

Examen de Physique-Statistique

M1 CN&PN, 5 Avril 2012

1 Bruit de Johnson-Nyquist.

Soit un circuit électrique ouvert de résistance R , dont nous mesurons la tension V sur une période de temps τ . Le circuit est maintenu à température T . L'énergie E stockée dans le circuit correspond à une tension V est

$$E = \frac{\tau}{R} V^2$$

1. Probabilité. Quelle est la densité de probabilité $p(V)$ d'observer la tension V au bord du circuit ?

$$p(V) = \frac{1}{Z} e^{-\frac{\tau V^2}{RT}}$$

2. Normalisation. En écrivant cette probabilité comme $P(V) = (1/Z)f(V)$, calculer la constante de normalisation $Z = Z(T, R, \tau)$.

Nous avons

$$\begin{aligned} Z &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\tau V^2}{RT}} dV & (1) \\ &= \sqrt{\frac{RT}{\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du \\ &= C \sqrt{\frac{RT}{\tau}} \end{aligned}$$

où C est la valeur de l'intégrale. Nous savons que sa valeur exacte est $\sqrt{\pi}$, mais nous n'en avons pas vraiment besoin.

3. Moyenne et fluctuations. Donner l'expression théorique de $\langle V \rangle$ et $\langle V^2 \rangle$. Pourquoi nous pouvons dire que $\langle V \rangle = 0$?

$$\begin{aligned} \langle V \rangle &= \frac{1}{Z} \int_{-\infty}^{\infty} V e^{-\frac{\tau V^2}{RT}} dV \\ \langle V^2 \rangle &= \frac{1}{Z} \int_{-\infty}^{\infty} V^2 e^{-\frac{\tau V^2}{RT}} dV & (2) \end{aligned}$$

Comme V est une fonction impaire et la gaussienne une fonction paire, l'intégrale est nulle.

4. Calcul des fluctuations. Démontrer que vous pouvez écrire

$$\langle V^2 \rangle = -\frac{R}{\tau} \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \quad (3)$$

où $\beta = 1/T$. Utiliser cette relation pour donner la valeur de $\langle V^2 \rangle$.

En dérivant (1) nous trouvons

$$\frac{\partial Z}{\partial \beta} = -\frac{\tau}{R} \int_{-\infty}^{\infty} V^2 e^{-\frac{\tau V^2}{RT}} dV$$

En comparant à l'expression (2), nous avons

$$\frac{\partial Z}{\partial \beta} = -\frac{\tau}{R} Z \langle V^2 \rangle$$

ce qui est bien l'expression (3) demandée. Comme

$$Z(\beta) = K \beta^{-1/2}$$

nous avons

$$\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = -\frac{1}{2} \beta^{-1}$$

Ce qui nous donne finalement

$$\langle V^2 \rangle = \frac{RT}{2\tau}$$

5. Commentaires. Que vaut l'amplitude de la fluctuation pour des temps de mesure de 10^{-6} s à température ambiante

2 Equilibre solide-gaz.

1. Energies libres. Rappeler l'expression de l'énergie libre d'un gaz parfait classique et d'un solide classique.

Pour un gaz, nous avons

$$F_g = -N_g T \log \left(\frac{eV}{N_g \Lambda^3} \right)$$

et pour un solide

$$F_s = -3N_s T \log \left(\frac{2\pi T}{\hbar \omega_0} \right)$$

2. Potentiels chimiques. En déduire l'expression du potentiel chimique dans les deux cas.

$$\begin{aligned} \mu_g &= T \log \left(\frac{V}{N_g \Lambda^3} \right) \\ \mu_s &= 3T \log \left(\frac{2\pi T}{\hbar \omega_0} \right) \end{aligned}$$

3. Equilibre. Nous plaçons un solide contenant N atomes dans un contenant de volume V . Des atomes du solide se détachent pour rejoindre le gaz. En écrivant l'égalité des potentiels chimiques, déduire le nombre de molécule dans la phase gazeuse.

L'équilibre est atteint pour $\mu_g = \mu_s$ et donc pour

$$\frac{V}{N_g \Lambda^3} = \left(\frac{2\pi T}{\hbar \omega_0} \right)^3$$

en mettant toutes les constantes dans une autre qu'on appelle K , nous trouvons (n'oublions pas que Λ contient du $T^{-1/2}$)

$$N_g = KVT^{-3/2}$$

résultat qui doit nous paraître étonnant, puisque le nombre de molécule dans le gaz diminue avec la température.

4. Pression. En déduire la pression du gaz de ces atomes. Comment varie la pression en fonction de la température? Cela vous paraît-il normal?

Pour les gaz parfaits,

$$P = N_g T / V = K' T^{-1/2}$$

même étrangeté, la pression du gaz diminue avec la température. Quelque chose doit être radicalement faux dans nos calculs.

Suggestion : refaire le calcul avec le solide d'Einstein.

3 Chaleur spécifique et fluctuations.

Pour un système à l'équilibre avec un bain thermique, l'énergie fluctue constamment. Nous savons cependant calculer l'énergie moyenne

$$U = \langle E \rangle = \frac{1}{Z} \sum_i E_i e^{-E_i/T} \quad (4)$$

à partir du postulat fondamental. Nous avons également défini la chaleur spécifique comme

$$C_v = \frac{dU}{dT}$$

Une quantité particulièrement importante est la fluctuation d'énergie

$$\text{Var}(E) = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2$$

1. Fluctuation-dissipation. En utilisant l'expression (4), démontrer que

$$\text{Var}(E) = T^2 C_v$$

Nous avons

$$\frac{dU}{dT} = -\frac{1}{Z^2} \sum_i E_i e^{-E_i/T} \frac{dZ}{dT} + \frac{1}{T^2} \frac{1}{Z} \sum_i E_i^2 e^{-E_i/T}$$

Le deuxième terme n'est autre que $\langle E^2 \rangle / T^2$. Occupons-nous donc du premier terme que l'on peut réécrire

$$-\langle E \rangle \frac{1}{Z} \frac{dZ}{dT}$$

Comme

$$Z = \sum_i e^{-E_i/T}$$

nous avons

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dT} &= \frac{1}{T^2} \sum_i E_i e^{-E_i/T} \\ &= \frac{1}{T^2} Z \langle E \rangle \end{aligned}$$

Nous trouvons donc finalement que

$$\begin{aligned} C_v &= \frac{dU}{dT} = \frac{1}{T^2} (\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2) \\ &= \text{Var}(E) / T^2 \end{aligned}$$

2. Gaz parfait. Calculer l'amplitude relative des fluctuations

$$\delta = \frac{\sqrt{\text{Var}(E)}}{\langle E \rangle}$$

pour un gaz parfait de N molécules à température T . Commentez le résultat obtenu.

Nous avons

$$\delta = \frac{T \sqrt{C_v}}{\langle E \rangle}$$

Pour un gaz parfait, $U = (3/2)NT$ et $C_v = (3/2)N$, donc,

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt{N}}$$

Nous trouvons bien une variation en $1/\sqrt{N}$.

4 Entropie de mélange.

Un volume V est occupé par N molécules d'un gaz parfait A et un autre volume V par N molécules d'un gaz parfait B . L'ensemble est maintenu à température T . Nous enlevons la séparation entre les deux volumes et laissons les deux gaz se mélanger. Quelle est l'énergie libre totale du système F avant le mélange? Quelle est l'énergie libre totale du système F' après? Comment varient l'énergie libre, l'entropie et l'énergie interne totale du système? Quel flux de chaleur reçoit le système si nous mélangeons ainsi une mole de chaque gaz (donner la valeur numérique, sans chiffres après la virgule)?

Avant le mélange,

$$\begin{aligned} F &= F_A + F_B = -NT \log \left(\frac{eV}{N\Lambda_A^3} \right) - NT \log \left(\frac{eV}{N\Lambda_B^3} \right) \\ &= -NT \log \left(\frac{e^2 V^2}{N^2 \Lambda_A^3 \Lambda_B^3} \right) \end{aligned}$$

Après, nous avons

$$\begin{aligned} F' &= F'_A + F'_B = -NT \log \left(\frac{2eV}{N\Lambda_A^3} \right) - NT \log \left(\frac{2eV}{N\Lambda_B^3} \right) \\ &= -NT \log \left(\frac{4e^2 V^2}{N^2 \Lambda_A^3 \Lambda_B^3} \right) \end{aligned}$$

Donc,

$$\Delta F = F' - F = -NT \log 4$$

et de là, en utilisant nos relations thermodynamiques, nous obtenons

$$\Delta S = N \log 4$$

$$\Delta U = 0$$

$$Q = T\Delta S = -\Delta F$$