TD1 : éléments de Probabilité ; corrigé partielle.

3. Combinaison des probas. Soit un ensemble de lignes horizontales equidistant de $2a$. Soit une barrette de taille $2a$ qu'on lance sur le plan. Démontrer que la probabilité que la barrette coupe une ligne est $2/\pi$.

L'état du batonet est décrit par deux variables : la position y de son centre et l'angle θ que fait le batonnet avec l'horizontal. Sans perte de généralité, nous pouvons restreindre y à $[0, 2a]$, le reste est une répétition périodique de cet évènement. Donc, nous considérons que deux lignes, avec le centre de la barette tombant obligatoirement entre les deux.

Supposons maintenant le centre de la barette tombé entre $[0, a]$. Il est évident qu'il ne peut pas couper la ligne du haut. La condition pour qu'elle coupe la ligne du bas est $\theta_c \leq \theta \leq \pi - \theta_c$ où θ_c est l'angle que ferai le batonnet avec l'horizontal si sa pointe touchait la ligne du bas. Nous voyons donc que

$$\sin \theta_c = \frac{y}{a}$$

Nous pouvons maintenant décomposer notre problème comme suit :

Pr que le batonnet coupe une ligne = $\Pr(y < Y < y + dy)\Pr(\theta_c \leq \Theta \leq \pi - \theta_c)$ et il faut bien sûr sommer cette expression sur toute les valeurs possibles de y. Les deux variable Y et Θ sont uniforme : il n'y a aucune position ni angle particulière. Donc,

$$\Pr(y < Y < y + dy) = (1/2a)dy$$

($1/2a$ est la densité de probabilité de la variable Y) . La même chose vaut pour θ :

$$\Pr(\theta < \Theta < \theta + d\theta) = (1/\pi)d\theta$$

Donc au final,

$$\begin{aligned}
\Pr(\text{couper}) &= \int_{y=0}^{a} \int_{\theta=\arcsin(y/a)}^{\pi-\arcsin(y/a)} (1/2a)\,(1/\pi)\, d\theta dy + \int_{y=a}^{y=2a} \int ... \\
&= 2(1/2a)(1/\pi) \int_0^a \left(\pi - 2\arcsin\frac{y}{a}\right) dy
\end{aligned}$$

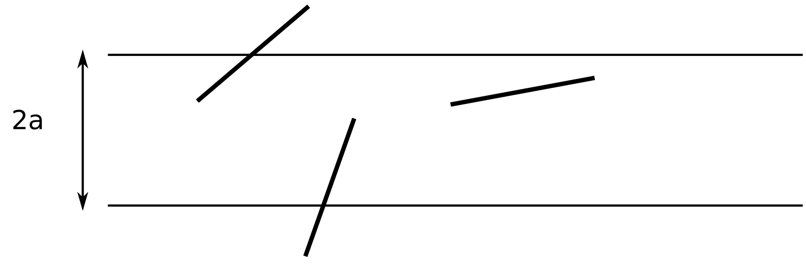

Fig. 1: Différente configuration de la barette.

Voilà, arrivé là, nous avons fini. Le travaille de dépouillement des probas est là. Le reste est un calcul d'intégral, qui en l'occurence on peut effectuer exactement ici, mais n'a pas plus d'intérêt que cela. Voyons cela de plus près : nous connaissons la primitive de la fonction $\arcsin(x)$ en faisant une dérivation par partie :

$$\begin{aligned}\int \arcsin(x)dx &= x\arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= x\arcsin(x) - \sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

et donc,

$$\Pr(\text{couper}) = \frac{2}{\pi}$$

4. Combinaison des proba. Soit un sac contenant une proportion p de boules blanches. Nous faisons l'expérience suivante : nous tirons une boule, notons sa couleur et le replaçon dans le sac ; Nous réitérons cette expérience N fois. Quelle est la probabilité d'obtenir n boules blanches ? Quelle est la limite quand $N \to \infty$,$p \to 0$ mais $Np \to \lambda > 0$?

Nous avons vu que cette proba est

$$P(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!}p^n(1-p)^{N-n}$$

Nous savons que N est grand, n fini, donc nous avons, d'après la formule de Sterling

$$\frac{N!}{(N-n)!} = \frac{\sqrt{2\pi N}}{\sqrt{2\pi(N-n)}}\frac{(N/e)^N}{((N-n)/e)^{N-n}}$$

Pour $N \to \infty$,

$$\frac{\sqrt{2\pi N}}{\sqrt{2\pi(N-n)}} \to 1$$

et nous n'avons plus à nous occuper de ce terme. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\frac{(N/e)^N}{((N-n)/e)^{N-n}} &= \frac{(N/e)^n(N/e)^{N-n}}{((N-n)/e)^{N-n}} \\ &= \left(\frac{N}{e}\right)^n\left(\frac{N}{N-n}\right)^{N-n}\end{aligned}$$

Et nous avons donc

$$P(n) = \frac{1}{n!}\left(\frac{pN}{e}\right)^n\left(\frac{N-pN}{N-n}\right)^{N-n}$$

Nous utilisons maintenant le fait que $pN = \lambda$ et que l'autre terme, si on l'arrange un peu, prend la forme de $(1+x/M)^M$ qui tend vers $\exp(x)$. Voyons ce deuxième terme :

$$\begin{aligned}\left(\frac{N-pN}{N-n}\right)^{N-n} &= \left(\frac{N-n+n-\lambda}{N-n}\right)^{N-n} \\ &= \left(1+\frac{n-\lambda}{N-n}\right)^{N-n} \to e^{n-\lambda}\end{aligned}$$

au final nous obtenons donc

$$P(n) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$$