Corrigé d'examen de mécanique Licence Sciences Physiques.

A- Chute d'une échelle.

2- Coordonnées du point G : $x_G = (l\sin\theta)/2$; $y_G = (l\cos\theta)/2$. Comme $x_G^2 + y_G^2 = (l/2)^2$, le point G décrit un cercle de centre O et de rayon $l/2$.

3,4,5 - $T = ml^2\dot{\theta}^2/8$, $U = (1/2)mgl\cos\theta$, $\mathcal{L} = ml^2\dot{\theta}^2/8 - (1/2)mgl\cos\theta$. L'équation d'Euler-Lagrange est donc $\ddot{\theta} - (2g/l)\sin\theta = 0$. Tant que $\theta \ll 1$, on peut linéariser et écrire : $\ddot{\theta} - (2g/l)\theta = 0$, et donc $\theta = A\exp(\omega t) + B\exp(-\omega t)$ où $\omega^2 = 2g/l$. En utilisant les C.I., on trouve que $A = B = \varepsilon/2$ et $\theta = \varepsilon\cosh(\omega t)$. cosh est une fonction croissante de son argument, donc θ devient de plus en grand avec le temps. Notre approximation cesse d'être valable donc quand $t \approx (1/\omega)\cosh^{-1}(1/\varepsilon) \approx -(1/\omega)\ln\varepsilon$.

6- Quand la barre est un solide, $T = (m/2)v_G^2 + (I_0/2)\dot{\theta}^2 = (1/8 + 1/24)ml^2\dot{\theta}^2 = (ml^2/6)\dot{\theta}^2$. Donc, $\ddot{\theta} - (3g/2l)\sin\theta = 0$. Comme $3/2 < 2$, la barre solide est *moins* accélérée. Cela est normal : plus un objet est lourd, moins il est accéléré (à force constante). Le point où toute la masse est concentré a un moment d'inertie 0, il est donc "moins lourd" que la barre solide pour les rotations.

B- Mouvement dans un canal.

Les équations du mouvement, en projetant sur les axes, sont : $md^2x/dt^2 = 0$; $md^2y/dt^2 = k(a^2 - x^2)$. On peut facilement résoudre le premier : $x = At + B$. En réinjectant dans l'autre équation, $md^2y/dt^2 = k(a^2 - A^2t^2 - 2ABt - B^2)$. On peut donc facilement l'intégrer. En utilisant les C.I., on trouve : $x = v_0t - a$ et $y = (k/12m)v_0t^3(4a - v_0t)$. Quand la particule traverse la rivière, on aura $y = (4k/3m)a^4/v_0^2$. La trajectoire est $y = (k/12m)(x+a)^3(3a - x)/v_0^2$. C'est un polynôme de quatrième degrés, croissant de façon monotone de $-a$ à $+a$.

La force *ne dérive pas* d'un potentiel. Si c'était le cas, on aurait $F_y = k(a^2 - x^2) = -\partial U/\partial y$ et donc $U = -k(a^2 - x^2)y$. Or, on doit également avoir $F_x = -\partial U/\partial x$, ce qui en utilisant l'expression de U trouvé, nous donnerai $F_x = -2xy$. Or $F_x = 0$ donc F ne peut pas dériver d'un potentiel. La condition pour qu'une force dérive d'un potentiel est $\partial F_x/\partial y = \partial F_y/\partial x$. On aurait pu donc directement vérifier que cette condition n'est pas réalisée. La quantité qui est conservée lors du mouvement est P_x, puisqu'il n'y a pas de force selon $\mathbf{i}$.

C- Équilibre d'une manivelle.

$x_A = r\cos\theta$, $y_G = (1/2)r\sin\theta$, $x_B = 2r\cos\theta$. Quand la force horizontale est appliquée au point A, on a $\delta W = F_{ext}dx_A + F_g dy_G = r(-F\sin\theta - (1/2)mg\cos\theta)d\theta$. A l'équilibre, on a $F = -mg/2\tan\theta$. Le même calcul pour le point B donnerai $F = -mg/4\tan\theta$. Il est donc plus efficace d'appuyer en B qu'en A. C'est la même chose que l'effet de levier, sauf que la géométrie plus compliquée rend cela moins intuitif.

D- Simultanéité en relativité.

En utilisant les transformations de Lorentz, on trouve que $t'_A = 0$ et $t'_B = \gamma(T - vL/c^2)$. Pour que $t'_B = t'_A$, il faut donc que $v = (T/L)c^2$. Si $L/T < c$, on aurait $v > c$, c'est à dire que le référentiel $\mathcal{R}'$ devrait se placer à une vitesse supérieur à c pour mesurer la simultanéité de ces deux événements. Qu'est ce que cela veut dire ? Si $L/T < c$, l'événement B *aurait pu* être provoqué par l'événement A (par exemple par l'envoi d'un message à la vitesse $u = L/T$). B est dans la zone d'influence de A, est on ne peut pas inverser la causalité (tant que toute les vitesses restent $< c$). Par contre, si $L/T > c$, il est impossible que B ait été provoqué par A. Leur ordre temporel peut donc être inversé.