $r = \alpha\theta$ à vitesse constante. Déduire $\theta(t)$ et $r(t)$. On suppose le sens de parcours s'écartant de l'origine, et on désire seulement connaître le mouvement pour les grands temps.

Chapitre 3

Dynamique du point.

3.1 Premier principe de Newton.

3.1.1 Équations du mouvement.

Y'a t'il une relation entre la force exercée sur un point matériel et sa vitesse? Jusque dans les années 1680, on pensait que la vitesse d'un point était proportionnelle à la force exercée dessus. Cela découlait de l'expérience intuitive de tous les jours : plus on poussait fort sur un chariot, plus il allait vite. Newton a profondément bouleversé cette conception en postulant que ce n'était pas la vitesse, mais sa dérivée par rapport au temps qui était proportionnelle au temps. Il a appelé le facteur de proportionnalité la masse :

$$\mathbf{F} = m d\mathbf{v}/dt \quad (3.1)$$

Pour lui, la masse était "la quantité de matière présent dans le corps". Cela est en gros la définition d'un terme par lui même! Par ailleurs, il a réalisé qu'il existe une force, appelée la force de gravité : un corps exerce sur un autre corps une force à raison de l'inverse au carré de leur distance $F = \mu_1\mu_2/r^2$. μ_1 et μ_2 sont des quantités intrinsèques des deux corps et il a réalisé qu'il peut récrire cette expression sous la forme

$$F = Gm_1m_2/r^2 \quad (3.2)$$

où G est une constante fondamentale qui ne dépend pas des corps en question, et m_1 et m_2 sont les même masses que définit dans (3.1)! On appelle la première masse la masse inertielle, et la deuxième la masse gravitationnelle. Elles sont proportionnelles, et la constante G est choisi de telle manière que ces deux masses soit égales. Cela paraît une coïncidence extraordinaire que ces deux masses soit la même, et il a fallu attendre plus de deux siècles avant qu' Einstein en donne une explication satisfaisante dans le cadre de sa théorie de relativité générale.

Dans tout ce qu'il suit donc, on prend la masse comme une quantité intrinsèque de la matière, au même titre que la charge électrique (existe-t-il d'ailleurs une relation entre ces deux quantités? On réfère le lecteur intéressé au livre de Feynman sur l'électrodynamique).

La relation (3.1) nous permet, si l'on connaît la force, de déterminer la trajectoire. Il nous faut pour cela d'intégrer l'équation différentielle (3.1).

Exemple 1. Chute d'un corps. On lâche un corps de masse m de l'abscisse $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. La force de gravité est $\mathbf{F} = -mg\mathbf{k}$. Nous avons trois équations différentielles

$$\begin{aligned} md^2x/dt^2 &= 0 \\ md^2y/dt^2 &= 0 \\ md^2z/dt^2 &= -mg \end{aligned}$$

La solution générale des ces équations est $x = (A_1 + B_1t)$, $y = (A_2 + B_2t)$, $z = (A_3 + B_3t - mgt^2/2)$. Ce sont trois équations différentielles de second ordre, il nous faut donc $3 \times 2 = 6$ conditions

initiales pour déterminer les coefficients. Elles sont données par les positions à l'instant $t = 0$ ($x = y = z = 0$) et les vitesses à l'instant $t = 0$ ($\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$). On trouve donc que $x(t) = y(t) = 0$ et $z(t) = -mgt^2/2$.

Exemple 2. Projection d'un corps. Cette fois, on projette le corps avec la vitesse initiale $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_z \mathbf{k}$. Les équations différentielles sont les mêmes (puisque les forces n'ont pas changées), mais les conditions initiales sur les vitesse à $t = 0$ s'écrivent $\dot{x} = v_x$; $\dot{y} = 0$; $\dot{z} = v_z$. Nous avons donc maintenant $x(t) = v_x t$; $y(t) = 0$; $z(t) = v_z t - mgt^2/2$. Si $v_z > 0$, le temps pour que la particule revienne à $z = 0$ est $\Delta t = 2v_z/mg$. Pendant ce temps la distance horizontal parcourue est $\Delta x = v_x \Delta t = 2v_x v_z/mg$. (**Q.** si $v^2 = v_x^2 + v_z^2$ est une constante fixée, quel angle doit on choisir pour parcourir un maximum d distance horizontale?). On peut également déterminer la trajectoire du projectile : $t = x/v_x$, donc $z = (v_z/v_x)x - (mgv_z^2/2v_x^2)x^2$. La trajectoire est donc un parabole. Le point le plus haut atteint par le projectile est $z = v_z^2/2mg$.

Exemple 3. Projectile balistique. L'approximation $F = mg$ pour la force de gravité est valable tant que l'on reste proche de la surface. Sinon, il faut utiliser l'expression exacte de la force de gravité (3.2). On suppose que la terre ne tourne pas, et on projette un projectile avec une très grande vitesse initiale v (par rapport à quoi?) dans la direction verticale. Montrer que l'on peut intégrer facilement une fois l'équation du mouvement pour obtenir

$$\dot{z} = \sqrt{(2\alpha + Cz)/z}$$

où $\alpha = G \times \text{Masse de la terre}$, et $C = v^2 - 2\alpha/R$. On peut intégrer encore une fois cette équation pour obtenir $z(t)$ (en faite $t(z)$). A faire si vous en avez le courage.

3.1.2 Repère Galiléen.

Nous avons fait une omission importante dans la section ci-dessus. La relation $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ est une relation très simple reliant la force à la dérivée seconde de la position. Mais elle n'est valable que dans certains repère, que l'on appelle Galiléen. En faite, cela est la définition même d'un repère Galiléen :

Définition : Un repère est Galiléen si l'équation du mouvement s'écrit sous la forme $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

Supposons maintenant que nous avons un repère Galiléen \mathcal{R}_1 , et un repère \mathcal{R} en mouvement uniforme par rapport au premier. Un observateur dans le premier repère mesure une force \mathbf{F} appliquées à et l'accélération \mathbf{a} d'un objet, et vérifie que la relation entre ces deux quantités est bien la loi de Newton. Un observateur du second repère mesure la même force \mathbf{F} appliquée à cette objet, et une accélération \mathbf{a}' . Or, on sait d'après le chapitre précédent, que puisque les deux repères sont en mouvement uniforme l'un par rapport à l'autre, l'observateur du deuxième repère mesure la même accélération que celui du premier, $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$. Lui aussi donc vérifie la relation de Newton. Donc :

définition : Si un repère est Galiléen, tout repère en mouvement relatif uniforme par rapport à celui là l'est également.

La terre est il un repère Galiléen? Depuis Kepler, on supposait que la terre tourne autour d'elle même et du soleil. Mais le mouvement est relatif. On peut très bien supposer la terre fixe et l'univers tournant autour d'elle. L'expérience de la pendule de Foucault (qu'on peut, je crois, encore visiter au muséum d'histoire naturel) réalisé vers 1850 montre que la terre *n'est pas* un repère Galiléen. Il est donc plus judicieux de considérer que c'est la terre qui tourne autour du soleil, et de prendre comme repère absolu un repère dont le centre est le soleil et les axes orientés dans la direction des étoiles lointains. Mais ... Le soleil également tourne autour du centre de galaxie, peut on donc choisir ce repère comme absolu? La réponse est : "cela dépend du système que l'on observe". Pour les expériences de tous les jours, on peut très bien considérer la terre comme un (très bon) repère Galiléen (sinon Newton n'aurait pas découvert ses principes : voir

un roman de science fiction d'Assimov le long de cette hypothèse). Tant que les masses et les vitesses des objets que l'on mesure ne sont pas très grandes, les accélérations d'entraînement et de Coriolis sont petites et on peut les négliger (nos appareils, de précision finie, ne mesurent pas les déviations au premier principe). Si au contraire on veut regarder des objets très rapides et/ou qui parcourent de grande distance, on doit tenir compte de l'aspect non-Galiléen de la terre : c'est le cas de la déviation vers l'est des artilleurs, ou du mouvement des vents à l'échelle de la planète. Si on veut lancer un satellite qui doit arriver sur Jupiter, il est alors impératif de prendre le repère du soleil pour effectuer les calculs de trajectoires (on a perdu un satellite pour des erreurs plus bêtes que ça). Si maintenant l'on s'intéresse au mouvement des galaxies, le repère du soleil est certainement un très mauvais repère (on a perdu des galaxies pour moins que ça).

3.1.3 Les forces dans un repère non-Galiléen.

A plus tard. Mais il faut absolument discuter les ordres de grandeurs.

3.2 Les lois de conservation.

Au cours du mouvement, si certaines conditions sont réalisées, certaines quantités se conservent. On va voir qu'elles sont ces quantités et ces conditions. Disons tout de suite que les conditions ont toujours à voir avec des *symétries* du problème : symétrie de translation (dans l'espace ou dans le temps), de rotation, Cela s'appelle le théorème de Noether (environ 1915) et a eu une profonde influence sur le développement de la physique théorique. Nous reviendrons en détail sur cela quand on traitera de la mécanique analytique.

3.2.1 Quantité du mouvement.

La quantité du mouvement est définie par

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (3.3)$$

On sait, d'après le premier principe, que $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$, c'est à dire que la variation de la quantité du mouvement est proportionnelle à la force appliquée. Il est évident que si $\mathbf{F} = 0$, alors $d\mathbf{p}/dt = 0$, c'est à dire

$$\mathbf{p} = \text{Cte.}$$

La quantité du mouvement se conserve si la force appliquée est nulle.

La quantité du mouvement d'un ensemble de particules est la somme des quantités de mouvements individuelles :

$$\mathbf{p} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{p}_i$$

Prenons maintenant deux particules, la première exerçant une force $\mathbf{F}(t)$ sur le second. D'après le deuxième principe, la deuxième exerce une force $-\mathbf{F}$ sur le premier. Supposons qu'il n'y a pas d'autres forces appliquées à ces particules. Nous avons alors $d\mathbf{p}_1/dt = -\mathbf{F}$ et $d\mathbf{p}_2/dt = \mathbf{F}$, et donc

$$d\mathbf{p}/dt = d\mathbf{p}_1/dt + d\mathbf{p}_2/dt = 0$$

On peut généraliser ce calcul au cas de n particules. Donc, *La quantité du mouvement d'un système isolé se conserve.* On peut aller plus loin dans ce raisonnement : supposons qu'en plus de la force $-\mathbf{F}$ qui lui est exercée par la particule 2, la particule 1 subit une autre force, d'origine externe, \mathbf{F}_1^{ext} . La particule 2, en plus de la force \mathbf{F} , subit elle aussi une force d'origine externe au système \mathbf{F}_2^{ext} . Alors,

$$d\mathbf{p}/dt = d\mathbf{p}_1/dt + d\mathbf{p}_2/dt = \mathbf{F}_1^{ext} - \mathbf{F} + \mathbf{F}_2^{ext} + \mathbf{F} = \mathbf{F}_1^{ext} + \mathbf{F}_2^{ext}$$

Les forces internes ne contribuent pas à la variation de la quantité de mouvement du système. Ce résultat se généralise sans difficulté au cas de n particules

$$d\mathbf{p}/dt = \sum_i \mathbf{F}_i^{ext}$$

Définition. Soit n particules aux positions \mathbf{r}_i . Le centre de masse du système est un point de position \mathbf{r}_g tel que

$$\mathbf{r}_g = \sum_i m_i \mathbf{r}_i / \sum_i m_i = (1/M) \sum_i m_i \mathbf{r}_i \quad (3.4)$$

où M est la somme de toutes les masses des particules, *i.e.* la masse totale du système.

Exemple. Deux particules de masses m_1, m_2 aux positions $(x_1, 0, 0)$ et $(x_2, 0, 0)$ ont leur centre de masse à $(x_g, 0, 0)$ où $x_g = (m_1 x_1 + m_2 x_2) / (m_1 + m_2)$.

Le centre de masse est la moyenne des positions pondérées par les masses. Elle a une grande importance quand on traite la dynamique d'un ensemble d'objet. Prenons nos n particules aux positions \mathbf{r}_i par rapport à un point quelconque O . Définissons maintenant les positions des points par rapport à leur centre de masse G par \mathbf{r}'_i :

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_g + \mathbf{r}'_i \quad (3.5)$$

En multipliant par m_i est en sommant sur les i on obtient :

$$\sum_i m_i \mathbf{r}_i = M \mathbf{r}_g + \sum_i m_i \mathbf{r}'_i$$

Le terme de gauche, par définition, est $M \mathbf{r}_g$, donc $\sum_i m_i \mathbf{r}'_i = 0$. Cela aurait pu nous servir de définition pour le centre de masse.

Reprenons de nouveau l'équation (3.4), multiplions les deux côtés par M et dérivons deux fois par rapport au temps

$$M d^2 \mathbf{r}_g / dt^2 = \sum_i m_i d^2 \mathbf{r}_i / dt^2 = \sum d\mathbf{p}_i / dt = d\mathbf{p} / dt = \sum_i \mathbf{F}_i^{ext}$$

Le mouvement du centre de masse est celui d'un point où toutes les masses du système serait concentrées et à laquelle toutes les forces externes du système s'appliqueraient. Cela nous simplifie pas mal les chose : pour étudier la chute d'une pomme, nous n'avons pas à résoudre les équations du mouvement pour chacun de ses atomes.

3.2.2 Énergie cinétique.

L'énergie cinétique d'une particule est définie par

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

où v est la magnitude de la vitesse de la particule. T est une quantité scalaire de dimension ML^2T^{-2} . L'énergie cinétique d'un ensemble de particules et la somme des énergies cinétiques de chaque particule $T = (1/2) \sum_i m_i v_i^2$. Comme nous l'avons vu, l'énergie cinétique à la même dimension que le travail. Quel est la relation entre ces deux quantités? Prenons une particule qui, sous l'effet d'une force \mathbf{F} part d'un point A au temps $t = t_0$ pour arriver à un point B au temps $t = t_1$ le long d'une trajectoire $\mathbf{r}(t)$. Le travail de cette force est

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}) dt = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \cdot dt \quad (3.6)$$

Or nous savons que $\mathbf{F} = m d\mathbf{v} / dt$ donc

$$W = \int_{t_0}^{t_1} m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} \cdot dt = (1/2) m \int_{t_0}^{t_1} \frac{d(v^2)}{dt} dt = T_B - T_A \quad (3.7)$$

Le travail effectué est la différence entre les énergies cinétique de la fin et du début du mouvement.

Une remarque importante s'impose. Si la force est telle qu'elle est toujours perpendiculaire à la vitesse de la particule, alors $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0$ et le travail donné par l'expression (3.6) est nul! Ceci est le cas notamment des forces magnétiques ($\mathbf{F} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$) et des forces de Coriolis ($\mathbf{F} = 2m\vec{\omega} \wedge \mathbf{v}$). L'énergie cinétique et donc la vitesse se conservent lors d'un mouvement sous l'influence de ces forces.

3.2.3 Énergie totale.

Nous avons définie au premier chapitre ce qu'est un potentiel et nous avons vu dans quelle condition elle existe. Si elle existe, le travail lors d'un déplacement du point A au point B est

$$W = V_A - V_B$$

et nous avons vu également que $W = T_B - T_A$. Donc, lors du mouvement,

$$T_B + V_B = T_A + V_A = \text{Cte.}$$

Le quantité $E = T + V$ est appelée l'énergie totale du système, et elle est conservée lors du mouvement. Rappelons que cette quantité se conserve si les forces appliquées dérive d'un potentiel. Les forces de frottement par exemple *ne dérive pas* d'un potentiel et lors d'un mouvement avec frottement, l'énergie *ne se conserve pas*.

On peut aller un peu plus loin dans cette analyse : supposons qu'une partie des forces appliquées au système dérivent d'un potentiel, et une partie non. Ceci est le cas par exemple de la chute d'un corps soumis au frottement. La force de gravité dérive du potentiel, mais pas la force du frottement. Notons par \mathbf{F}_c la force qui dérive d'un potentiel V et \mathbf{F}_{nc} la force qui n'en dérive pas (on parle souvent des forces conservatrices et non conservatrices, du le nom des indexes). Le travail est

$$W = \int_A^B \mathbf{F}_c d\mathbf{r} + \int_A^B \mathbf{F}_{nc} d\mathbf{r}$$

Comme \mathbf{F}_c dérive de V , nous savons que le premier terme de la somme vaut $V_A - V_B$. Appelons W_{nc} le deuxième terme de la somme.

$$W = V_A - V_B + W_{nc} = T_B - T_A$$

En réarrangeant les termes de l'équation ci-dessus, nous avons :

$$(T_B + V_B) - (T_A + V_A) = W_{nc}$$

Nous continuons d'appeler $E = T + V$. Nous avons donc finalement :

$$\Delta E = W_{nc}.$$

La variation de l'énergie totale du système égale au travail des forces non conservatrices.

Pour les forces de frottement, la force est toujours dans la direction opposée au mouvement, donc $W_{nc} < 0$: l'énergie totale du système *décroit* lors du mouvement avec frottement.

3.2.4 Le moment cinétique.

Le moment cinétique (on l'appelle également par moment angulaire) d'une particule par rapport à un point O est définie par

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p} \tag{3.8}$$

C'est une quantité vectorielle, de dimension ML^2T^{-1} . Notons que cela est la dimension d'une force multipliée par une longueur et un temps.

Le moment d'une force \mathbf{F} par rapport à un point O est définie par

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F} \tag{3.9}$$

où \mathbf{r} est le point d'application de la force. Dérivons l'expression (3.8) par rapport au temps :

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \wedge \mathbf{p} + \mathbf{r} \wedge \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

Le premier terme du rhs est nulle, puisque c'est le produit vectoriel de deux vecteurs parallèle. Dans le deuxième terme, nous reconnaissons l'expression de la force. Donc :

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F} = \mathbf{N}$$

ceci est une relation très analogue à celle écrite pour la quantité du mouvement : la dérivée de la quantité du mouvement par rapport au temps vaut la force, et la dérivée du moment cinétique par rapport au temps vaut le moment de la force appliquée.

La variation du moment est nulle dans deux cas : (i) si le système est isolé et ne subit pas de force (comme pour la quantité du mouvement); (ii) si la force est toujours dans la direction radiale. Ce dernier cas est très important puisque dans de nombreux problèmes (comme ceux liés à la gravité) la force est effectivement radiale. La conservation du moment cinétique nous donne alors directement une intégrale première.

3.3 Principe de Curie.

Pierre Curie (le mari de madame, très grand scientifique, mais on l'oublie trop souvent) a énoncé le principe suivant : “*La symétrie des effets est au moins aussi grande que la symétrie des causes*”. Ceci est un concept extrêmement profond et qui est primordial à comprendre. Ce principe est parfois violé (on parle alors de brisure de symétrie) et dans ce cas il donne lieu souvent à des développements théoriques fondamentaux. Nous allons le considérer comme un principe immuable, à obéir religieusement.

Exemple 1. Prenons une particule de vitesse initiale \mathbf{v}_0 et soumis à une force. A l'instant initiale, la force et la vitesse définissent un plan \mathcal{P} . Supposons que la force reste toujours parallèle à ce plan. Les causes sont donc la vitesse initiale et la force. Ses causes sont invariant par symétrie par rapport au plan \mathcal{P} . La trajectoire est la cause de ces effets, elle doit donc également être invariant par rapport à l'opération “symétrie par rapport au plan \mathcal{P} : La trajectoire doit donc appartenir à ce plan : le mouvement restera confiné à ce plan. Application au mouvement dans champs gravitationnel ?

Exemple 2. Si la force est toujours parallèle à la vitesse initiale, quelle est la trajectoire ?

Exemple 3. Quelle est la direction de la force gravitationnelle due à une sphère de densité uniforme ? due à un plan ? due à une ligne ?

3.4 Exercices.

Nous allons approfondir les concepts rencontrés à travers les prochains problèmes.

3.4.1 Mouvement dans un champs magnétique.

Soit une particule de masse m et de charge q de vitesse initiale $(v_x^0, v_y^0, 0)$. Il existe un champ magnétique uniforme $\mathbf{B}(x, y, z) = B\mathbf{k}$ perpendiculaire au plan. La force de Lorenz à laquelle la particule est soumise est $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$. Écrire et résoudre les équations du mouvement. Quelle est la trajectoire si la vitesse initiale possède une composante selon \mathbf{k} ?

3.4.2 glissement le long d'une sphère.

En faite, on se ramène au problème du glissement le long d'un cercle.

3.4.3 Oscillateur harmonique, avec ou sans frottement, avec ou sans forçage

3.4.4 Déviation vers l'est, traité dans le repère Galiléen.

3.4.5 Chocs élastiques.

3.4.6 Oscillation d'une double pendule.

Pour mettre en valeur par la suite les avantages de la mécanique analytique.

3.4.7 Gravitation et mouvement orbital par les lois de conservation.

Chapitre 4

Détour : Théorie cinétique des gaz

En utilisant le résultat des chocs élastiques, montrer la nature de la pression. En déduire la nature moléculaire de la viscosité pour une grosse particule qui bouge dans un fluide. Montrer la distribution de maxwell.

Chapitre 5

Détour : Écoulement des fluides.

Essentiellement, en appliquant les lois de conservation, démontrer la loi de Bernoulli des écoulements parfaits. Traiter le vidage des vases etc.

Chapitre 6

Calcul des perturbations.

Comme vous le savez, il y a finalement très peu d'équations que nous savons résoudre. Dans la pratique, on doit souvent renoncer à une solution analytique de nos équations et nous contenter de solutions approchées. Bien sûr, cela n'est pas un problème si la solution approchée est meilleure que la précision que nous cherchons en pratique.

Une des principales méthodes d'approximation s'appelle le calcul de perturbation. C'est, en gros, la généralisation du développement en série de Taylor. Voyons cela sur un exemple. Supposons que nous savons résoudre l'équation $x^2 - 1 = 0$, (dont nous noterons la solution x_0) et que nous voulons résoudre l'équation

$$x^2 + \epsilon x - 1 = 0 \tag{6.1}$$

où $\epsilon \ll 1$. Cherchons la solution sous la forme

$$x = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots \tag{6.2}$$

et essayons de déterminer les coefficients x_1, x_2, \dots . En injectant (6.2) dans (6.1), on trouve :

$$(x_0^2 - 1) + (2x_0x_1 + x_0)\epsilon + (2x_0x_2 + x_1^2 + x_1)\epsilon^2 + \dots = 0$$

Cette égalité doit être valide quelque soit ϵ , tous les termes du développement en ϵ doivent être donc nuls. Cela nous donne :

$$\begin{aligned} x_0^2 &= 1 \\ 2x_0x_1 + x_0 &= 0 \\ 2x_0x_2 + x_1^2 + x_1 &= 0 \end{aligned}$$

et ainsi de suite. La première équation ne nous apprend rien, c'est notre équation sans perturbation. De la première équation, on obtient $x_1 = -1/2$. De la deuxième équation, on tire $x_2 = -x_1(x_1 + 1)/2x_0$ et comme on connaît x_0 et x_1 , on peut calculer x_2 et ainsi de suite. LE truc dans cette méthode est que pour calculer x_n , il nous suffit simplement de connaître $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0$: en procédant étape par étape, nous pouvons calculer tous les termes si on est assez patient. En général cependant, nous n'allons pas au delà de l'ordre deux (et même souvent de l'ordre 1). Voyons ce que cela nous donne pour notre exemple, autour de la solution $x_0 = +1$. Nous avons alors $x_1 = -1/2$ et $x_2 = 1/8$. La solution de notre équation s'écrit donc :

$$x = 1 - (1/2)\epsilon + (1/8)\epsilon^2 + \dots$$

Bon, comme nous avons encore quelques souvenirs du lycée, on sait que l'équation (6.1) est une équation de second ordre dont la solution exacte positive est

$$x = \frac{-\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 + 4}}{2} = 1 - (1/2)\epsilon + (1/8)\epsilon^2 + \dots$$

ce qui est bien sûr la même chose qu'obtenue par la technique de perturbation.

Q. Comparer la solution exacte avec la solution obtenue à partir des perturbations à l'ordre 1 et 2 pour $\epsilon = 0.01, 0.1, 1$.

Q. Résoudre $x - \sin x = \epsilon$.

Dans ce cas, nous connaissons la solution exacte, mais si l'équation à résoudre était $x^{12} + \epsilon x^5 - 1 = 0$, il ne nous resterait que le calcul des perturbations.

Ce que nous avons dit s'étend facilement aux équations différentielles.

A compléter : insister sur le calcul de stabilité.

Chapitre 7

Calcul des variations.

Le calcul des variations a pris naissance par un défi qu'a lancé un des frères Bernoulli à la communauté scientifique dans les années 1690 : Soit deux points $A = (x_1, z_1)$ et $B = (x_2, z_2)$ et une courbe $z(x)$ qui relie les deux. On lâche un objet au point A qui glisse le long de la courbe z sous l'effet de la gravité pour arriver au point B au bout d'un temps T . Comment faut-il choisir la courbe pour que T soit le plus petit possible ? Bernoulli a donné un an à la communauté pour résoudre ce problème avant qu'il ne rende publique sa solution. Au bout de cette période, tous les grands noms avaient répondu, et les réponses publiées dans *Acta qqchose* : Newton, Leibnitz, l'autre frère Bernoulli, Hôpital (sa réponse était erronée). Quelque vingt-trente ans après, Euler a donné la solution générale de ce genre de problème : trouver une courbe qui minimise (ou maximise) une certaine intégrale. Lagrange a ensuite étendu le champ de ces problèmes (environ 1780) et a montré que toute la mécanique peut être reformuler en terme de ce genre de problème. Les équations auxquelles doit obéir la courbe pour maximiser l'intégrale sont connu depuis sous le noms des équations Euler-Lagrange. Hamilton et Jacobi (1830-1850) ont ensuite reformulé la mécanique Lagrangienne pour la mettre sous une forme plus symétrique (dite canonique). Cette formulation de la mécanique ne fait plus appel explicitement aux forces (notion toujours quelque peu confuse), intègre très facilement les changements de coordonnées et de repère et les contraintes géométriques imposées au système. Sur un plan fondamental, elle utilise la minimisation d'une certaine intégrale et unifie de nombreux champs de la physique : l'électromagnétisme, la relativité, la mécanique quantique, ... Cette dernière d'ailleurs est entièrement formulée en terme de mécanique Hamiltonien.

Nous allons au cours de ce chapitre introduire les bases du calcul des variations. Le prochain chapitre est dédié à reformuler la mécanique en terme de calcul des variations. Nous y verrons également le théorème de Noether où les lois de conservation sont déduite des propriétés de symétrie du système.

7.1 Extremum d'une fonction.

Soit une fonction $f(x, y)$ (tout ce que l'on va raconter se généralise à n variables de façon évidente). On peut regarder la fonction f comme la hauteur en fonction de la position dans le plan. La valeur de la fonction au point $(x + dx, y + dy)$ est reliée, au premier ordre, à sa valeur au point (x, y) par $f(x + dx, y + dy) = f(x, y) + df$ où :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

df est la variation de la fonction f et elle est relié de façon *linéaire* aux variations des variables indépendantes : si on double dx et dy , df est également doublé. Un point (x, y) est un extremum local si au voisinage de ce point, $df = 0$ *quelque soit* dx et dy . Le mot "quelque soit" a toute son importance. Elle implique qu'en ce point, pour qu'on ait $df = 0$, il faut que $\partial f / \partial x = 0$ et

$\partial f/\partial y = 0$. On dit alors que f est stationnaire (au premier ordre) dans le voisinage de (x, y) . Bien sûr, si on se ballade autour de l'extremum de (dx, dy) la fonction f ne reste pas constante, mais ses variations sont de second ordre en dx, dy .

Exemple. Soit la fonction $f(x) = \sin x$. Autour du point $x = \pi/3$, les variations de f sont linéaire en dx , par exemple $\sin(\pi/3 + 0.01) \approx \sin(\pi/3) + (1/2) \times 0.01 = \sin(\pi/3) + 0.005$. Autour du point $x = \pi/2$ par contre, les variations sont quadratique en dx : $\sin(\pi/2 + 0.01) \approx \sin(\pi/2) - (1/2) \times (\sqrt{3}/2) \times (0.01)^2 \approx \sin(\pi/2) - 0.00004$.

La variation de deuxième ordre de f est donnée par

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$$

Autour de l'extremum, $f(x + dx, y + dy) = f(x, y) + (1/2)d^2 f$. On dit que (x, y) est un minimum si $d^2 f > 0$ quelque soit dx, dy et un maximum si $d^2 f < 0$ quelque soit dx, dy . Si $d^2 f$ est positif pour certaine valeur de dx, dy et négatif pour d'autre, l'extremum n'est ni un maximum ni un minimum. C'est le cas d'un col en montagne.

7.2 Extremum d'une fonctionnelle.

On peut voir une fonction comme une boîte noire à l'entrée de laquelle on introduit des données et en réponse à cela, elle nous sort un scalaire. La fonction $f(x, y) = \sin(x + y)$ par exemple, en réponse à l'entrée $(\pi/3, \pi/6)$ nous sort 1. Une fonctionnelle est une boîte noire dans laquelle on introduit une fonction et en réponse, elle nous rend un scalaire.

Exemple 1. la fonctionnelle $\mathcal{F}(f) = \max(f(x))$ pour $x \in [0, 1]$. Ainsi, $\mathcal{F}(\sin) = \sin(1) \approx 0.8415$, et $\mathcal{F}(\log) = 0$.

Exemple 2. la fonctionnelle $\mathcal{F}(f) = \int_0^1 f^2(x) dx$. Ainsi, $\mathcal{F}(\sin) = 1/2 - (1/4)\sin(2) \approx 0.27$, et $\mathcal{F}(\log) = \infty$.

Exemple 3. $\mathcal{F}(f) = \int_0^1 [f^2(x) + f'(x)] dx$. Ainsi, $\mathcal{F}(\sin) = 1$, et $\mathcal{F}(\log) = \infty$.

On peut voir une fonction de n variables comme un opérateur qui fait correspondre à un point d'un espace de n dimensions un nombre réel. De même, on peut définir l'espace des fonctions, chaque fonction étant un point de cet espace. Cet espace est de dimension infini bien sûr (en faite, très infini). Une fonctionnelle est un opérateur qui fait correspondre à un point de cet espace un nombre réel. L'espace de toute les fonctions est vraiment très vaste, et pour de nombreuses applications, nous avons à considérer (seulement!) des sous ensembles de ce dernier : par exemple, l'ensemble \mathcal{E} de toute les fonctions d'une variable qui valent 0 au point $x = 0$ et 1 au point $x = 1$ (exemple : $\sin(x)/\sin(1)$). On peut maintenant se poser la question : existe il une fonction dans ce sous espace qui minimise une fonctionnelle donnée? La réponse pour le premier exemple est $f(x) = -\infty$ pour $0 < x < 1$ et $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Pour le deuxième exemple également, la réponse est banale : $f(x) = 0$ pour $0 \leq x < 1$ et $f(1) = 1$. La réponse pour l'exemple 3 est beaucoup moins trivial. Elle est justement $f(x) = \sin(x)/\sin(1)$. Le calcul des variations trouve des solutions pour des problèmes du genre 3. Plus précisément,

définition. calcul des variations. Soit la fonctionnelle

$$\mathcal{F}(f) = \int_a^b \mathcal{L}(f, f', x) dx$$

trouver la fonction $f(x)$ tel que la fonctionnelle soit optimum, avec la condition $f(a) = f_0$ et $f(b) = f_1$.

Exemple. Le Brachistochrone. Le problème de Brachistochrone est le défi lancé par Bernoulli et expliqué plus haut. La particule glisse le long de la courbe $z(x)$ pour aller de A à B sans vitesse initiale. Prenons l'origine au point A et appelons (x_1, z_1) les coordonnées du point B ($z < 0$). Le temps de parcours est alors :

$$t = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1+z'^2}{-2gz}} dx$$

La fonction \mathcal{L} est appelée un Lagrangien. Revenons un moment sur la définition. Nous voulons trouver f pour que la fonctionnelle soit *optimum*. Qu'est ce qu'on entend par ce mot ? La même chose que quand on cherchait l'extremum d'une fonction. Soit f une fonction de notre sous espace \mathcal{E} , c'est à dire l'ensemble des fonctions telle que $f(a) = f_0$ et $f(b) = f_1$. On demande en plus aux membres de \mathcal{E} d'être continuellement différentiable deux fois. Soit ϕ une fonction quelconque continuellement différentiable deux fois tel que $\phi(a) = \phi(b) = 0$ et finalement soit ϵ un nombre réel petit. Il est évident alors que si $f \in \mathcal{E}$, $f + \epsilon\phi \in \mathcal{E}$. Au premier ordre, nous pourrions écrire

$$\mathcal{F}(f + \epsilon\phi) = \mathcal{F}(f) + d\mathcal{F} = \mathcal{F}(f) + \mathcal{G}(A\epsilon\phi)$$

où A ne dépend pas de ϕ et \mathcal{G} est une fonctionnelle. On dit alors que f est un optimum de \mathcal{F} si $d\mathcal{F} = 0$ quelque soit ϕ . A ressemble très fort à notre notion de dérivée pour les fonctions, on le désigne parfois comme une dérivée fonctionnelle. La condition f optimum implique que $A = 0$. Calculons A .

$$\mathcal{F}(f + \epsilon\phi) = \int_a^b \mathcal{L}(f + \epsilon\phi, f' + \epsilon\phi', x) dx \quad (7.1)$$

$$= \int_a^b \mathcal{L}(f, f', x) dx + \int_a^b \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} \epsilon\phi(x) dx + \int_a^b \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'} \epsilon\phi'(x) dx \quad (7.2)$$

Dans l'expression ci-dessus, nous avons écrit des termes du genre $\partial \mathcal{L} / \partial f$ et $\partial \mathcal{L} / \partial f'$. Qu'est ce que l'on veut dire par la ? Notons que \mathcal{L} est une fonction normale de trois variables. Dans l'exemple de Brachistochrone, $\mathcal{L}(z, z', x) = (-2gz)^{-1/2}(1+z'^2)^{1/2}$ (elle ne dépend pas explicitement de x ici). $\partial \mathcal{L} / \partial f$ veut dire que l'on dérive \mathcal{L} par rapport à f comme si f était une variable normale. De même, $\partial \mathcal{L} / \partial f'$ veut dire que l'on dérive \mathcal{L} par rapport à f' comme si f' était une variable normale (et sans aucune relation avec f). Dans l'exemple de Brachistochrone,

$$\partial \mathcal{L} / \partial z = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2g}{-z}} \quad (7.3)$$

$$\partial \mathcal{L} / \partial z' = -\frac{z'}{\sqrt{1+z'^2}} \quad (7.4)$$

Si vous voulez éviter des confusions, vous pouvez remplacer f' dans le Lagrangien par une variable muette (par exemple) u , dériver \mathcal{L} par rapport à u et une fois la dérivation finie, remettre f' à la place de u .

Revenons à notre calcul. Dans l'expression (7.2), le deuxième terme du rhs à une bonne tête. On peut mettre le troisième terme sous une forme plus appropriée, en effectuant une intégration par partie :

$$\int_a^b \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'} \epsilon\phi'(x) dx = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'} \epsilon\phi(x) \right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'} \right) \epsilon\phi(x) dx$$

Le premier terme du rhs est nul, puisque par définition, $\phi(a) = \phi(b) = 0$. La variation $d\mathcal{F}$ s'écrit donc :

$$d\mathcal{F} = \int_a^b \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'} \right) \right] \epsilon\phi(x) dx$$

La quantité entre $[]$ est notre A . Pour que $d\mathcal{F} = 0$ quelque soit ϕ , nous devons avoir :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'} \right) = 0$$

Cela s'appelle l'équation d'Euler–Lagrange, et ramène le problème d'optimisation fonctionnelle à la résolution d'une équation différentielle.

Exemple. Toujours le Brachystochrone. En dérivant l'expression (7.4) par rapport à x on trouve :

$$\frac{d}{dx}(\partial\mathcal{L}/\partial z') = \frac{z''(z'^2 - \sqrt{1+z'^2})}{1+z'^2}$$

et l'équation d'Euler–Lagrange s'écrit :

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2g}{-z}} - \frac{z''(z'^2 - \sqrt{1+z'^2})}{1+z'^2} = 0$$

C'est une équation différentielle a priori horrible à résoudre, mais nous verrons qu'elle se comporte pas si mal. Notons que pour calculer $\frac{d}{dx}(\partial\mathcal{L}/\partial z')$, nous avons considéré cette fois z' comme la dérivée de z par rapport à x . Cela paraît un peu confus au début, et il faut se faire la main sur des exercices pour se familiariser.

En mécanique, il est plus usuel de noter la variable indépendante par t . La variable dépendante est souvent la coordonnées $x(t)$ et nous noterons sa dérivée par rapport au temps \dot{x} . Comme on se trouve souvent à n dimensions, nous pouvons avoir plusieurs variables dépendantes : $x(t), y(t), z(t), \dots$. Si maintenant, le lagrangien dépend de ces variables et de leurs dérivées, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, \dot{x}; y, \dot{y}, z, \dot{z}; t)$ le problème d'optimisation se ramène à la résolution de n équations différentielle couplés :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) &= 0 \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) &= 0 \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \right) &= 0 \end{aligned}$$

7.3 Exercices.

7.3.1 Mouvement uniforme.

Ou problème géométrique. quel est la distance la plus courte pour aller d'un point A à un point B en géométrie Euclidienne ? On peut introduire ici les bases de la géométrie Riemannienne.

7.3.2 Oscillations harmonique.

Écrire l'équation d'EL pour $\mathcal{L} = \dot{x}^2 - x^2$, avec la condition initiale $x(0) = 0$ et $x(t_1) = x_1$. Que ce passe-t'il si $t_1 \rightarrow \pi$? Même chose si $\mathcal{L} = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - (x^2 + y^2)$.

7.3.3 La dérivation d'Euler.

Euler a dérivé sa fameuse équation de façon beaucoup plus intuitive.

7.3.4 Le Brachistochrone.

Résoudre le Brachistochrone. Analogie avec les trajets lumineux.

7.3.5 Élasticité des barres.

Dériver l'équation d'EL pour un lagrangien qui dépend également des dérivées secondes. Application à l'élasticité des barres.

7.3.6 Notion avancée : approximation semi-classique.

7.4 Multiplicateurs de Lagrange.

Bien dégager les concepts de contraintes locales et globales (où isopérimétrique).
Équation de la chaînette.

7.5 Notion avancée : variation des limites.

Chapitre 8

Mécanique analytique.

8.1 Principe des moindres action.

Résumons le calcul variationnel : un trajectoire qui relie deux points a un “coût” qu’on appelle le Lagrangien ; le calcul des variations permet de sélectionner la trajectoire qui a un coup minimum ¹. En mécanique, le coût par unité de temps d’une trajectoire est l’excès de l’énergie cinétique sur l’énergie potentiel :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t) = T - V$$

Le coût total de la trajectoire est appelé *action* :

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t) dt$$

La trajectoire choisie est celle que minimise l’action. On appelle cela le principe des moindres actions.

Exemple. Un objet de masse m quitte l’origine au temps $t = 0$ pour arriver au temps $t = t_1$ au point $(x_1, 0, 0)$. Elle n’est soumise à aucune force ($V(x, y, z) = 0$). Le lagrangien s’écrit dans ce cas

$$\mathcal{L} = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)/2$$

Différentes trajectoires sont possible. Par exemple, le mouvement rectiligne uniforme $x(t) = (x_1/t_1)t$; $y(t) = z(t) = 0$. Le coup de cette trajectoire est $S_0 = \int_0^{t_1} (m/2)(x_1/t_1)^2 dt = (m/2)x_1^2/t_1$. Une autre trajectoire possible est un trajet circulaire : $x(t) = x_1(1 - \cos(\pi/t_1)t)/2$; $y(t) = x_1/2 \sin(\pi/t_1)t$; $z(t) = 0$. Le coût de cette trajectoire est $S_1 = (m/2)(\pi/2)^2 x_1^2/t_1 > S_0$. En faite, on peut imaginer n’importe quelle trajectoire, son *action* sera toujours supérieure à S_0 . La meilleure trajectoire est donc le mouvement rectiligne uniforme, et c’est donc celle là qui va être choisie. Notons la similitude avec le principe de Fermat pour l’optique : le trajet lumineux est celui où le temps de parcours est minimum.

Cela paraît un peu mystérieux : c’est comme si il existait un être supérieur qui connaîtrait le coût de toutes les trajectoires à l’avance et qui guiderait la particule le long de la meilleure ! (Des commentaires ?)

En coordonnées cartésienne, le Lagrangien s’écrit :

$$\mathcal{L} = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)/2 - V(x, y, z)$$

1. En faite, la trajectoire dont le coût est un extremum (minimum ou maximum). De plus, cette trajectoire est un extremum *local* : il peut exister d’autres trajectoires “loin” de celle donnée par les équations d’Euler–Lagrange et qui ont des coût inférieurs (cela pose la question de la stabilité locale versus global). Nous nous préoccupons pas de ces questions ici.

et les équations d'Euler–Lagrange nous donne :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + \partial V/\partial x &= 0 \\ m\ddot{y} + \partial V/\partial y &= 0 \\ m\ddot{z} + \partial V/\partial z &= 0 \end{aligned}$$

Ce qui est bien sûr, la même chose que les équations du mouvements de Newton. Donc, les trajectoires qui suivent les lois de mouvement de Newton sont justement celles qui minimisent l'action. Le lecteur va se demander si les deux formulations sont analogues, et si l'écriture des équations d'EL nous ramènent aux équations du mouvement, alors à quoi elles servent ? Les réponses sont multiples. D'abord, il s'avère que cette formulation est plus fondamentale que celle de Newton. La définition de Newton fait entrer explicitement les forces, la définition Lagrangienne utilise les énergies. Or, il s'avère que le concept d'énergie est plus fondamentale que celle du force. En mécanique quantique par exemple, la force ne veut plus rien dire, mais l'énergie garde toute sa signification. Bon, d'accord, mais ici on fait de la mécanique classique, on veut résoudre des problèmes de tous les jours, et le côté fondamental, hmmm. La grande force de la mécanique analytique vient du faite qu'elle gère très facilement les changements de coordonnées. Il n'y a que les problèmes les plus simples qui se résolvent facilement dans ces coordonnées. Les problèmes légèrement plus compliqués font intervenir des contraintes géométriques qui nécessite d'autres coordonnées. Il faut alors, pour la méthode de Newton, projeter les forces et les accélérations dans d'autres repères, ce qui n'est pas très simple. La difficultés ici c'est la projection des accélérations, qui sont les dérivées secondes des positions. La méthode de Lagrange ne fait intervenir que les vitesses, qui sont les dérivées première.

Exemple 1. Un objet de masse m glisse le long d'un cercle $x^2 + y^2 = R^2$. Trouver son équation de mouvement.

R. Par la méthode classique, il faut projeter la force de la gravité le long de la direction tangentielle, en déduire l'accélération tangentielle, et de là, remonter à l'accélération dans le repère Galiléen (**exercice** : le faire). Si maintenant on repère la position de l'objet en coordonnées polaire par son angle θ , la vitesse s'écrit $v = R\dot{\theta}$. Le potentiel est donné par $V = mgy = mg \sin \theta$. Le lagrangien est donc :

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = 1/2m(R\dot{\theta})^2 - mg \sin \theta$$

et l'équation d'EL nous donne immédiatement

$$R^2\ddot{\theta} + g \cos \theta = 0$$

Cette équation différentielle aurait pu être obtenu en considérant la conservation de l'énergie. A nouveau, c'est une méthode qui nous aurait éviter d'écrire directement les forces. Mais si l'énergie de l'objet n'est pas constante ? Ceci est le cas par exemple quand les contraintes injectent de l'énergie dans notre système.

Exemple 2. un objet de masse m peut glisser sans frottement le long d'une barre. La barre est soumis à une rotation de vitesse constante ω . Écrire et résoudre les équation du mouvement. (**exercice.** le faire par la méthode de Newton).

R. En coordonné polaire, la vitesse est donnée par $v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 = \dot{r}^2 + \omega^2 r^2$. L'énergie potentiel dans ce problème est nul. Le lagrangien vaut donc simplement $\mathcal{L}(r, \dot{r}) = m/2(\dot{r}^2 + \omega^2 r^2)$ et EL nous donne :

$$\ddot{r} - \omega^2 r = 0$$

et donc $r(t) = r_0 e^{\omega t}$. Notons que bien qu'il n'y ait pas de potentiel dans ce problème, le terme $-m\omega^2 r^2/2$ joue le rôle d'un potentiel *effectif* dans le lagrangien.

Il existe un lien étroit entre le formalisme lagrangien et le principe des travaux virtuels. Dans ce dernier, le calcul des travaux virtuels nous dispensait de calculer explicitement les contraintes. Le formalisme lagrangien nous donne la même possibilité. Dans le problème de la barre tournante,

nous n'avons jamais eu à calculer explicitement la force exercée par les contraintes. En réalité, d'Alembert (vers 1750) à généralisé le principe des travaux virtuels à la dynamique, et Hamilton (environ 1830) a démontré que de là, on peut en déduire la formulation lagrangienne.

8.2 Exercices.

8.2.1 Double pendule.

libre, où quand la première barre est en rotation.

8.2.2 Pendule de Huygens.

8.2.3 glissement le long d'un cercle lui même tournant.

8.2.4 glissement le long d'une barre tournante avec la gravité.

8.2.5 Oscillateur paramétrique.

8.2.6 voyage sous la terre.

8.2.7 Une barre ou deux barres jointes et projetée(s).

8.2.8 roulement sans glissement.

8.3 Le théorème de Noether.

Nous avons vu au chapitre sur la dynamique qu'il existe des lois de conservation. Ces lois se déduisent très naturellement de la formulation lagrangienne de la mécanique. Prenons un lagrangien dont le potentiel ne contient pas explicitement d'une des variables. Par exemple,

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y)$$

pour la variable z , l'équation d'EL s'écrit :

$$\frac{d}{dt}(m\dot{z}) = 0$$

ce qui veut dire $p_z = m\dot{z} = \text{Cte}$. Comme le potentiel ne contient pas explicitement la variable z , la force dans cette direction est nulle, et la composante de l'impulsion dans cette direction se conserve pendant le mouvement. Si le potentiel ne contient aucune des variables explicitement, alors les composantes de l'impulsion dans toutes les directions se conservent : $\mathbf{p} = \text{Cte}$, ce qui bien sûr, est notre vieille loi de la conservation de l'impulsion.

La grande force de la formulation lagrangienne est sa souplesse vis à vis des changements de coordonnées. Supposons que le mouvement soit confiné à deux dimensions, et repérons notre particule à l'aide des coordonnées polaires :

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r, \theta). \quad (8.1)$$

Supposons maintenant que V ne contient pas explicitement l'angle : $V = V(r)$. L'équation d'EL pour θ nous donne alors :

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0$$

ce qui veut dire $p_\theta = mr^2\dot{\theta} = \text{Cte}$. On reconnaît ici la loi de conservation du moment cinétique quand la force est seulement dans la direction radiale (puisque V ne contient pas explicitement θ). Les coordonnées polaires ne sont pas bien sûr les seules changements de coordonnées possible. On aurait pu repérer notre particule à l'aide de n'importe quel système valable (coordonnées

sphérique, parabolique, elliptique,...) où nous aurions noté (q_1, q_2, q_3) la position de notre particule. Le lagrangien s'écrit

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, q_1, q_2, q_3; t)$$

(**exercice** : écrire le lagrangien en coordonnées sphérique). On appelle impulsion généralisée la quantité $p_i = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_i$. Par exemple, en coordonnées polaire, l'impulsion associé à l'angle est l'expression donnée ci-dessus : $p_\theta = mr^2\dot{\theta}$ (qui est bien sûr le moment cinétique). Si une coordonnée q_k n'apparaît pas explicitement dans l'expression du lagrangien, alors l'impulsion associée à cette coordonnée se conserve pendant le mouvement. (**Q.** en coordonnées sphérique, si $V = V(r)$, qu'elle est la quantité qui se conserve ?). Remarquons que dans l'expression (8.1), même si le potentiel V ne contenait pas explicitement la variable r , le lagrangien le contiendrait à travers le terme $r^2\dot{\theta}^2$, nous n'avons donc pas une loi de conservation de l'impulsion $p_r = m\dot{r}$. (**Q.** Est-il possible de trouver un potentiel qui conserverait l'impulsion radial ? penser à l'exemple d'une masse coulissant le long d'une tige tournante.)

Bien, nous avons vu ci-dessus les lois de conservation des impulsions généralisés (quantité de mouvement et moment cinétique). Quand est il de l'énergie ? Pour plus de simplicité, prenons un système à une dimension : $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\dot{x}, x, t)$. Après un intervalle de temps infinitésimal, le temps devient $t + dt$, la position $x + dx$ et la vitesse $\dot{x} + d\dot{x}$. La variation total du lagrangien pendant ce temps (divisé par dt est donc

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} \frac{d\dot{x}}{dt} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}$$

Or, les variations dx et $d\dot{x}$ ne sont pas indépendantes et sont liées par le mouvement qui obéit aux équations d'Euler-Lagrange. Nous savons, d'après les équations d'EL, que $\partial\mathcal{L}/\partial x = d/dt(\partial\mathcal{L}/\partial\dot{x})$. En remplaçant dans l'expression ci-dessus, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}}{dt} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} \frac{d\dot{x}}{dt} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} \right) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} \dot{x} \right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} \end{aligned}$$

Si maintenant le lagrangien *ne contient pas explicitement le temps*, c'est à dire $\partial\mathcal{L}/\partial t = 0$, alors

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} \dot{x} \right)$$

ou, dit autrement :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} \dot{x} - \mathcal{L} \right) = 0$$

La quantité

$$H = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} \dot{x} - \mathcal{L}$$

est donc la quantité qui se conserve pendant le mouvement. On appelle cette quantité (quel coïncidence) *énergie* de la particule. Évaluons la pour notre système à une dimension où $\mathcal{L} = m\dot{x}^2/2 - V(x)$ (bien sûr, V ne dépend pas explicitement du temps). Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} &= m\dot{x} \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} \dot{x} &= m\dot{x}^2 \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} H &= m\dot{x}^2 - m\dot{x}^2/2 + V(x) \\ &= m\dot{x}^2/2 + V(x) \end{aligned}$$

C'est bien sûr notre vieille amie l'énergie $T + V$.

Résumons tout ça. Si le lagrangien ne contient pas explicitement une variable, par exemple x , l'impulsion associée à cette variable se conserve. On dit alors que le système est invariant par translation dans cette direction. Cela veut dire que si on ferme les yeux et que quelqu'un nous déplace dans cette direction, nous ne pouvons pas dire de combien il nous a déplacé : comme le lagrangien ne contient pas x , nous n'avons aucun repère pour savoir si on a bougé ou non. Donc, l'invariance par symétrie de translation implique conservation de l'impulsion. Les rotations sont une forme particulière de translation, et nous avons vu que l'invariance par rotation implique conservation du moment cinétique. Si le lagrangien ne contient pas explicitement le temps, on fermant les yeux et en les rouvrant, on ne peut pas dire combien de temps s'est écoulé : nous avons invariance par translation dans le temps, et nous avons vu que cela implique la conservation de l'énergie.

Le théorème de Noether est la forme très général de ce que nous venons de raconter ci-dessus, et associe à chaque symétrie du système une quantité qui se conserve.

8.4 Dynamique du solide.

Un solide est un ensemble de point reliés par des contraintes, de façon à ce que la position relative des points restent toujours le même². Nous avons vu au chapitre sur l'équilibre que ces contraintes ajoute une condition (somme des moments des forces vaut zero) pour l'équilibre. Nous pouvons étendre ces concept au cas de la dynamique. A nouveau, pour ne pas être embêté par les produits vectoriels à trois dimensions, nous nous bornons au cas où le mouvement du solide est confiné à deux dimension (sans exiger que le solide lui même soit bi-dimensionnel). Nous avons vu précédemment le concept de centre de masse pour un ensemble discret de point. Cela se généralise naturellement quand les masses sont distribuées de façon continue. Nous désignerons par $\rho(\mathbf{r})$ la densité au point \mathbf{r} . Le centre de masse est alors donnée par :

$$\mathbf{r}_g = \frac{1}{M} \int \rho(\mathbf{r})\mathbf{r}.dV$$

où M est la masse totale de l'objet : $M = \int \rho(\mathbf{r}).dV$. L'intégration s'effectue sur le volume du corps, et dV désigne l'élément de volume infinitésimal entourant le point \mathbf{r} . Nous avons également vu que si on mesure les positions par rapport a centre de masse, alors $\int \rho(\mathbf{r}')\mathbf{r}'.dV = 0$. Prenons le plan xy comme le plan du mouvement du solide. Le mouvement infinitésimal du solide est la superposition de la translation du solide et de la rotation infinitésimal $d\vec{\theta} = d\theta\mathbf{k}$ autour du centre de masse. La position d'un point du solide est $\mathbf{r} = \mathbf{r}_g + \mathbf{r}'$, où \mathbf{r}' est la position mesuré à partir du centre de masse.

L'énergie cinétique du solide vaut :

$$\begin{aligned} T &= (1/2) \int \rho(\mathbf{r})(\dot{\mathbf{r}}_g + \dot{\mathbf{r}}')^2 dV \\ &= (M/2)v_g^2 + (1/2) \int \rho(\mathbf{r})v'^2 dV + (1/2)\mathbf{v}_g \cdot \int \rho(\mathbf{r})\dot{\mathbf{r}}' dV \end{aligned}$$

Le dernier terme est nul, puisqu'il s'écrit $\mathbf{v}_g d/dt \int \rho(\mathbf{r}')\mathbf{r}'.dV$. Le premier terme est bien sûr, l'énergie cinétique de translation, comme si toute la masse était concentrée au centre de masse. Le deuxième terme est l'énergie cinétique de rotation. Pour l'évaluer, notons que

$$\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{k} \wedge \mathbf{r}'$$

Appelons $\omega = d\theta/dt$, la vitesse de rotation instantanée. Nous avons alors

$$v'^2 = \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' = \omega^2 (\mathbf{k} \wedge \mathbf{r}') \cdot (\mathbf{k} \wedge \mathbf{r}') = \omega^2 (r'^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}')^2)$$

2. Cette définition n'est pas très précise, mais on fera avec.

et le terme de rotation de l'énergie cinétique s'écrit

$$\omega^2 \int \rho(\mathbf{r})(r'^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}')^2) dV$$

Le terme devant ω^2 ne dépend que de la distribution de masse dans le corps. Il est appelé I , le moment d'inertie (autour de l'axe de rotation qui est z dans notre cas). Il s'écrit

$$I = \int \rho(x, y, z)(x^2 + y^2) dx dy dz.$$

Par exemple, pour un cylindre de densité uniforme ρ , de rayon R et de longueur h ,

$$I = 2\pi\rho h \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi}{2}\rho h R^4 = \frac{M}{2}R^2$$

La dimension du moment d'inertie est ML^2 . L'énergie cinétique s'écrit donc finalement :

$$T = \frac{M}{2}v_g^2 + \frac{I}{2}\omega^2$$

Pour que le Lagrangien soit complet, il nous faut également évaluer le potentiel $V = \int V(\mathbf{r})d^3\mathbf{r}$. Ceci n'est pas en général simple, mais pour certains potentiels, notamment la gravité, le calcul est simple et se ramène au potentiel du point de centre de masse. Pour un objet dans le champ de gravité à la surface de la terre par exemple, $V = Mgy_g$ où on a orienté la force dans la direction $-y$.

Souvent, les objets qui roulent sont soumis à une contrainte dite "roulement sans glissement". C'est une forme particulière de contraintes qu'on appelle *non-holonome*. Elle ne s'exprime pas en fonction des coordonnées de l'objet, mais des différentielles des coordonnées. Pour un corps qui roule sans glissement le long d'un plan (ou d'une surface courbe), cette contrainte s'écrit :

$$v_t = R\omega$$

où v_t est la composante tangentielle (à la surface) de la vitesse du centre de masse, et R la distance du centre de masse au point de contact.

Exemple. Roulement sans glissement d'un cylindre le long d'un plan incliné. Nous prenons notre plan comme $ax + bz = c$ (avec comme d'habitude, $a^2 + b^2 = 1$) et la rotation autour de l'axe y (l'axe du cylindre). La position du cylindre est repéré par (x, z) , son énergie potentielle Mgz , et son énergie cinétique

$$T = M/2(\dot{x}_g^2 + \dot{z}_g^2) + (M/4)R^2\omega^2$$

Nous avons ici deux contraintes : Le mouvement se fait le long du plan incliné, donc les coordonnées du centre de gravité sont liés par $ax_g + bz_g = c + R$. Le vecteur tangent unitaire est $\mathbf{t} = (b, -a)$ et la composante de la vitesse le long de ce vecteur est $b\dot{x}_g - a\dot{z}_g$. La deuxième contrainte (roulement sans glissement) s'écrit alors

$$b\dot{x}_g - a\dot{z}_g = R\omega$$

Nous pouvons donc tout exprimer en fonction d'une seule variable, z par exemple :

$$\begin{aligned} \dot{x}_g &= -(b/a)\dot{z}_g \\ R\omega &= (-b^2/a - a)\dot{z}_g = -1/a\dot{z}_g \end{aligned}$$

Le lagrangien s'écrit alors

$$\mathcal{L} = \frac{M}{2} \frac{1}{a^2} \dot{z}_g^2 + \frac{M}{4} \frac{1}{a^2} \dot{z}_g^2 - Mgz = \frac{3M}{4a^2} \dot{z}_g^2 - Mgz$$

et l'équation d'EL nous donne :

$$\ddot{z} = -\frac{2a^2g}{3}$$

bien sur, si α est l'angle entre le plan incliné et l'horizontal, $a = \sin \alpha$. Notons que si le même cylindre glissait le long du plan incliné *sans frottement*, l'équation du mouvement aurait été $\ddot{z} = -a^2g$. Le "roulement sans glissement" est donc moins accéléré.

8.5 Les multiplicateurs de Lagrange (encore).

Nous avons vu plus haut que par un choix judicieux des coordonnées, on peut éviter de calculer les contraintes. Cela n'est pas toujours faisable. Il se peut aussi que nous soyons intéressé par connaître ces contraintes. Dans ce cas, on fait à nouveau appel aux multiplicateurs de Lagrange.

Exemple. glissement le long d'une surface plane.

8.6 Exercices issus de Landau.

1. Eq. de mouvements, pages 41.; petites oscillations, page 103; oscillations des molécules, pages 120; dynamique des solides, page 156; équilibre des solides 188;