Examens de Mécanique

Septembre 2003

I. Un jouet d'enfant.

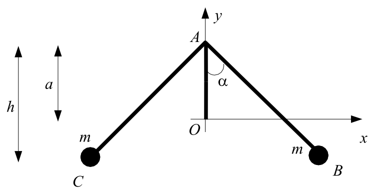

Figure 1

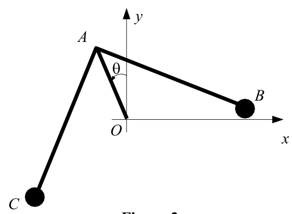

Figure 2

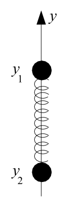

Figure 3

Résultats préliminaires. Soit un point P de coordonnées (x_P, y_P). Si on tourne ce point autour de l'origine d'un angle θ, ses nouvelles coordonnées sont données par

$$\begin{aligned} x'_P &= x_P \cos\theta - y_P \sin\theta \\ y'_P &= x_P \sin\theta + y_P \cos\theta \end{aligned}$$

Description du jouet. Un jouet d'enfant que l'on trouve dans le commerce est constitué de trois barres rigides (voir figure 1) AB, AC et AO associées de façon rigide (les angles entre les barres sont fixe). On attache deux poids de masse m aux points B et C. Le côté amusant est que si on suspend le jouet par le point O (en y mettant dessous un doigt par exemple), le jouet ne *tombe* pas ! Nous allons étudier pourquoi.

Dans la suite, nous supposons la masse des barres négligeables. Nous noterons a la distance OA, h la hauteur du triangle CAB, et α l'angle (positif) $\angle OAB$ (ou $\angle CAO$), comme indiqué sur la figure 1.

1. Démontrer, quand le jouet est en position vertical (comme dans la figure 1), que les coordonnées du point B sont données par $x_B = h\tan\alpha$; $y_B = -(h-a)$. Obtenez de la même façon les coordonnées du point C. Attention aux erreurs de signe : verfiez, par la méthode de votre choix, que les expressions que vous obtenez sont *raisonnable*s. Je serai impitoyable lors de la correction.

2. Nous tournons le jouet d'un angle θ autour de l'origine (figure 2). En utilisant les résultats préliminaires, obtenez les nouvelles coordonnées des points B et C en fonction de l'angle θ. Nous choisirons θ comme le (seul) degrès de liberté du système.

3. Déduire l'expression de l'énergie potentielle totale V en fonction de l'angle θ. Tracer $V(\theta)$ en fonction de θ pour $h > a$ et pour $h < a$. Dessiner le jouet dans ces deux cas. Dans quel cas la position $\theta = 0$ est un équilibre stable ?

4.

1. Calculer l'énergie cinétique totale du système.
2. En déduire le lagrangien et les équations du mouvements.
3. Linéariser et résoudre les équations du mouvement pour $\theta \ll 1$ avec la condition initiale $\theta = \theta_0$ et $\dot{\theta} = 0$ à $t = 0$. Bien montrer et discuter la différence entre le cas $h > a$ et le cas $h < a$.

5. On peut bien sûr résoudre ce problème en considérant le jouet comme un solide (un peu particulier, puisque toute la masse est concentrée en seulement deux points B et C). Calculer les coordonnées du centre de masse G du jouet (en fonction de θ). Calculer le moment d'inertie I par rapport au point G. Ecrire alors l'énergie potentielle et cinétique de ce solide et vérifier que vous trouvez les mêmes résultat qu'au (4).

II. TGV du futur.

En 2386, la vitesse de croisière du TGV express Marseille–Lille (sans arrêt) est de 10^6m/s. Un voyageur de ce train remarque en passant à Valence, que l'horloge de la gare est à 00 : 00 : 00.0 (heure/minute/seconde), comme sa propre montre atomique (de marque WATCHS). En passant à Paris, il distingue clairement l'horloge de la gare indiquant 00 : 00 : 00.6 et découvre avec horreur que sa montre supposé très précise n'indique pas le même temps. Un voyageur miséricordieux l'empêche de jeter sa montre par la fenêtre en lui expliquant que si il lit le chiffre x sur sa montre, sa montre est en faite très précise et obéit au loi de la relativité de M. Einstein. Quel était ce chiffre x ?

III. Particules connectées par un ressort.

Deux particules de masses m peuvent glisser sans frottement le long de l'axe vertical et sont soumises à la force de gravitation. Les deux particules sont en plus reliées par un ressort de raideur k et de longueur au repos ℓ.

1. Ecrire la force exercée sur la particule 1 en fonction de sa position y_1 et de la position y_2 de l'autre particule. Même chose pour la particule 2. En déduire les équations fondamentales de la dynamique pour les deux particules.

2. Comme ces équations sont à priori difficiles à résoudre, nous allons choisir deux variables additionnelles : $\xi = (y_1 + y_2)/2$ et $\eta = (y_1 - y_2)$. Que représentent ces variables ? Obtenez, en additionnant ou retranchant les deux équations de la première question, des équations différentielles pour ξ et η que vous résoudrez avec les conditions initiales suivantes : à $t = 0$, $y_1 = \ell + a$, $y_2 = 0$, $\dot{y}_1 = \dot{y}_2 = 0$.

3. Obtenez finalement la loi de l'évolution de y_1 et de y_2. Représenter les graphiquement.

4. Comment ces résultats sont modifiés si les deux particules sont en plus soumis à un frottement visqueux de coefficient λ ? Quelles termes faut-il ajouter aux équations de la question 1 et comment cela modifie les équations de la question 2 et leurs résolution ?