Mécanique analytique (DM)

17th May 2004

1 Exo d'entrainement.

Pendule double. Soit une pendule double (voir figure 1) : deux barres rigides de longueur l, avec la masse m_1 et m_2 à leurs extrémités. Les liaisons sont sans frottement et les mouvements sont confinés dans un plan. Les masses sont soumis à la force de gravité (vers le bas dans la figure).

1. Démontrer que ce système possède deux degrés de liberté. On choisira $\theta_1$et θ_2 (les angles de chaque barre avec la verticale) comme les degrés de liberté de ce système.

2. Ecrire le lagrangien en fonction de ces deux variables, en déduire les équations du mouvement (équation d'Euler–Lagrange).

3. On s'interesse au régime des oscillations de faible amplitude, *i.e.* $\theta_1, \theta_2 \ll 1$. Linéariser les équations du mouvement (developper les divers fonctions et ne garder que les termes de degrès 1 au plus), et obtenir un système différentielle du genre

$$A_1\ddot{\theta}_1 + B_1\ddot{\theta}_2 = C_1\theta_1 + D_1\theta_2 \quad (1)$$

$$A_2\ddot{\theta}_1 + B_2\ddot{\theta}_2 = C_2\theta_1 + D_2\theta_2 \quad (2)$$

   où$A_i, ..D_i$ sont des constantes qu'il faut expliciter en fonction des masses, des longueurs et de g. (Note: certains de ces coefs peuvent être nul).

4. Quelle équation doit satisfaire ω pour que $\theta_1 = K_1 e^{i\omega t}$,$\theta_2 = K_2 e^{i\omega t}$ (où K_1, K_2 sont des constantes) soit une solution générale des équations (1,2) ? En déduire les fréquences propres d'oscillation de ce système.

5. Considérer les cas limites $m_1 \ll m_2$ et $m_1 \gg m_2$et discuter la plausibilité des résultats dans ces cas.

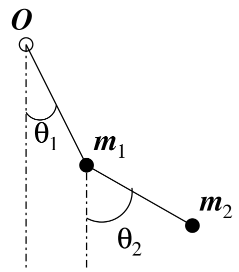

Figure 1: double pendule

2 Approfondissement

1. Problème à deux corps. Soit deux particules de masse m_1 et m_2 qui interagissent via une potentielle qui ne depend que de leur distance mutuelle :

$$\mathcal{L} = (m_1/2)\dot{\mathbf{r}}_1^2 + (m_2/2)\dot{\mathbf{r}}_2^2 - U(\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|)$$

Utiliser deux nouvelles variables $\mathbf{r}_g = (m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2)/(m_1+m_2)$ et $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ et écrire le lagrangien en fonction de ces deux nouvelles variables. Quelle variable est cyclique, et quelle est la loi de conservation qui lui est associée ? En déduire les équations du mouvement pour les deux nouvelles variables. (Note : ne pas oublier que les divers $\mathbf{r}$ sont des vecteurs. Pour plus de facilité, si il le faut, considerer le problème à deux dimensions, et généraliser à 3d).

2. Lagrangien relativiste. Supposons que la lagrangien d'une particule soit données par

$$\mathcal{L}(\dot{x}, x) = -m_0 c^2 \sqrt{1 - (\dot{x}/c)^2}$$

Que vaut le moment associé à x ? Que vaut l'Hamiltonien ? Que vaut l'énergie dans la limite $\dot{x} \ll c$?

3. Passage d'une barrière. Soit l'energie potentielle d'une paticule (bougeant dans le plan xy) $U(x, y)$ tel que $U(x) = U_1$ si $x < 0$ et $U(x) = U_2$ si $x \geq 0$. C'est à dire que dans chaque sous espace, le potentiel est constant mais qu'il varie brusquement au passage de $x = 0$. On suppose que la particule vient des $x < 0$ avec une vitesse v_1 est faisant un angle θ_1 avec l'axe x. On suppose qu'après le passage de la discontinuité, la vitesse de la particule est v_2 et sont angle θ_2. En utilisant le fait que y est une variable cyclique, démontrer que $v_1 \sin\theta_1 = v_2 \sin\theta_2$. En utilisant la conservation de l'énergie, démontrer ensuite que

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \sqrt{1 - \frac{\Delta U}{T_1}}$$

où $\Delta U = U_2 - U_1$ et T_1 est l'énergie cinétique de la particule. Dans quelle condition la particule ne peut pas franchir la discontinuité et est refléchie (un peu d'analogie avec l'optique) ?