TD1 : éléments de Probabilité.

1. Quelques lois célèbres. Soient les lois suivantes

– binomial (discret) :

$$P(0) = 1 - p\,;\; P(1) = p$$

– Poisson (discret) :

$$P(n) = e^{-\lambda}\lambda^n/n! \quad (n = 0, 1, 2, ...)$$

– Normale (continue) :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

– Poisson(continue) :

$$p(t) = \mu e^{-\mu t} \quad (t \in [0, +\infty[$$

– Cauchy (continue) :

$$p(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\sigma}{(x-\mu)^2 + \sigma^2} \quad (x \in]-\infty, +\infty[$$

Dans chaque cas, tracer la fonction (soit la probabilité, soit sa densité, selon le cas), calculer la moyenne et la variance.

2. La notation $\langle\rangle$ Démontrer

1. $\langle X + Y\rangle = \langle X\rangle + \langle Y\rangle$ quelque soit les variables X et Y.
2. $\langle aX\rangle = a\,\langle X\rangle$ pour un nombre arbitraire $a \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
3. $\langle X.Y\rangle = \langle X\rangle\,\langle Y\rangle$ si et seulement si les deux variables X et Y sont indépendantes.
4. $Var(X) = \left\langle (X - \langle X\rangle)^2\right\rangle = \left\langle X^2\right\rangle - \langle X\rangle^2$
5. $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$ si et seulement si les deux variables X et Y sont indépendantes.

Pour ces démonstrations, supposer une probabilité continue.

3. Combinaison des probas. Soit un ensemble de lignes horizontales equidistant de a. Soit une barrette de taille a qu'on lance sur le plan. Démontrer que la probabilité que la barrette coupe une ligne est $2/\pi$.

4. Combinaison des proba. Soit un sac contenant une proportion p de boules blanches. Nous faisons l'expérience suivante : nous tirons une boule, notons sa couleur et le replaçon dans le sac; Nous réitérons cette expérience N fois. Quelle est la probabilité d'obtenir n boules blanches? Quelle est la limite quand $N \to \infty$,$p \to 0$ mais $Np \to \lambda > 0$?