Le minimum à savoir sur les équations différentielles.

17th May 2004

Nous rappelons ici les principes de résolution des éqations différentielles (EDs) linéaires les plus simples.

A savoir : Pour résoudre une ED de degrès n, il faut connaître n conditions initiales.

Dans tout ce qui suit, on notera la variable indépendante t, et la variable dépendante $x = x(t)$. On notera les dérivées de x par rapport au temps, soit dx/dt, $d^2x/dt^2, ...$, soit $\dot{x}, \ddot{x}, ...$

1 $\dot{x} = ax$

On suppose a une constante ne dépendant pas du temps. On peut vérifier, par dérivation, que $x = Ce^{at}$ est solution de l'équation ci-dessus. C est une constante quelconque. Pour determiner C, nous avons besoin d'une condition initiale, par exemple connaître la valeur de x à un temps donné t_0. Alors, $C = x(t_0)e^{-at_0}$.

L'équation ci-dessus est dite homogène.

Note : La solution ci-dessus est valable que x et a soient réels où complexes. Ceci est valable pour tout ce qui suit.

2 $\dot{x} = ax + b$

Cette équation est dite inhomogène. Si on connait une solution particulière de cette équation, on peut obtenir la solution général (ceci est vrai pour les ED linéaire de n'importe quel degrés). On peut verifier que $x_p = Cte = -b/a$ satisfait l'ED. La solution générale est donnée par

$$x(t) = Ce^{at} + x_p = Ce^{at} - b/a$$

3 $\dot{x} = a(t)\,x$

Cette fois, le coefficient de x dépend explicitement du temps. Par exemple l'équation $\dot{x} = t\,x$est une équation de ce genre. Supposons que $A(t)$ est une primitive de $a(t)$, c'est à dire $a = dA/dt$. Alors, par dérivation, on peut vérifier que

$$x = Ce^{A(t)}$$

est la solution générale de l'ED.

4 $\dot{x} = a(t)\,x + b(t)$

Cette fois a et b dépendent tous les deux du temps. La section précédente nous met sur la piste (cette méthode de résolution s'appelle la variation des constantes) : cherchons la solution sous la forme de $x(t) = \exp(A(t))u(t)$, où à nouveau $A(t)$ est la primitive de $a(t)$, et $u(t)$ est une fonction inconnue. Si on remplace x et $\dot{x}$ dans l'équation ci-dessus, on trouve

$$e^{A(t)}\dot{u} = b(t)$$

c'est à dire $\dot{u} = \exp(-A(t))b(t)$. Comme nous connaissons $A(t)$ et $b(t)$, il suffit d'integrer l'expression ci-dessus pour trouver u. Appelons $B(t) = \int \exp(-A(t))b(t)dt + C$, où C est une constante d'integration. Nous avons alors la solution de notre équation :

$$x(t) = e^{A(t)}(B(t) + C).$$

Exemple. Supposons que nous voulons résoudre $\dot{x} = tx - t$, avec la CI $x(0) = 0$. Ici, $a(t) = t$ et $b(t) = -t$. Alors, $A(t) = \int a(t)dt = t^2/2$ et $B(t) = -\int \exp(-t^2/2)tdt = \exp(-t^2/2)$. La solution de notre équation est alors

$$x(t) = e^{t^2/2}(e^{-t^2/2} + C).$$

En utilisant la CI, on trouve $C = -1$. Donc, $x(t) = -e^{t^2/2} + 1$

5 $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$

On résoud d'abord l'équation *algébrique* adjoint $r^2 + ar + b = 0$. Cela nous donne deux racines $r_1$et r_2. La solution de l'ED est alors donnée par

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}.$$

Les deux racines r_1, r_2 peuvent être réelles où complexe, de même que a et b. Si la solution que l'on cherche est réélle, on peut toujours regrouper les termes pour écrire

$$x(t) = e^{st}(D_1 \cos(pt) + D_2 \sin(pt))$$

où s, p sont les parties réelles et imaginaire de r_1, r_2. C_i et D_i sont des constantes que l'on détermine en utilisant les CI.

Exemple. Resolvons l'équation $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$ avec les CI $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$.

L'équation adjointe $r^2 + 2r + 5 = 0$ admet les deux solutions $r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{-4} = -1 \pm 2i$. La solution est alors

$$x(t) = e^{-t}(C_1 e^{2it} + C_2 e^{-2it}).$$

La condition $x(0) = 1$ nous impose $C_1 + C_2 = 1$. La condition $\dot{x}(0) = 0$ nous donne $C_1 - C_2 = 0$, et donc, finalement, $C_1 = C_2 = 1/2$, et donc,

$$x(t) = e^{-t}\cos(2t)$$

La partie imaginaire des racines nous donne toujours des oscillations, et sa partie réélle des amortissements (où croissance exponentielle).

Exercice. Résoudre $\ddot{x} + 2i x + 3 = 0$, avec les même CI que précedemment.

6 $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = c$

On voit qu'une solution particulière de cette ED est $x = c/b$. La solution générale est donc

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + c/b$$

7 Système d'équations différentielles couplées.

En général, la résolution d'un système de n ED de première ordre et *une* ED de *n-ième* degrés sont équivalente. Par exemple, le système

$$\begin{aligned} \dot{y} &= 2x+1 \\ \dot{x} &= 4y+2 \end{aligned}$$

est équivalent à $\ddot{y} = 8y + 6$ (il suffit de dériver la première équation et utiliser la valeur de $\dot{x}$ de la deuxième équation). Une fois y connu, il suffit d'utiliser la première équation pour obtenir x.

L'algèbre linéaire cependant nous fournit une méthode plus pratique : il suffit de chercher les valeurs propres d'une certaine matrice. Pour voir cela plus en détail, consulter un livre de mathématique.

Nous pouvons manipuler les différentielles de premiers ordres (*et seulement celles-là*) presque comme des nombres ordinaires. Supposons que les positions x, y d'un point soient données par une ED du genre:

$$\begin{aligned} dx/dt &= ky \\ dy/dt &= -kx \end{aligned}$$

Alors, en divisant l'une des ED par l'autre, on trouve $dy/dx = -x/y$. En transformant encore un peu, on trouve :

$$ydy + xdx = 0$$

ou dit autrement :

$$x^2 + y^2 = \text{Cte}$$

Ceci est l'équation d'un cercle : sans avoir résolu les ED, on a trouvé la trajectoire. Bien sûr, cela ne nous donne pas encore les équations du mouvement, c'est à dire $x(t)$ et $y(t)$.

Exercice : Quelles sont les trajectoires si la deuxième équation est $dy/dt = kx$? où si $dy/dt = k$