Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications.

Par

M. M. G. Ricci et T. Levi-Civita à Padoue.

Table des matières.

Chapitre I.

Algorithme du calcul différentiel absolu.

Chapitre II.

La géométrie intrinsèque comme instrument de calcul.

Chapitre III.

Applications analytiques.

Chapitre IV.

Applications géométriques.

Chapitre V.

Applications mécaniques.

Chapitre VI.

Applications physiques.

Préface.

M. Poincaré*) a écrit que dans les Sciences mathématiques *une bonne notation a la même importance philosophique qu'une bonne classification dans les Sciences naturelles.* Évidemment, et même avec plus de raison, on peut en dire autant des méthodes, car c'est bien de leur choix que dépend la possibilité de *forcer* (pour nous servir encore des paroles de l'illustre géomètre français) *une multitude de faits sans aucun lien apparent à se grouper suivant leurs affinités naturelles.*

On peut aussi dire qu'un théorème démontré par des voies détournées et en ayant recours à des artifices et à des considérations, qui n'ont avec lui aucun lien essentiel, n'est bien souvent qu'une vérité découverte à moitié; car il arrive presque toujours que le même théorème se présente d'une manière plus complète et générale, si l'on y parvient par un chemin plus droit et avec des moyens plus appropriés.

Citons comme exemple la démonstration donnée par Jacobi et étendue par Beltrami de l'invariabilité de l'expression $\Delta_2 U$. Elle est certainement élégante et fait témoignage de la penétration d'esprit de son auteur; mais on est bien surpris que, pour démontrer un théorème, qui appartient par sa nature à la théorie algébrique de l'élimination, on ait à s'occuper de la variation d'une intégrale. C'est à cette remarque et à la possibilité devinée *a priori* de reconduire la théorie des paramètres différentiels du deuxième ordre à celle des invariants des formes algébriques qu'on doit les recherches, qui ont amené à la découverte des méthodes, que nous appelons de *Calcul différentiel absolu*;**) et dont le premier résultat fut la découverte de toute une chaîne d'invariants différentiels contenant une ou plusieurs fonctions arbitraires, et dont le $\Delta_2 U$ est le premier et le plus important anneau.

L'algorithme du Calcul différentiel absolu, c'est à dire l'instrument matériel des méthodes, sur lesquelles nous allons entretenir les lecteurs des *Mathematische Annalen*, se trouve tout entier dans une remarque due a M. Christoffel***). — Mais les méthodes mêmes et les avantages, qu'ils présentent, ont leur raison d'être et leur source dans les rapports intimes, qui les lient à la notion de variété à n dimensions, que nous devons aux génies de Gauss et de Riemann. —

D'après cette notion une variété V_n est définie intrinséquement dans

---

*) Préface aux *Oeuvres de Laguerre* publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences.

**) Cfr. *Ricci* «Sui parametri e gli invarianti delle forme quadratiche differenziali», Annali di matematica pura ed applicata, Serie II^a, Tomo XIV, 1886.

***) «Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades», Crelle's Journal, Band LXX, 1869.

ses propriétés métriques par n variables indépendantes et par toute une classe de formes quadratiques des différentielles de ces variables, dont deux quelconques sont transformables l'une en l'autre par une transformation ponctuelle. — Par conséquence une V_n reste invariée vis-à-vis de toute transformation de ses coordonnées. Le Calcul différentiel absolu, en agissant sur des formes covariantes ou contrevariantes au ds^2 de V_n pour en dériver d'autres de même nature, est lui aussi dans ses formules et dans ses résultats indépendant du choix des variables indépendantes. — Étant de la sorte essentiellement attaché à V_n, il est l'instrument naturel de toutes les recherches, qui ont pour objet une telle variété, ou dans lesquelles on rencontre comme élément caractéristique une forme quadratique positive des différentielles de n variables ou de leurs dérivées.

L'exposition sommaire, que nous allons donner ici de ces méthodes et de leurs applications, a pour but de convaincre les lecteurs des avantages, qu'ils présentent et qui nous semblent grands et évidents; et de diminuer, autant que cela se peut, à ceux, qui auraient envie de les appliquer à leur tour, les efforts, qu'exige la pratique de tout instrument nouveau. — Nous pensons que, après avoir surmonté les difficultés de l'initiation, on se convaincra aisément que la généralité, qu'ils consentent, en éloignant de toute question les éléments hétérogènes, qu'on introduit en s'attachant à un système déterminé de variables, contribue non seulement à l'élégance, mais aussi à l'agilité et à la perspicuité des demonstrations et des conclusions.

Chapitre I.

Algorithme du calcul différentiel absolu.*)

§ 1.

Transformations ponctuelles et systèmes de fonctions.

Désignons par T une transformation de variables tout à fait générale

(1) $$x_i = x_i(y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

biunivoque et régulière dans le domaine, que nous aurons à considérer; par Ω un système de plusieurs fonctions $(f_1, f_2, \cdots, f_p)$ des variables x; fonctions, que nous appellerons *éléments* du système Ω. Désignons aussi par S une substitution, qui porte sur le système Ω en substituant à ses éléments $f_1, f_2, \cdots, f_p$ respectivement des fonctions $g_1, g_2, \cdots, g_p$ des variables y.

*) *Ricci* „Delle derivazioni covarianti e controvarianti" Studi éditi dall' Università di Padova ecc, Padova, 1888. „Lezioni sulla teoria delle superficie", Padova, presso i fratelli Drucker, 1898.

Concevons S comme fonction de T; c'est-à-dire supposons que, pour chaque transformation (1), qui porte sur les variables indépendantes, on ait une substitution bien déterminée S; et que S considérée comme fonction de T soit assujettie aux conditions suivantes:

1°: Si l'on prend pour T la substitution identique, S coincide aussi avec cette substitution.

2°: Si l'on désigne par T, T_1, T_2 trois transformations (1), par S, S_1, S_2 les S correspondantes, et si l'on a $T \equiv T_2 \cdot T_1$, on a aussi $S \equiv S_2 \cdot S_1$.

Il y a bien de manières différentes de déterminer S comme fonction de T. — On peut, par exemple (et c'est ce que l'on fait généralment), prendre comme éléments du système transformé ceux, que l'on tire des éléments du système primitif en y substituant aux variables x leurs expressions par les y. — Nous dirons dans ce cas que le système considéré *se transforme par invariance;* ou qu'il est *invariant*.

Mais bien souvent la nature d'un système donné peut nous faire préférer une autre loi de transformation. Par exemple, si $f_1, f_2, \cdots, f_n$ sont les dérivées d'une fonction f par rapport respectivement à $x_1, x_2, \cdots, x_n$, on trouvera naturel de prendre comme éléments du système transformé les dérivées $(f_1), (f_2), \cdots, (f_n)$ de la fonction (f), qui est la transformée de f par la transformation T; au lieu des expressions, que l'on obtient de $f_1, f_2, \cdots, f_p$ en les transformant par T.

La substitution S sera dans ce cas definie par les formules

$$(2) \qquad (f_r) = \sum_1^n {}_s f_s \frac{\partial x_s}{\partial y_r}, \qquad (r = 1, 2, \cdots, n)$$

dans lesquelles les fonctions $f_1, f_2, \cdots, f_n$ doivent être exprimées par les variables y.

Si le système donné résulte d'une fonction f et de toutes ses dérivées jusqu'à un ordre donné, on peut exiger qu'il soit composé de la même manière après la transformation (1). — Dans ce cas les formules analytiques, qui représentent la loi de transformation du système sont assez compliquées. — La fonction f se transforme par invariance, ses dérivées premières d'après les formules (2), les dérivées du deuxième ordre d'après les formules

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y_r \partial y_s} = \sum_1^n {}_{pq} \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_q} \frac{\partial x_p}{\partial y_r} \frac{\partial x_p}{\partial y_s} + \sum_1^n {}_p \frac{\partial f}{\partial x_p} \frac{\partial^2 x_p}{\partial y_r \partial y_s};$$

etc.

On a aussi des exemples remarquables en considérant lès coefficients d'une expression linéaire et homogène dans les dérivées du premier ordre d'une fonction, telle que

$$(4) \qquad \sum_1^n {}_r A^{(r)} \frac{\partial f}{\partial x_r};$$

et ceux d'une expression quadratique et homogène dans les différentielles des variables indépendantes, telle que

$$(5) \qquad \sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s.$$

Lorsqu'on exécute une transformation (1) sur les variables indépendantes, on passe en même temps des expressions (4) et (5) à leurs transformées

$$\sum_1^n {}_r B^{(r)} \frac{\partial f}{\partial y_r},$$

$$\sum_1^n {}_{rs}\, b_{rs}\, dy_r\, dy_s;$$

les nouveaux coefficients $B^{(r)}$ et b_{rs} étant donnés respectivement par les formules

$$(4') \qquad B^{(r)} = \sum_1^n {}_s A^{(s)} \frac{\partial y_r}{\partial x_s},$$

$$(5') \qquad b_{rs} = \sum_1^n {}_{pq}\, a_{pq} \frac{\partial x_p}{\partial y_r} \frac{\partial x_q}{\partial y_s}.$$

Il est donc bien naturel d'exécuter sur les systèmes des coefficients des expressions (4) et (5) les substitutions (4′) et (5′), chaque fois que l'on exécute une transformation (1) sur les variables indépendantes.

Nous concluons qu'il est souvent indiqué de substituer à la loi d'invariance d'autres lois de transformation ayant leur raison d'être dans la nature même des systèmes, que l'on a à étudier.

§ 2.

Systèmes covariants et contrevariants. Exemples divers.

Parmi les lois de transformation, que l'on peut concevoir, il y en a deux, qui jouent un rôle prépondérant dans l'Analyse mathématique; ce sont les lois, que nous appelons de *covariance* et de *contrevariance* s'appliquant aux systèmes *multiples*, dont nous allons nous occuper. — Nous disons qu'un système de fonctions de n variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$ est m^{uple} ou d'ordre m, si l'on a un élément déterminé du système pour chaque disposition avec répétition m à m des indices $1, 2, \cdots, n$. Une seule fonction sera pour nous, comme cas limite, un système d'ordre 0. — Pour $m = 1, 2, 3, \cdots$ on aura en particulier les systèmes *simples* ou *du premier ordre, doubles* ou *du deuxième ordre* etc. — Les dérivées du premier ordre d'une fonction et les coefficients d'une expression linéaire et homogène par rapport à ces dérivées nous donnent des exemples de systèmes de premier ordre. — On aura des systèmes doubles en considérant les dérivées du deuxième ordre d'une fonction, ou les coefficients d'une quadrique dans les différentielles des variables indépendantes; et, en général, un système d'ordre m sera constitué, par exemple, par les dérivées du même ordre d'une fonction arbitraire.

Nous dirons qu'un système d'ordre m est *covariant* (et dans ce cas nous désignerons ses éléments par des symboles tels que $X_{r_1 r_2 \cdots r_m}$, ($r_1, r_2, \cdots, r_m$ pouvant prendre chacun toutes les valeurs $1, 2, \cdots, n$), si les éléments $Y_{r_1 r_2 \cdots r_m}$ du système transformé sont donnés par les formules

$$(6) \qquad Y_{r_1 r_2 \cdots r_m} = \sum_1^n {}_{s_1 s_2 \cdots s_m} X_{s_1 s_2 \cdots s_m} \frac{\partial x_{s_1}}{\partial y_{r_1}} \frac{\partial x_{s_2}}{\partial y_{r_2}} \cdots \frac{\partial x_{s_m}}{\partial y_{r_m}}.$$

Nous désignerons au contraire par des symboles tels que $X^{(r_1 r_2 \cdots r_m)}$ les éléments d'un système *contrevariant*, c'est à dire d'un système, dont la transformation est représentée par les formules

$$(7) \qquad Y^{(r_1 r_2 \cdots r_m)} = \sum_1^n {}_{s_1 s_2 \cdots s_m} X^{(s_1 s_2 \cdots s_m)} \frac{\partial y_{r_1}}{\partial x_{s_1}} \frac{\partial y_{r_2}}{\partial x_{s_2}} \cdots \frac{\partial y_{r_m}}{\partial x_{s_m}},$$

les éléments X et Y se rapportant respectivement aux variables x et y. — Et c'est bien entendu que dans les formules (6) et (7) on conçoit tout exprimé en fonction des variables y. —

En désignant par X une fonction quelconque des variables x, par Y la même fonction exprimée par les y, la formule

$$Y = X$$

peut être regardée autant comme un cas particulier des (6) que comme un cas particulier de (7). — C'est à cause de cela qu'un système d'ordre 0, bien qu'étant invariant, peut être considéré aussi comme cas limite des systèmes covariants ou des systèmes contrevariants.

Dans la suite en introduisant un symbole tel que $X_{r_1 r_2 \cdots r_m}$ (ou $X^{(r_1 r_2 \cdots r_m)}$) nous entendrons qu'il se rapporte toujours à un élément quelconque d'un système covariant (ou contrevariant) d'ordre m, que nous appellerons système $X_{r_1 r_2 \cdots r_m}$ (ou système $X^{(r_1 r_2 \cdots r_m)}$).

Les dérivées du premier ordre d'une fonction et les coefficients d'une forme quadratique φ de différentielles, d'après les formules (2) et (5'), nous donnent des exemples de systèmes covariants respectivement du premier et du deuxième ordre. — On a au contraire des exemples de systèmes contrevariants en considérant les coefficients d'une expression linéaire dans les dérivées du premier ordre d'une fonction et les coefficients de la forme réciproque de φ. De même les formules

$$dy_r = \sum_1^n {}_s \, dx_s \frac{\partial y_r}{\partial x_s}$$

nous disent que les différentielles des variables indépendantes sont les éléments d'un système simple contrevariant.

Les systèmes, qui sont constitués par les dérivées d'un ordre $m > 1$ d'une fonction des variables indépendantes (comme il résulte par exemple des formules (3) pour $m = 2$) ne sont ni covariants ni contrevariants. — Les lois de transformation de ces systèmes sont bien complexes, et c'est là la source des difficultés, qu'on rencontre dans le Calcul Différentiel ordinaire pour transformer les expressions aux dérivées partielles d'ordre supérieur au premier.

Nous verrons que l'on peut éviter ces difficultés en substituant à la dérivation ordinaire une opération, qui peut la remplacer.

Il est utile de remarquer que les systèmes covariants ou contrevariants de la théorie des formes algébriques sont des cas particuliers de ceux, que nous venons de définir. En effet les transformations (1), que l'on considère dans la théorie des formes algébriques, sont linéaires et homogènes; et lorsqu' une transformation de cette nature agit sur les variables indépendantes, les coefficients des formes ponctuelles se transforment d'après les formules (6) et ceux des formes réciproques d'après les (7).

§ 3.

Addition, multiplication et composition de systèmes. — Quadrique fondamentale-Systèmes réciproques.

Addition. — Si $X_{r_1 r_2 \cdots r_m}$, $\Xi_{r_1 r_2 \cdots r_m}$ sont deux systèmes covariants d'un même ordre m,

$$Y_{r_1 r_2 \cdots r_m} = X_{r_1 r_2 \cdots r_m} + \Xi_{r_1 r_2 \cdots r_m}$$

est aussi un système covariant d'ordre m. Nous dirons qu'il est la *somme* des deux systèmes considérés. — D'une manière analogue on définit la somme de deux systèmes contrevariants d'ordre m, qui sera aussi un système contrevariant de cet ordre.

Multiplication. — Si $X_{r_1 r_2 \cdots r_m}$, $\Xi_{s_1 s_2 \cdots s_p}$ sont deux systèmes covariants respectivement des ordres m et p,

$$Y_{r_1 r_2 \cdots r_m s_1 s_2 \cdots s_p} = X_{r_1 r_2 \cdots r_m} \cdot \Xi_{s_1 s_2 \cdots s_p}$$

est un système covariant d'ordre $m + p$, que l'on appellera *produit* des deux systèmes. — Il suffit de substituer le mot *covariant* par le mot *contrevariant* pour avoir la définition du produit de deux systèmes contrevariants d'ordre quelconque.

Les définitions, que nous venons de donner, s'étendent naturellement à la somme et au produit de plusieurs systèmes ayant la même nature, covariante ou contrevariante.

Composition. — Si $X_{r_1 r_2 \cdots r_m s_1 s_2 \cdots s_p}$ est un système covariant quelconque d'ordre $m + p$, et $\Xi^{(s_1 s_2 \cdots s_p)}$ un système contrevariant d'ordre p, le système d'ordre m

$$Y_{r_1 r_2 \cdots r_m} = \sum_1^n{}_{s_1 s_2 \cdots s_p} \Xi^{(s_1 s_2 \cdots s_p)} X_{r_1 r_2 \cdots r_m s_1 s_2 \cdots s_p}$$

est covariant et d'ordre m. D'une manière analogue, étant donnés deux systèmes $X^{(r_1 r_2 \cdots r_m s_1 s_2 \cdots s_p)}$, $\Xi_{s_1 s_2 \cdots s_p}$, on en tire un système contrevariant d'ordre m en posant

$$Y^{(r_1 r_2 \cdots r_m)} = \sum{}_{s_1 s_2 \cdots s_p} X^{(r_1 r_2 \cdots r_m s_1 s_2 \cdots s_p)} \Xi_{s_1 s_2 \cdots s_p} .$$

Nous dirons que le système $Y_{r_1 r_2 \cdots r_m}$ $\left(\text{ou } Y^{(r_1 r_2 \cdots r_m)}\right)$ est *composé* des deux systèmes considérés.

En particulier, pour $m = 0$, on a un système d'ordre o c'est-à-dire un invariant, qui résulte de la composition de deux systèmes de nature opposée et de même ordre.

Le lecteur pourra aisément se représenter ces propositions, dont l'usage est fréquent dans le calcul, comme dérivées d'un seul principe, celui de la *saturation des indices.*

Quadrique ou forme fondamentale.

Les méthodes de Calcul Différentiel absolu reposent essentiellement sur la considération d'une forme quadratique positive dans les différentielles de n variables indépendantes $x_1, x_2, \cdots, x_n$; c'est à dire d'une expression du type

$$\varphi = \sum_1^n{}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s .$$

Les coefficients de cette expression, que nous appellerons *quadrique ou forme fondamentale,* se recontrent partout dans nos formules, et y portent une simplicité et une symétrie très remarquables.

Systèmes réciproques.

Si l'on désigne par $a^{(rs)}$ les coefficients de la forme réciproque de φ, on a les identités

$$a^{(rs)} = \sum_1^n {}_{pq}\, a^{(rp)}\, a^{(sq)}\, a_{pq}.$$

En général, étant donné un système covariant d'ordre m, $X_{r_1 r_2 \cdots r_m}$, on en tire, à l'aide de la forme fondamentale, un système contrevariant du même ordre en posant

$$X^{(r_1 r_2 \cdots r_m)} = \sum_1^n {}_{s_1 s_2 \cdots s_m}\, a^{(r_1 s_1)}\, a^{(r_2 s_2)} \cdots a^{(r_m s_m)}\, X_{s_1 s_2 \cdots s_m}. \tag{8}$$

De même, si l'on part d'un système contrevariant $\Xi^{(r_1 r_2 \cdots r_m)}$, on en tire un système covariant en posant

$$\Xi_{r_1 r_2 \cdots r_m} = \sum_1^n {}_{s_1 s_2 \cdots s_m}\, a_{r_1 s_1}\, a_{r_2 s_2} \cdots a_{r_m s_m}\, \Xi^{(s_1 s_2 \cdots s_m)}. \tag{9}$$

La succession des opérations (8) et (9) est bien l'identité, et c'est à cause de cela que nous appelons *réciproques* par rapport à la forme fondamentale deux systèmes tels que $X^{(r_1 r_2 \cdots r_m)}$ et $X_{r_1 r_2 \cdots r_m}$, ou $\Xi_{r_1 r_2 \cdots r_m}$ et $\Xi^{(r_1 r_2 \cdots r_m)}$.

Des formules (8) et (9) on tire aisément l'identité

$$\sum_1^n {}_{r_1 r_2 \cdots r_m}\, X^{(r_1 r_2 \cdots r_m)}\, \Xi_{r_1 r_2 \cdots r_m} = \sum_1^n {}_{r_1 r_2 \cdots r_m}\, X_{r_1 r_2 \cdots r_m}\, \Xi^{(r_1 r_2 \cdots r_m)}, \tag{10}$$

qui nous dit que:

«Tout invariant composé d'un système covariant et d'un système contrevariant du même ordre est identique à l'invariant composé de leurs réciproques.»

La forme fondamentale étant fixée, il suffit de donner un système covariant ou contrevariant pour que leurs réciproques résultent déterminés avec eux. Ce fait trouve son expression matérielle dans la convention, que nous avons déjà appliquée dans les exemples donnés, et d'après laquelle la même lettre affectée de m indices représente un élément quelconque d'un système covariant d'ordre m ou de son réciproque, selon que ses indices sont placés en bas ou en haut de la lettre.

Nous désignerons d'orénavant par a le discriminant de la forme fondamentale. Quelle que soit cette forme, on peut en déduire deux systèmes d'ordre n réciproques par rapport à elle, dont les propriétés sont bien remarquables, et qu'il est souvent utile d'introduire dans les calculs. Fixons le signe à donner a $\sqrt{a}$ pour un système déterminé de variables indépendantes $x_1, x_2, \cdots, x_n$, et convenons en même temps que ce signe ne change pas lorsqu'une substitution (1) agit sur les variables indépendantes, si le déterminant jacobien des x par rapport aux y est positif; qu'il change, si ce déterminant est négatif. Le système d'ordre n, dont les éléments $\varepsilon_{r_1 r_2 \cdots r_n}$ sont nuls, si les indices $r_1, r_2, \cdots, r_n$ ne sont pas tous différents, et égaux à $\sqrt{a}$ ou à $-\sqrt{a}$, selon que, ces indices étant tous différents, la classe de la permutation $(r_1 r_2 \cdots r_n)$ est paire ou impaire par rapport à la permutation fondamentale $(1, 2, \cdots, n)$, est covariant. — Les éléments $\varepsilon^{(r_1 r_2 \cdots r_n)}$ du système réciproque sont respectivement égaux à zéro ou à $\pm 1 : \sqrt{a}$.

Si l'on désigne par $\Delta(z_1 z_2 \cdots z_n)$ le jacobien de n fonctions $z_1, z_2, \cdots, z_n$ pris par rapport à n variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$ et divisé par $\sqrt{a}$, on a l'identité

$$\Delta(z_1 z_2 \cdots z_n) \equiv \sum_1^n {}_{r_1 r_2 \cdots r_n} \varepsilon^{(r_1 r_2 \cdots r_n)} \frac{\partial z_1}{\partial x_{r_1}} \frac{\partial z_2}{\partial x_{r_2}} \cdots \frac{\partial z_n}{\partial x_{r_n}},$$

qui, en rendant intuitive la propriété invariantive de Δ, rend en même temps cet invariant accessible aux methodes du Calcul différentiel absolu.

Nous désignerons le système $\varepsilon_{r_1 r_2 \cdots r_n}$ (ou $\varepsilon^{(r_1 r_2 \cdots r_n)}$) par le nom de système covariant (ou contrevariant) E.

§ 4.

Applications á l'analyse vectorielle.*)

Nous allons donner dès à présent un exemple important d'application du Calcul différentiel absolu, en exposant les règles du calcul vectoriel en coordonnées générales.

Désignons par y_1, y_2, y_3 des coordonnées cartésiennes orthogonales quelconques dans notre espace, par (R) un vecteur dans ce même espace. — Introduisons le ds^2 de l'espace comme forme fondamentale φ et nous aurons en coordonnées y

$$\varphi = dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2;$$

et en coordonnées générales

$$\varphi = \sum_1^3 {}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s.$$

Représentons par $l_r (r = 1, 2, 3)$ les directions positives des lignes coordonnées, par $n_r (r = 1, 2, 3)$ celles des normales aux surfaces coordon-

*) Les résultats contenus dans ce paragraphe sont exposés ici pour la première fois d'une manière systématique et complète.

nées de paramètre x_r, ces directions étant fixées de manière que, pour un déplacement infiniment petit dans le sens l_r ou n_r, on ait un incrément positif de la variable x_r.

Puisque la propriété caractéristique des substitutions orthogonales peut s'énoncer en disant qu'elles sont en même temps covariantes et contrevariantes, les composantes d'un vecteur (R) selon trois axes orthogonaux peuvent être considérées en même temps comme éléments d'un système covariant ou contrevariant vis-à-vis de tout changement de ces axes. — Nous allons déterminer pour des coordonnées générales x_1, x_2, x_3 les expressions des projections orthogonales $\overline{R}_{l_r}$ et $\overline{R}_{n_r}$ et des composantes R_{l_r} et R_{n_r} selon les tangentes aux lignes et selon les normales aux surfaces coordonnées.

Dans ce but prenons à considérer deux systèmes réciproques $X_r, X^{(r)}$, dont les éléments coincident, dans le cas des coordonnées cartésiennes y, avec les projections de (R) sur les axes coordonnés, projections, que l'on pourra désigner par des symboles Y_r ou $Y^{(r)}$.

Puisque la projection sur une droite quelconque d'un polygone fermé est nulle, en considérant les polygones ayant pour côtés R et ses composantes selon les axes y_1, y_2, y_3, ou bien selon les directions l_r, ou n_r, on a les formules

$$\overline{R}_{l_r} = \sum_1^3{}_s\, Y_s \cos(l_r, y_s), \tag{11}$$

$$\overline{R}_{n_r} = \sum_1^3{}_s\, Y^{(s)} \cos(n_r, y_s), \tag{12}$$

$$Y^{(s)} = \sum_1^3{}_r\, R_{l_r} \cos(l_r, y_s), \tag{13}$$

$$Y_s = \sum_1^3{}_r\, R_{n_r} \cos(n_r, y_s); \tag{14}$$

ou bien, en y substituant aux cosinus directeurs des l_r et n_r leurs expressions bien connues,

$$\sqrt{a_{rr}} \cdot \overline{R}_{l_r} = \sum_1^3{}_s\, Y_s \frac{\partial y_s}{\partial x_r}, \tag{11'}$$

$$\sqrt{a^{(rr)}} \cdot \overline{R}_{n_r} = \sum_1^3{}_s\, Y^{(s)} \frac{\partial x_r}{\partial y_s}, \tag{12'}$$

$$(13') \qquad Y^{(s)} = \sum_1^3{}_r \frac{1}{\sqrt{a_{rr}}} R_{l_r} \frac{\partial y_s}{\partial x_r},$$

$$(14') \qquad Y_s = \sum_1^3{}_r \frac{1}{\sqrt{a^{(rr)}}} R_{n_r} \frac{\partial x_r}{\partial y_s}.$$

D'après la nature covariante et respectivement contrevariante des systèmes X_r et $X^{(r)}$ on a les formules

$$X_r = \sum_1^3{}_s Y_s \frac{\partial y_s}{\partial x_r},$$

$$X^{(r)} = \sum_1^3{}_s Y^{(s)} \frac{\partial x_r}{\partial y_s}$$

et aussi les formules équivalentes

$$Y^{(s)} = \sum_1^3{}_r X^{(r)} \frac{\partial y_s}{\partial x_r},$$

$$Y_s = \sum_1^3{}_r X_r \frac{\partial x_r}{\partial y_s};$$

et leur comparaison avec (11'), (12'), (13') et (14') donne

$$(15) \qquad \overline{R}_{l_r} = X_r : \sqrt{a_{rr}},$$

$$(16) \qquad \overline{R}_{n_r} = X^{(r)} : \sqrt{a^{(rr)}},$$

$$(17) \qquad R_{l_r} = \sqrt{a_{rr}} \cdot X^{(r)},$$

$$(18) \qquad R_{n_r} = \sqrt{a^{(rr)}} \cdot X_r.$$

On peut en déduire que:

Deux systèmes réciproques simples X_r et $X^{(r)}$ étant donnés, on peut, quelles que soient les coordonnées x_1, x_2, x_3 de l'espace, regarder les expressions $X_r : \sqrt{a_{rr}}$ et $X^{(r)} : \sqrt{a^{(rr)}}$ comme celles des projections orthogonales d'un même vecteur sur les tangentes aux lignes coordonnées x_r et sur les normales aux surfaces coordonnées x_r, pendant que les expressions $\sqrt{a_{rr}} \cdot X^{(r)}$ et $\sqrt{a^{(rr)}} \cdot X_r$ représentent les composantes du même vecteur respectivement selon les mêmes lignes et les mêmes normales.

§ 5.

Dérivation covariante et contrevariante selon une forme fondamentale. — Conservation des régles du calcul différential ordinaire.

Dérivation covariante. — M. Christoffel*) a remarqué le premier que si un système d'ordre m, $X_{r_1 r_2 \cdots r_m}$, est covariant, le système d'ordre $m+1$

$$(19)\quad X_{r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+1}} = \frac{\partial X_{r_1 r_2 \cdots r_m}}{\partial x_{r_{m+1}}} - \sum_1^m {}_l \sum_1^n {}_q \begin{Bmatrix} r_l\, r_{m+1} \\ q \end{Bmatrix} X_{r_1 r_2 \cdots r_{l-1}\, q\, r_{l+1} \cdots r_m}$$

est aussi covariant. — Nous appellons *dérivation covariante* selon la forme fondamentale φ l'opération, par laquelle, cette forme aidant, on passe d'un système donné $X_{r_1 r_2 \cdots r_m}$ au système $X_{r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+1}}$; et nous disons que celui-ci est *le premier système dérivé de celui-là selon la forme fondamentale.*

Pour $m = 0$, on a, comme cas-limite, que le premier système dérivé d'un système d'ordre zéro X résulte des dérivées de cette fonction, quelque soit la forme fondamentale, et l'on pose par suite

$$(19')\qquad X_r = \frac{\partial X}{\partial x_r}.$$

De même on obtient le premier système dérivé d'un système simple X_r en posant

$$(19'')\qquad X_{rs} = \frac{\partial X_r}{\partial x_s} - \sum_1^n {}_q \begin{Bmatrix} rs \\ q \end{Bmatrix} X_q,$$

et celui d'un système double X_{rs} en posant

$$(19''')\qquad X_{rst} = \frac{\partial X_{rs}}{\partial x_t} - \sum_1^n {}_q \left[\begin{Bmatrix} rt \\ q \end{Bmatrix} X_{qs} + \begin{Bmatrix} st \\ q \end{Bmatrix} X_{rq} \right].$$

Pour $X_{rs} \equiv a_{rs}$, on a les identités

$$a_{rst} \equiv 0,$$

qui nous disent que:

Le premier système dérivé selon une forme fondamentale φ du système de ses coefficients est identiquement nul.

En appliquant les formules (19) au système covariant E défini dans le paragraphe 3, on vérifie que:

Le premier système dérivé du système covariant E selon une quadrique fondamentale quelconque est nul.

---

*) Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades, Crelle's Journal, Band LXX, 1869.

Si une lettre à m indices représente un système covariant, il sera entendu en général que la même lettre avec un indice en plus représente son premier système dérivé selon la forme fondamentale considérée.

Il va sans dire que par p dérivations covariantes selon φ on peut passer d'un système donné d'ordre m à un système d'ordre $m+p$ (p étant un nombre entier et positif quelconque) qui sera le $p^{\text{ième}}$ système dérivé de celui-ci selon la forme fondamentale. —

Par exemple, en partant d'un système d'ordre o, c'est-à-dire d'une fonction X, et en appliquant successivement les formules (19'), (19'') etc., on peut en tirer le premier, le deuxième système dérivé etc. En étendant aux ordres supérieurs la locution en usage pour le premier ordre, on appelle quelquefois les éléments X_{rs}, X_{rst} etc. *dérivées covariantes* du deuxième ordre, du troisième ordre etc. de la fonction X.

Des proprietés bien connues des symboles de Christoffel et des (19'') on déduit que:

Si un système simple covariant résulte des dérivées d'une fonction par rapport aux variables indépendantes, son premier système dérivé selon une forme fondamentale arbitraire est symétrique; et réciproquement.

D'après les formules (19), les dérivées des éléments d'un système covariant quelconque sont des fonctions linéaires de ces éléments et de ceux de son premier système dérivé selon une forme fondamentale quelconque. — On peut donc dans les calculs éliminer partout les dérivées des éléments d'un système covariant donné, en introduisant les éléments de son premier système dérivé. — Plus en général on pourra partout dans les calculs éliminer les dérivées des différents ordres des éléments d'un système covariant d'ordre quelconque m (et en particulier pour $m=0$ celles d'une fonction quelconque), en introduisant les éléments de ses systèmes dérivés des mêmes ordres. — On a en procédant ainsi l'avantage (§ 2) d'avoir affaire seulement à des systèmes, qui se transforment d'après une loi uniforme et bien plus simple que celles, qui régissent les transformations des dérivées des différents ordres d'un système covariant (et en particulier d'une fonction), lois, que l'on pourrait déduire par la dérivation ordinaire des formules (6).

On verra plus loin que c'est précisément à la loi de transformation des systèmes covariants que l'on doit la nature invariantive des formules et des équations, que l'on établit par les procédés du Calcul différentiel absolu.

Dérivation contrevariante. — Un système contrevariant $X^{(r_1 r_2 \cdots r_m)}$ étant donné, on peut à l'aide de la quadrique fondamentale passer d'abord à son réciproque par rapport à cette forme, $X_{r_1 r_2 \cdots r_m}$, puis de celui-ci à son premier système dérivé selon φ $X_{r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+1}}$, et enfin au système $X^{(r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+1})}$ réciproque de ce dernier. — On appelle *dérivation contrevariante* selon φ l'opération, par laquelle, cette forme aidant, on passe du système primitif $X^{(r_1 r_2 \cdots r_m)}$ au système $X^{(r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+1})}$, qui en est le premier système dérivé selon φ.

Les éléments du premier système dérivé s'expriment en fonction des éléments du système primitif et des coefficicnts de la forme fondamentale par les formules

$$(20) \quad X^{(r_1 r_1 \cdots r_m r_{m+1})} =$$

$$\sum_1^n {}_t\, a^{(t r_{m+1})} \left\{ \frac{\partial X^{(r_1 r_2 \cdots r_m)}}{\partial x_t} + \sum_1^m {}_l \sum_1^n {}_q \left\{ \begin{matrix} tq \\ r_l \end{matrix} \right\} X^{(r_1 r_2 \cdots r_{l-1}\, q\, r_{l+1} \cdots r_m)} \right\}.$$

On pourrait faire au sujet de la dérivation contrevariante et des systèmes dérivés des systèmes contrevariants des considérations tout à fait analogues à celles, que l'on vient d'exposer au sujet de la dérivation covariante et des systèmes dérivés des systèmes covariants. — Il est, par exemple, évident que, les systèmes a_{rst}, $E_{r_1 r_2 \cdots r_n r_{n+1}}$ étant identiquement nuls, on peut affirmer la même chose des systèmes $a^{(rst)}$ (premier système dérivé du système $a^{(rs)}$) et $\varepsilon^{(r_1 r_2 \cdots r_n r_{n+1})}$ (premier système dérivé du système E contrevariant).

On peut dire en général qu'il existe comme une loi de réciprocité ou de dualité, qui permet de tirer de tout théorème ou formule de Calcul différentiel absolu un théorème ou une formule réciproque, en échangeant entre eux les mots *covariant* et *contrevariant*, et en portant les indices de la position covariante à la contrevariante et viceversa.

Règles de calcul. — Les règles bien connues, qui ont trait à la dérivation des sommes et des produits de fonctions, s'étendent de la manière la plus naturelle à la dérivation covariante ou contrevariante des systèmes. En effet, en ayant recours aux formules (19) pour la dérivation covariante des systèmes tels que

$$Y_{r_1 r_2 \cdots r_m} = X_{r_1 r_2 \cdots r_m} + \Xi_{r_1 r_2 \cdots r_m},$$

$$Y_{r_1 r_2 \cdots r_m s_1 s_2 \cdots s_p} = X_{r_1 r_2 \cdots r_m} \Xi_{s_1 s_2 \cdots s_p},$$

on parvient aux identités

$$Y_{r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+1}} = X_{r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+1}} + \Xi_{r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+1}},$$

$$Y_{r_1 r_2 \cdots r_m s_1 s_2 \cdots s_p r_{m+1}} = X_{r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+1}} \Xi_{s_1 s_2 \cdots s_p} + X_{r_1 r_2 \cdots r_m} \Xi_{s_1 s_2 \cdots s_p r_{m+1}};$$

et les choses se passent d'une manière analogue pour les systèmes contrevariants; et pour la dérivation des systèmes sommes d'un nombre quelconque de termes, ou produits d'un nombre quelconque de facteurs.

Considérons un système composé tel que

$$Y_{r_1 r_2 \cdots r_m} = \sum_1^n{}_{s_1 s_2 \cdots s_p} \Xi^{(s_1 s_2 \cdots s_p)} X_{r_1 r_2 \cdots r_m s_1 s_2 \cdots s_p}.$$

En appliquant les formules (19) et (20) on trouve pour les éléments de son premier système dérivé les expressions

$$(21) \qquad Y_{r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+1}} = \sum_1^n{}_{s_1 s_2 \cdots s_p} \Xi^{(s_1 s_2 \cdots s_p)} X_{r_1 r_2 \cdots r_m s_1 s_2 \cdots s_p r_{m+1}}$$
$$+ \sum_1^n{}_{s_1 s_2 \cdots s_p t} \Xi^{(s_1 s_2 \cdots s_p t)} a_{t r_{m+1}} X_{r_1 r_2 \cdots r_m s_1 s_2 \cdots s_p}.$$

On a aussi la formule réciproque pour la dérivation des systèmes composés contrevariants.

Pour un invariant tel que

$$Y = \sum_1^n{}_{r_1 r_2 \cdots r_m} \Xi^{(r_1 r_2 \cdots r_m)} X_{r_1 r_2 \cdots r_m},$$

on a

$$Y_s = \sum_1^n{}_{r_1 r_2 \cdots r_m} \Xi^{(r_1 r_2 \cdots r_m)} X_{r_1 r_2 \cdots r_m s} + \sum_1^n{}_{r_1 r_2 \cdots r_m t} \Xi^{(r_1 r_2 \cdots r_m t)} a_{ts} X_{r_1 r_2 \cdots r_m},$$

et, en substituant les systèmes $\Xi^{(r_1 r_2 \cdots r_m t)}$ et $X_{r_1 r_2 \cdots r_m}$ par leurs réciproques,

$$(22) \quad Y_s = \sum_1^n{}_{r_1 r_2 \cdots r_m} \left(\Xi^{(r_1 r_2 \cdots r_m)} X_{r_1 r_2 \cdots r_m s} + X^{(r_1 r_2 \cdots r_m)} \Xi_{r_1 r_2 \cdots r_m s}\right).$$

En particulier, pour dériver un invariant, tel que

$$Y = \sum_1^n{}_r \Xi^{(r)} X_r,$$

on a les formules

$$(22') \qquad Y_s = \sum_1^n \Xi^{(r)} X_{rs} + \sum_1^n{}_r X^{(r)} \Xi_{rs}.$$

Considérons l'invariant

$$(\Delta_1 f)^2 = \sum_1^n f^{(r)} f_r,$$

f étant une fonction quelconque de $x_1, x_2, \cdots, x_n$. On aura encore

$$\Delta_1 f \cdot \frac{\partial \Delta_1 f}{\partial x_s} = \sum_1^n {}_r f^{(r)} f_{rs}.$$

§ 6.

Système de Riemann. — Relations entre les éléments du deuxième système dérivé d'un système covariant quelconque.

Soit

$$\varphi = \sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

la quadrique fondamentale et posons

$$2 a_{rs,t} = \frac{\partial a_{rt}}{\partial x_s} + \frac{\partial a_{st}}{\partial x_r} - \frac{\partial a_{rs}}{\partial x_t},$$

$$a_{rs,tu} = \frac{\partial a_{rt,s}}{\partial x_u} - \frac{\partial a_{ru,s}}{\partial x_t} + \sum_1^n {}_{pq}\, a^{(pq)} (a_{ru,p}\, a_{st,q} - a_{rt,p}\, a_{su,q}).$$

Les symboles $a_{rs,tu}$ sont les éléments d'un système quadruple covariant, qui a une grande importance dans la théorie des quadriques de différentielles. On les trouve dans la *Commentatio mathematica* de Riemann*) (à un facteur numérique près) et c'est à cause de cela que nous désignerons ce système par le nom de *système covariant de Riemann.* — Les expressions $a_{rs,tu}$ furent rencontrées avant la publication du Mémoire cité du grand géométre par M. Christoffel**), qui en mit en évidence les propriétés fondamentales. Il suffira ici de rappeler que le nombre de ces expressions, qui ne sont liées entre elles par aucune relation linéaire, est $N = n^2(n^2-1):12$.

En particulier, pour $n = 1$, il suffit de considérer l'expression $a_{12,12}$, ou le rapport $a_{12,12} : a$, que nous désignerons par G, et qui est l'invariant de Gauss bien connu dans la théorie des surfaces.

Pour $n = 3$, on a $N = 6$. Dans ce cas les formules gagnent en symétrie si l'on convient que l'on peut remplacer deux indices l'un par l'autre lorsque leur différence est divisible par 3. — Nous introduirons dès à présent cette convention une fois pour toutes. — Les éléments du système covariant de Riemann linéairement indépendants entre eux peuvent alors tous être ramenés au type $a_{r+1\, r+2,\, s+1\, s+2}$, et en posant

$$\alpha^{(rs)} = a_{r+1\, r+2,\, s+1\, s+2} : a,$$

*) Gesammelte Werke, pag. 270.

**) «Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades», Crelle's Journal, B. LXX, 1869. Voir aussi, dans le même volume, les «Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Differentialen» par M. *Lipschitz.*

le système $\alpha^{(rs)}$ est contrevariant. Ce système, que nous désignerons par le nom de *système contrevariant de Riemann* (ou son réciproque α_{rs}) peut donc remplacer, si l'on a $n=3$, le système covariant $a_{rs,tu}$.

Cela étant posé, soit $X_{r_1 r_2 \cdots r_m}$ un système covariant quelconque; et considérons son deuxième système dérivé $X_{r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+1} r_{m+2}}$. On a les identités

$$(23)\quad X_{r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+1} r_{m+2}} - X_{r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+2} r_{m+1}} = \sum_1^m {}_l \sum_1^n {}_{pq}\, a^{(pq)}\, a_{r_{m+1} r_{m+2},\, r_l p}\, X_{r_1 \cdots r_{l-1} q r_{l+1} \cdots r_m},$$

qui nous disent que l'élément $X_{r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+1} r_{m+2}}$ n'est pas en général identique à l'élément $X_{r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+2} r_{m+1}}$.

En particulier, pour $n=2$, les (23) peuvent être remplacées par les formules

$$(23')\quad \sum_1^2 {}_{rs}\, \varepsilon^{(rs)} X_{r_1 r_2 \cdots r_m rs} = G \cdot \sum_1^m {}_l \sum_1^2 {}_{rs}\, a^{(rs)}\, \varepsilon_{r r_l} X_{r_1 \cdots r_{l-1} s r_{l+1} \cdots r_m},$$

et, pour $n=3$, par

$$(23'')\quad \sum_1^3 {}_{st}\, \varepsilon^{(rst)} X_{r_1 r_2 \cdots r_m st} = \sum_1^3 {}_{qst}\, a^{(qs)}\, \alpha^{(rt)} \sum_1^m {}_l\, \varepsilon_{r_l st} X_{r_1 \cdots r_{l-1} q r_{l+1} \cdots r_m}.$$

Si l'expression de la quadrique fondamentale peut se réduire à la forme $\sum_1^n {}_i\, dx_i^2$, le système covariant de Riemann est identiquement nul; et dans ce cas les formules (23) nous disent que:

«*Pour que un système* $X_{r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+1}}$ *soit le premier système dérivé d'un système d'ordre* m, *il est nécessaire et il suffit que les éléments* $X_{r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+1} r_{m+2}}$ et $X_{r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+2} r_{m+1}}$ *soient identiques.*»

§ 7.

Caractère invariant des équations, que l'on rencontre en Calcul différentiel absolu.

Les équations (6), qui définissent la loi de transformation des systèmes covariants, nous disent qu'un système covariant quelconque est, ou n'est pas, identiquement nul, indépendamment du choix des variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$. — C'est bien cette propriété que l'on traduit, en disant qu'un système d'équations tel que

$$X_{r_1 r_2 \cdots r_m} = 0, \tag{24}$$

a un caractère invariantif ou absolu. — On peut dire la même chose des systèmes d'équations du type

$$X^{(r_1 r_2 \cdots r_m)} = 0,$$

mais il n'y a aucun intérêt à les considérer à part, puisqu'on peut les reconduire au type (24), en passant du système $X^{(r_1 r_2 \cdots r_m)}$ à son réciproque. — En effet (formules (8) et (9)) deux systèmes réciproques sont, ou ne sont pas, identiquement nuls ensemble.

Lorsqu'on se pose *ex-novo* un certain problème, il suffit de supposer ses éléments déterminatifs exprimés en variables tout à fait générales, et de substituer la dérivation covariante (selon une forme fondamentale presque toujours indiquée, par la nature de la question) à la dérivation ordinaire, pour que les équations du problème se présentent sans aucun effort sous forme invariantive. — Comme nous le verrons dans plusieurs applications, c'est là le grand chemin, qu'il faut suivre, lorsqu'il s'agit de théories générales, et lorsqu'on a pour but une exposition systèmatique de ces théories.

Mais bien souvent, en possédant déjà les équations (ε) du problème exprimées en certaines variables y, on veut les transformer en variables générales sans répéter pour ces variables les procédés, qui ont conduit aux équations (ε). — Il suffit pour cela de déterminer en variables générales un système X covariant ou contrevariant, dont les éléments exprimés en variables y coincident, à des facteurs près, avec les premiers membres des équations (ε). — Il est en effet évident que, en supposant que les seconds membres des équations (ε) soient nuls, on aura leurs transformées en coordonnées générales en égalant à zéro les éléments du système X.

Certainement cette méthode ne peut pas réussir dans tous les cas, mais elle conduit bien souvent au but d'une manière rapide et facile. C'est ce qui arrive particulièrement, comme nous le verrons, pour les équations de la Physique mathématique; à tel point que l'on est presque étonné de ce que, pour atteindre le même but, on ait autrefois parcouru des chemins bien difficiles et détournés.

Chapitre II.

La Géométrie intrinsèque comme instrument de calcul.*)

§ 1.

Généralités sur les systèmes orthogonaux de congruences dans un espace quelconque.

Dans ce chapitre nous aurons recours au langage géométrique en considérant la forme fondamentale φ comme le ds^2 d'une variété V_n à n dimensions.

Cela étant posé, considérons un système d'équations tel que

$$(1)\qquad \frac{dx_1}{\lambda^{(1)}} = \frac{dx_2}{\lambda^{(2)}} = \cdots = \frac{dx_n}{\lambda^{(n)}},$$

en désignant par $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \cdots, \lambda^{(n)}$ des fonctions des variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$ arbitrairement données, mais régulières et qui ne s'annulent pas toutes à la fois dans un certain champ C.

Ces équations définissent dans la variété V_n une congruence de lignes régulière dans C, et c'est à ce champ que nous bornerons nos considérations.

Si l'on regarde le système des $\lambda^{(r)}$ comme contrevariant, et l'on se rappelle que le système des différentiels des variables indépendantes l'est aussi, on reconnait la nature invariantive des équations (1). — Comme ces équations ne changent pas en multipliant les λ par un même facteur, nous supposerons ce facteur préalablement déterminé de manière que l'on ait

$$(2)\qquad \sum_1^n{}_{rs}\, a_{rs}\, \lambda^{(r)}\, \lambda^{(s)} = \sum_1^n \lambda^{(r)}\, \lambda_r = 1\ \text{**)}.$$

Nous dirons alors que le système $\lambda^{(r)}$ est le *système coordonné contrevariant* de la congruence représentée par les équations (1); et que son réciproque λ_r en est le *système coordonné covariant.*

Désignons par ds l'élément d'arc d'une ligne quelconque de la congruence; c'est à dire la valeur positive de $\sqrt{\varphi}$; et il résultera des formules (1) et (2) que ds est la valeur absolue des rapports (1). On aura donc en général

---

*) Cfr. *Ricci* «Sulla teoria degli iperspazï», Rendiconti della r. Accademia dei Lincei, 24 Nov. 1895, et aussi «Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque», Memorie della r. Accademia dei Lincei, 1896.

**) Dans le champ réel il est toujours possible de satisfaire à cette équation, parce que nous supposons que la forme fondamentale soit positive.

$$\pm \frac{dx_r}{ds} = \lambda^{(r)}; \qquad (r = 1, 2, \cdots, n) \tag{1'}$$

et si l'on prendra, comme nous le ferons en suite, le signe positif, on déterminera pour chaque point de V_n une direction, que nous appellerons *direction positive*, de la ligne de la congruence, qui passe par ce point.

On reconnaît aisément que, si la variété V_n est euclidéenne, et les variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$ en sont des coordonnées cartésiennes orthogonales, les $\lambda^{(r)}$ (coïncidentes dans ce cas avec les λ_r) ne sont que les cosinus directeurs des lignes de la congruence.

D'après la définition, que Beltrami a donné pour l'angle α, que font entre elles deux directions dx_r et δx_r sortant d'un même point P de V_n, on a

$$\cos\alpha = \frac{\sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, \delta x_s}{\sqrt{\sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s} \cdot \sqrt{\sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs}\, \delta x_r\, \delta x_s}}.$$

Si l'on a deux congruences définies par leurs systèmes coordonnés contrevariants $\lambda^{(r)}$ et $\mu^{(r)}$, et l'on désigne par α l'angle, que font entre elles les lignes de ces congruences sortant de P, on aura d'après cette formule et les (1'),

$$\cos\alpha = \sum_1^n {}_r\, \lambda^{(r)} \mu_r, \tag{3}$$

(ou bien, au lieu du second membre, $\sum_1^n {}_r\, \mu^{(r)} \lambda_r$, ou $\sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs}\, \lambda^{(r)} \mu^{(s)}$, ou enfin $\sum_1^n {}_{rs}\, a^{(rs)} \lambda_r \mu_s$).

La condition d'orthogonalité des deux congruences est donc représentée par l'équation

$$\sum {}_r\, \lambda^{(r)} \mu_r = 0. \tag{3'}$$

Désignons par $\lambda_{h/r}$ $(h = 1, 2, \cdots, n)$*) les systèmes coordonnés covariants de n congruences et supposons que leurs lignes se rencontrent sous angle droit deux à deux et dans chaque point de V_n. En désignant par η_{hh}

*) Le trait, qui sépare les deux indices dans ce symbole est fait pour nous avertir qu'il s'agit de n systèmes simples; et non pas d'un système double; et que le premier indice individualise par ses différentes valeurs les différents systèmes; et le deuxième les différents éléments d'un même système.

l'unité et par η_{hk} $(h \neq k)$ le zéro, d'après les équations (2) et (3′), les $\lambda_{h/r}$ satisferont aux équations

$$(4) \qquad \sum_1^n {}_r \lambda_h^{(r)} \lambda_{k/r} = \eta_{hk}, \qquad (h, k = 1, 2, \cdots, n)$$

qui ne sont qu'une généralisation de celles, qui lient entre eux les cosinus directeurs de n lignes orthogonales deux à deux dans une variété euclidéenne n fois étendue.

Nous appellerons *ennuple orthogonale dans la variété V_n* tout ensemble de n congruences tel que celui, que nous venons de considérer; et nous désignerons par [1], [2], $\cdots$, [n] les congruences de l'ennuple, par $1, 2, \cdots, n$ les lignes de ces congruences passant par un point quelconque de V_n; par $s_1, s_2, \cdots, s_n$ les arcs de ces lignes.

Expression d'un système covariant ou contrevariant quelconque en fonction des systèmes coordonnés d'une ennuple orthogonale. Si l'on a un système covariant quelconque $X_{r_1 r_2 \cdots r_m}$ et une ennuple orthogonale tout à fait arbitraire [1], [2], $\cdots$, [n], on peut déterminer n^m fonctions $c_{h_1 h_2 \cdots h_m}$ telles que l'on ait les identités

$$(5) \qquad X_{r_1 r_2 \cdots r_m} = \sum_1^n {}_{h_1 h_2 \cdots h_m} c_{h_1 h_2 \cdots h_m} \lambda_{h_1/r_1} \lambda_{h_2/r_2} \cdots \lambda_{h_m/r_m}.$$

Ces fonctions sont même déterminées ayant les expressions

$$(5') \qquad c_{h_1 h_2 \cdots h_m} = \sum_1^n {}_{r_1 r_2 \cdots r_m} \lambda_{h_1}^{(r_1)} \lambda_{h_2}^{(r_2)} \cdots \lambda_{h_m}^{(r_m)} X_{r_1 r_2 \cdots r_m},$$

qui nous disent qu'elles sont des invariants. En passant des formules (5) ou (5′) à leurs réciproques, on les étend aisément aux systèmes contrevariants.

En particulier, s'il s'agit du système a_{rs} ou $a^{(rs)}$, on a, à cause des équations (4), pour toute ennuple orthogonale [1], [2], $\cdots$, [n] les identités

$$(4') \qquad a_{rs} = \sum_1^n {}_h \lambda_{h/r} \lambda_{h/s},$$

$$(4'') \qquad a^{(rs)} = \sum_1^n {}_h \lambda_h^{(r)} \lambda_h^{(s)}.$$

Les déterminants $\| \lambda_{h/r} \|$ et $\| \lambda_h^{(r)} \|$, qui, d'après les (4), sont les discriminants de deux quadriques réciproques, sont donc respectivement égaux à $\sqrt{a}$ et à $1:\sqrt{a}$.*)

En revenant aux équations (5) et (5′), on en déduit que tout système d'équations

$$X_{r_1 r_2 \cdots r_m} = 0$$

peut être remplacé par un système

$$c_{h_1 h_2 \cdots h_m} = 0;$$

c'est-à-dire (Chapitre I, § 7) que tout système absolu d'équations peut être transformé de manière que ses premiers membres soient des invariants. On a souvent recours avec avantage à cette transformation.

Remarquons encore que, étant

$$\frac{\partial x_r}{\partial s_h} = \lambda_h^{(r)},$$

en désignant par f une fonction quelconque de $x_1, x_2, \cdots, x_n$, on a

$$\sum_1^n {}_r \lambda_h^{(r)} f_r \equiv \frac{\partial f}{\partial s_h}. \quad (h = 1, 2, \cdots, n) \tag{6}$$

Éléments métriques du premier ordre. — Les propriétés métriques des lignes $1, 2, \cdots, n$, qui sont en rapport avec ce que l'on désigne ordinairement par le nom de courbure des lignes gauches, comme on le comprend a priori, sont des fonctions des dérivées des $\lambda_{h/r}$. — Ces dérivées ne sont pas toutes indépendantes; au contraire elles doivent satisfaire aux $n^2(n+1):2$ équations, que l'on obtient en dérivant les équations (4).

Posons

$$\gamma_{hkl} = \sum_1^n {}_{rs} \lambda_k^{(r)} \lambda_l^{(s)} \lambda_{h/rs}, \qquad (h, k, l = 1, 2, \cdots, n) \tag{7}$$

et dérivons ces équations en appliquant la régle de dérivation des systèmes composés (Chapitre I, formules (22′)). — Nous trouvons d'abord les équations, dont il s'agit, sous la forme

$$\sum_1^n {}_r \lambda_k^{(r)} \lambda_{h/rs} + \sum_1^n {}_r \lambda_h^{(r)} \lambda_{k/rs} = 0, \qquad (h, k, l = 1, 2, \cdots n) \tag{8}$$

et l'on voit aisément qu'on peut les remplacer par les:

$$\gamma_{hkl} + \gamma_{khl} = 0 \qquad (h, k, l = 1, 2, \cdots, n), \tag{8′}$$

---

*) Les équations (4) nous disent aussi que la nature métrique d'une variété V_n est déterminée, si l'on connait les systèmes coordonnés d'une ennuple orthogonale quelconque dans V_n.

qui comprennent comme cas particulier les

$$(8_1) \qquad \gamma_{hhl} = 0 .$$

Le nombre des invariants γ_{hkl} indépendants entre eux est donc égal à $\frac{n^2(n-1)}{2}$, et puisque ce nombre est égal à la différence des nombres n^3 et $\frac{n^2(n+1)}{2}$, dont le premier est celui des dérivées des $\lambda_{h/r}$ et le second celui des relations, qui ont lieu entre ces dérivées, on pourra exprimer les $\lambda_{h/rs}$ en fonction des $\lambda_{h/r}$ et des invariants γ. En résolvant les équations (7) on obtient en effet ces expressions sous la forme

$$(7') \qquad \lambda_{h/rs} = \sum_1^n {}^{ij}\, \gamma_{hij}\, \lambda_{i/r}\, \lambda_{j/s} .$$

Il nous suffira donc, pour étudier les propriétés métriques des lignes $1, 2, \cdots, n$, de fixer notre attention sur les invariants γ_{hij}; et en effet il sont liés aux dites propriétés par des relations très étroites et très simples. Sans nous arrêter ici à examiner en détail la signification géométrique ou cynematique de chacune des γ, il nous suffira d'en dire ce qui est nécessaire pour les applications, qui vont suivre. — Ajoutons que, à cause de leurs significations cynématique, nous désignerons les invariants γ par le nom de *coefficients de rotation* de l'ennuple $[1], [2], \cdots, [n]$.

§ 2.

Dérivées intrinsèques et leurs relations.

Il nous faut avant tout établir les relations, qui ont lieu entre deux dérivées telles que $\frac{\partial}{\partial s_k}\frac{\partial f}{\partial s_h}$ et $\frac{\partial}{\partial s_h}\frac{\partial f}{\partial s_k}$, car on ne peut pas intervertir les opérations représentées par les symboles $\frac{\partial}{\partial s_h}$ et $\frac{\partial}{\partial s_k}\cdot$ En effet, si l'on dérive l'identité (6), on a d'abord

$$\frac{\partial}{\partial x_s}\frac{\partial f}{\partial s_h} = \sum_1^n {}^{r}\, \lambda_h^{(r)} f_{rs} + \sum_1^n {}^{r}\, f^{(r)} \lambda_{h/rs} ,$$

et par suite

$$\frac{\partial}{\partial s_k}\frac{\partial f}{\partial s_h} = \sum_1^n {}^{s}\, \lambda_k^{(s)} \frac{\partial}{\partial x_s}\frac{\partial f}{\partial s_h} = \sum_1^n {}^{rs}\, \lambda_h^{(r)} \lambda_k^{(s)} f_{rs} + \sum_1^n {}^{rs}\, f^{(r)} \lambda_k^{(s)} \lambda_{h/rs} ,$$

ou encore, ayant égard aux identités

$$\sum_1^n {}_s \lambda_k^{(s)} \lambda_{h/rs} = \sum_1^n {}_i \gamma_{hik} \lambda_{i/r},$$

$$\sum_1^n {}_{rs} f^{(r)} \lambda_k^{(s)} \lambda_{h/rs} = \sum_1^n {}_i \gamma_{hik} \frac{\partial f}{\partial s_i},$$

qui dérivent des (4), (6) et (7′),

$$\frac{\partial}{\partial s_k} \frac{\partial f}{\partial s_h} = \sum_1^n {}_{rs} \lambda_h^{(r)} \lambda_k^{(s)} f_{rs} + \sum_1^n {}_i \gamma_{hik} \frac{\partial f}{\partial s_i}.$$

Enfin on déduit de ces dernières les relations, dont il s'agit, sous la forme

$$(9) \qquad \frac{\partial}{\partial s_k} \frac{\partial f}{\partial s_h} - \frac{\partial}{\partial s_h} \frac{\partial f}{\partial s_k} = \sum {}_i (\gamma_{ikh} - \gamma_{ihk}) \frac{\partial f}{\partial s_i}.$$

§ 3.

Congruences normales et géodésiques. — Familles isothermes de surfaces. — Système canonique pour une congruence donnée.

Congruences normales. — On dit qu'une congruence de lignes tracées dans V_n est *normale*, si elle résulte de trajectoires orthogonales à une famille de surfaces de V_n $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \text{const.}$ Choisissons dans une ennuple orthogonale une congruence $[n]$ et proposons-nous de déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour que cette congruence soit normale.

Évidemment pour cela il faut et il suffit que toute direction δx_r normale à la ligne n appartienne à la surface $f = 0$, c'est-à-dire que l'on ait

$$\sum_1^n {}_r \frac{\partial f}{\partial x_r} \delta x_r = 0.$$

En d'autres termes les conditions, dont il s'agit, sont les mêmes, qui sont nécessaires et suffisantes pour que les équations

$$X_h(f) = \sum_1^n {}_r \lambda_h^{(r)} f_r = 0 \qquad (h = 1, 2, \cdots, n-1)$$

soient satisfaites par une fonction f; c'est-à-dire pour que le système de ces équations soit complet. Nous devrons donc exprimer que (pour $h, k = 1, 2, \cdots, n-1$) les

$$(X_h X_k) f = X_h X_k(f) - X_k X_h(f)$$

sont des fonctions linéaires des $X_h(f)$.

On a:

$$X_h X_k(f) = \sum_1^n{}^r \lambda_h^{(r)} \sum_1^n{}^s \left(\lambda_k^{(s)} f_{sr} + f^{(s)} \lambda_{k/sr}\right),$$

ou, à cause des équations (8) et (7'), étant

$$\sum_1^n{}^r \lambda_h^{(r)} \lambda_{k/sr} = -\sum_1^n{}^i \gamma_{ikh} \lambda_{i/s},$$

$$X_h X_k(f) = \sum_1^n{}^{rs} \lambda_h^{(r)} \lambda_k^{(s)} f_{sr} - \sum_1^{n-1}{}^i \gamma_{ikh} X_i(f) - \gamma_{nkh} \frac{\partial f}{\partial s_n};$$

et par suite

$$X_h X_k(f) - X_k X_h(f) = \sum_1^{n-1}{}^i (\gamma_{ihk} - \gamma_{ikh}) X_i(f) + (\gamma_{nhk} - \gamma_{nkh}) \frac{\partial f}{\partial s_n}.$$

L'expression $\frac{\partial f}{\partial s_n}$, étant indépendante des

$$X_h(f) \quad (h = 1, 2, \cdots, n-1),$$

l'identité, que nous venons d'établir, nous dit que:

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que la congruence $[n]$ *soit normale sont exprimées par les* $(n-1)(n-2):2$ *équations*

(10) $$\gamma_{nhk} = \gamma_{nkh}. \qquad (h, k = 1, 2, \cdots, n-1)$$

On a donc aussi que:

«Si toutes les congruences d'une ennuple orthogonale sont normales, toutes les γ_{hkl} à trois indices distincts sont nulles et réciproquement.»

Comme on n'a rien déterminé sur le choix des congruences $[1], [2], \cdots, [n-1]$, qui forment avec $[n]$ une ennuple orthogonale, les équations (9), attendu leur signification géométrique, ont un caractère invariantif vis-à-vis, non seulement de toutes les transformations possibles de coordonnées, mais aussi de tous les changements possibles des $n-1$ congruences $[1], [2], \cdots, [n-1]$, formant avec $[n]$ une ennuple orthogonale.

Les conditions (10) étant remplies, les $\lambda_{n/r}$ seront proportionnelles aux dérivées f_r d'une fonction c'est-à-dire que l'on pourra déterminer un coefficient μ tel que les

$$f_r = \mu \lambda_{n/r}$$

satisfassent aux équations

$$f_{rs} = f_{sr}.$$

Étant, a cause des formules (7'),

(11) $$f_{rs} = \mu_s \lambda_{n/r} + \mu \sum_1^n{}^{ij} \gamma_{nij} \lambda_{i/r} \lambda_{j/s},$$

et en posant

(12) $$\psi = \log \mu ,$$

la fonction indéterminée ψ devra donc satisfaire aux équations

$$\psi_s \lambda_{n/r} + \sum_1^n {}_{ij} \gamma_{nij} \lambda_{i/r} \lambda_{j/s} = \psi_r \lambda_{n/s} + \sum_1^n {}_{ij} \gamma_{nij} \lambda_{i/s} \lambda_{j/r} .$$

En les multipliant par $\lambda_n^{(s)}$ et puis en les additionnant, après avoir fait $s = 1, 2, \cdots, n$ et en ayant recours aux équations (4) et (9), on peut leur substituer le système équivalent

(13) $$\psi_r = \nu \lambda_{n/r} + \sum_1^{n-1} {}_i \gamma_{nin} \lambda_{i/r} ,$$

ν étant indéterminée.

Familles isothermes de surfaces. On dit qu'une famille de surfaces $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \text{const}$ est isotherme dans la variété V_n et que f en est un paramètre thérmométrique, si cette fonction satisfait à l'équation

(14) $$\sum_1^n {}_{rs} a^{(rs)} f_{rs} = 0.^{*)}$$

On peut considérer une famille de surfaces comme individualisée, lorsqu'on connait la congruence de ses trajectoires orthogonales; ce, qui signifie par d'autres mots, que toute famille de surfaces peut être représentée par un système $\lambda_{n/r}$ satisfaisant en même temps à l'équation algébrique (2) et aux équations (10) aux dérivées partielles du premier ordre. — Proposons nous d'établir les conditions nécessaires et suffissantes pour que cette famille soit isotherme et d'en déterminer, ces conditions étant remplies, les paramètres thermométriques.

En substituant dans la formule (14) les expressions des f_{rs} données par les (11), on la remplace par la formule équivalente

$$\frac{\partial \psi}{\partial s_n} = - \sum_1^n {}_i \gamma_{nii} ,$$

qui nous donne pour l'indéterminée ν de la formule (13) l'expression

(15) $$\nu = - \sum_1^{n-1} {}_i \gamma_{nii} .$$

---

*) Nous verrons plus loin l'identité de cette équation avec celle des fonctions harmoniques.

Pour que la famille de surfaces ayant les lignes n comme trajectoires orthogonales soit isotherme, il faut donc et il suffit que, en remplaçant ν par son expression (15), les seconds membres des (13) résultent des dérivées d'une fonction ψ prises par rapport aux x_r; après quoi les

$$f_r = C e^{\psi} \lambda_{n/r}$$

seront aussi les dérivées d'une fonction f par rapport aux mêmes variables, et

$$f = C \int e^{\psi} \sum_1^n {}^r \lambda_{n/r} \, dx_r + c,$$

(C et c étant des constantes arbitraires) sera l'expression la plus générale des paramètres thermométriques de la famille considérée.

On reconnaît puis aisément que les conditions d'intégrabilité des formules (13) sont représentées par les équations

$$(15) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \nu}{\partial s_h} + \dfrac{\partial \gamma_{hnn}}{\partial s_n} + \nu \gamma_{hnn} + \sum_1^{n-1} {}^i \gamma_{inn} (\gamma_{ihn} - \gamma_{inh}) = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial \gamma_{hnn}}{\partial s_k} + \sum_1^{n-1} {}^i \gamma_{inn} \gamma_{ihk} = \dfrac{\partial \gamma_{knn}}{\partial s_h} + \sum_1^{n-1} {}^i \gamma_{inn} \gamma_{ikh}. \end{cases}$$

$$(h, k = 1, 2, \cdots, n-1).$$

Si les congruences [1], [2], $\cdots$, [n] sont toutes normales, c'est-à-dire si elles sont les intersections des surfaces de n familles orthogonales dans V_n, ces équations se réduisent à la forme bien plus simple

$$(15') \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \nu}{\partial s_h} + \dfrac{\partial \gamma_{hnn}}{\partial s_n} + \nu \gamma_{hnn} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial \gamma_{hnn}}{\partial s_k} = \dfrac{\partial \gamma_{knn}}{\partial s_h}. \end{cases}$$

*Congruences geodésiques.**) — En disant qu'une ligne est géodésique dans une variété V_n, dont le ds^2 est donné par la forme fondamentale φ, on signifie que la variation première de l'intégrale

$$\int ds = \int \sqrt{\sum_1^n {}^{rs} a_{rs} \, dx_r \, dx_s}$$

calculée selon cette ligne est nulle. Les conditions pour que toutes les

*) Voir *Ricci* «Dei sistemi di congruenze ortogonali etc.», § 5, et aussi «Lezioni sulla teoria delle superficie», Première Partie, Chapitre IV.

lignes n soient géodésiques (et nous dirons alors que la congruence $[n]$ est géodésique) sont exprimées par les équations

(16) $$\gamma_{inn} = 0, \qquad (i = 1, 2, \cdots, n-1)$$

qui ont les mêmes caractères invariantifs, que nous avons remarqués dans les (10). En particulier, si l'espace est euclidéen. les (16) nous donnent les caractéristiques intrinsèques des congruences rectilignes.

Courbure géodésique d'une congruence. — Si la congruence $[n]$ n'est pas géodésique, et l'on considère la variété V_n comme contenue dans un espace euclidéen S_{n+m}, on peut se représenter la courbure géodésique de la ligne $[n]$ dans un point quelconque P de V_n de la manière suivante. — Que l'on conduise par P dans S_{n+m} un vecteur tangent à V_n, dont la longueur γ soit donnée par la formule

$$\gamma^2 = \sum_{1}^{n-1} {}_i\, \gamma_{inn}^2,$$

et la direction par celle de la tangente à la ligne qui passe par P et appartient à la congruence ayant comme système coordonné covariant

$$\mu_r = \sum_{1}^{n-1} {}_i\, \gamma_{inn}\, \lambda_{i/r}.$$

Ce vecteur jouit des propriétés suivantes:

1°: Il s'annule identiquement, si la congruence n est géodésique.

2°: Sa projection sur le plan tangent aux lignes i et n est égale à la courbure de la projection de la ligne n sur le même plan.

3°: Il est normal à la ligne n.

A cause de ces propriétés nous désignons ce vecteur par le nom de *courbure géodésique* et les lignes de la congruence ayant μ_r comme système coordonné covariant par celui de *lignes de courbure géodésique* de la congruence n.

Systèmes canoniques par rapport à une congruence donnée. Une congruence $[n]$ étant donnée, on peut d'une infinité de manières différentes lui associer $n-1$ congruences constituant avec $[n]$ une ennuple orthogonale dans la variété V_n. Parmi ces systèmes de $n-1$ congruences orthogonales l'une à l'autre et à la congruence $[n]$, il y en a un ou plusieurs, que nous allons définir, et que nous appellerons canoniques par rapport à la congruence $[n]$.

Posons

$$2\, X_{rs} = \lambda_{n/rs} + \lambda_{n/sr},$$

et considérons le système d'équations algébriques

$$(17)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_1^n{}_r\, \lambda_{n/r}\cdot\lambda^{(r)}=0, \\ \displaystyle\lambda_n\cdot\mu+\sum_1^n{}_r\,(X_{qr}+\omega\, a_{qr})\,\lambda^{(r)}=0, \qquad (q=1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

μ, ω, $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, $\cdots$, $\lambda^{(n)}$ étant des indéterminées. C'est un système de $n+1$ équations linéaires et homogènes par rapport aux inconnues μ, $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$,$\cdots$,$\lambda^{(n)}$, et son déterminant égalé à zéro nous donne une équation du degré $n-1$ en ω

$$(18)\qquad \Delta(\omega)=0,$$

dont les racines sont toutes réelles. — Désignons ces racines par ω_h $(h=1,2,\cdots,n-1)$ et supposons d'abord qu'elles soient toutes simples. Si l'on pose dans le système (17) $\omega=\omega_h$ et l'on associe à ce système l'équation (2), les inconnues $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, $\cdots$, $\lambda^{(n)}$ résultent, au signe près, determinées. — Leurs valeurs, que nous désignerons par $\lambda_h^{(r)}$ $(r=1,2,\cdots,n)$, sont les éléments du système coordonné covariant d'une congruence [h]; et les $n-1$ congruences [1], [2], $\cdots$, [$n-1$] étant orthogonales entre elles et à la congruence [n] sont les éléments du système orthogonal canonique par rapport à cette dernière. Dans ce cas ce système est donc tout à fait déterminé.

Si les racines de l'équation (18) sont toutes égales entre elles, tout système de $n-1$ congruences formant avec [n] une ennuple orthogonale satisfait aux équations (17) et peut être regardé comme canonique par rapport à [n].

En général soient ω_1, ω_2, $\cdots$, ω_m les racines distinctes de l'équation (18), $p_1, p_2, \cdots, p_m$ leurs ordres de multiplicité, et posons dans les équations (17) $\omega=\omega_h$ $(h=1,2,\cdots,m)$. On peut déterminer p_h congruences orthogonales entre elles deux à deux et telles que les éléments de leurs systèmes coordonnés contrevariants soient les solutions des équations (17). Il y a même dans le groupe Λ_h de ces congruences toute l'arbitrariété, qui appartient à une substitution orthogonale d'ordre p_h, c'est-à-dire une arbitrariété représentée par $p_h\cdot(p_h-1):2$ fonctions arbitraires. Comme les congruences faisant partie de deux groupes Λ_h et Λ_k sont aussi orthogonales entre elles, on a de la sorte

$$p_1+p_2+\cdots+p_m=n-1$$

congruences constituant avec [n] une ennuple orthogonale. — Dans ce cas aussi les congruences [1], [2], $\cdots$, [$n-1$] sont lés éléments d'un système orthogonal canonique par rapport à la congruence [n], mais ce système n'est ni tout à fait déterminé, ni tout à fait arbitraire. Il contient des fonctions arbitraires, dont le nombre est égal à

$$\sum_1^m {}^h p_h(p_h-1):2.$$

Les coefficients de rotation de l'ennuple orthogonale, lorsque [1], [2], ⋯, [$n-1$] sont les éléments d'un système canonique par rapport à [n], sont liés entre eux par les relations caractéristiques

$$\gamma_{nhk}+\gamma_{nkh}=0. \tag{19}$$

En rapprochant ces équations aux (10) on en déduit que, si la congruence [n] est normale, les γ_{nhk} (pour $h \neq k$) sont toutes nulles dans le système orthogonal canonique à [n]. Dans ce cas les congruences, qui appartiennent à ce système, ont une signification géométrique bien simple: elles résultent des lignes de courbure des surfaces orthogonales aux lignes n.*)

On peut donner une interprétation géométrique assez simple pour le système orthogonal canonique à une congruence donnée quelconque, lorsque la variété fondamentale c'est l'espace euclidéen à trois dimensions.**) On pourrait même étendre cette interprétation à une variété V_n de nature quelconque; mais on ne peut pas s'arrêter à tous ces détails et il vaut mieux de passer à d'autres considérations.

§ 4.

Propriétés des coefficients de rotations et liens avec la théorie du trièdre mobile d'après M. Darboux.

On a vu dans le § 2 que l'on a $\frac{n^2(n-1)}{2}$ coefficients de rotation algébriquement indépendants entre eux pour une ennuple quelconque. Ces coefficients ne sont pas tous indépendants entre eux au point de vue fonctionnel; au contraire ils doivent satisfaire à des équations différentielles du premier ordre, que l'on obtient aisément en dérivant encore une fois les équations (7′) et en éliminant les dérivées des $\lambda_{h/r}$ à l'aide de ces mêmes équations et des équations (23) du Chapitre Premier.

---

*) Plusieurs géomètres ont étudié la courbure des surfaces dans les hyperespaces. — Il suffira ici de rappeler le Mémoire fondamental de M. *Lipschitz* „Entwickelungen einiger Eigenschaften der quadratischen Formen von n Differentialen", Crelle's Journal, Band LXXI, 1870.

**) Cfr. *Levi-Civita* «Sulle congruenze di curve», Rendiconti dell' Accademia dei Lincei, 5 Marzo 1891.

En posant

$$(20)\quad \gamma_{hi,kl} = \frac{\partial \gamma_{hik}}{\partial s_l} - \frac{\partial \gamma_{hil}}{\partial s_k} + \sum_1^n {}_j \left\{ \gamma_{hij}(\gamma_{jkl} - \gamma_{jlk}) + \gamma_{jhl}\gamma_{jik} - \gamma_{jhk}\gamma_{jil} \right\},$$

on parvient de la sorte aux équations

$$(21)\qquad \gamma_{hi,kl} = \sum_1^n {}_{qrst}\, \lambda_h^{(q)} \lambda_i^{(r)} \lambda_k^{(s)} \lambda_l^{(t)} a_{qr,st},$$

qui avec les équations (8′) nous donnent toutes les conditions nécessaires et suffisantes pour que n^3 fonctions données γ_{hki} puissent être regardées comme les coefficients de rotation d'une ennuple orthogonale dans la variété V_n, dont le ds^2 est exprimé par la forme fondamentale.

Pour $n = 2$, on a une seule formule (21), que l'on peut réduire à la forme suivante:

$$(21_1)\qquad \frac{\partial \gamma_{121}}{\partial s_2} + \frac{\partial \gamma_{212}}{\partial s_1} = \gamma_{121}^2 + \gamma_{212}^2 + G.$$

C'est une formule bien connue dans la théorie des surfaces, puisque γ_{121} et γ_{212} sont les courbures géodésiques des lignes 1 et 2.

Pour $n = 3$, en posant

$$(22)\qquad \gamma_{hk} = \gamma_{h+1\,h+2,k+1\,k+2},$$

les équations (21) peuvent être remplacées par les

$$(21_2)\qquad \gamma_{hk} = \sum_1^n {}_{rs}\, \lambda_h^{(r)} \lambda_k^{(s)} \alpha_{rs},$$

qui nous donnent en particulier

$$\gamma_{hk} = \gamma_{kh}.$$

En général les équations (21), étant liées au système covariant de Riemann, sont aussi intimement liées à la nature métrique de la variété V_n.

Ces équations ne sont pas autre chose que la généralisation de celles, qui ont lieu entre les composantes p, q, r des rotations dans la théorie du trièdre mobile.*) En supposant en effet la variété V_n coïncidente avec l'espace euclidéen à trois dimensions, les tangentes aux lignes 1, 2, 3 déterminent dans chaque point de cet espace un trièdre trirectangle. — Les invariants γ_{ihk} indépendants entre eux nous donnent alors les rotations p_i, q_i, r_i $(i = 1, 2, 3)$ qui se rapportent à des déplacements infiniment

*) *Darboux* «Leçons sur la théorie des surfaces», T. I, Chapitre V; et aussi *Königs* «Leçons de Cinématique», Chapitre X, et la Note M. M. *E.* et *F. Cosserat*, «Sur la Cinématique dans les milieus continus», qui suit ces *Leçons*.

petits selon les lignes 1, 2, 3. Les formules, que l'on tire pour ce cas des (21), sont même plus générales que celles, que l'on connait généralement, puisqu'elles ne supposent pas que les congruences [1], [2], [3] soient normales.*)

On peut voir dans cet exemple comment les méthodes de Calcul Différentiel absolu par leur généralité résument en eux mêmes et offrent tous les avantages des différents procédés déjà connus.

§ 5.

Expressions canoniques des systèmes associés à la forme fondamentale.

Dans l'étude des problèmes de Géométrie, de Physique, de Mécanique analytique etc. on est presque toujours conduit à des systèmes d'équations ayant un caractère invariantif (voir le § 7 du Chapitre Premier), et dans lesquelles on rencontre avec les coefficients d'une forme fondamentale les éléments d'un ou de plusieurs systèmes simples et doubles et leurs dérivées. Pour fixer les idées nous nous bornerous ici au cas d'un seul système associé.

Supposons d'abord que ce soit un système simple X_r. On lui fera correspondre une congruence $[n]$ définie par les équations

$$\frac{dx_1}{X^{(1)}} = \frac{dx_2}{X^{(2)}} = \cdots = \frac{dx_n}{X^{(n)}},$$

et dont le système coordonné covariant résultera des éléments

$$\lambda_{n/r} = X_r : \varrho,$$

étant

$$\varrho^2 = \sum_1^n {}_r X^{(r)} X_r.$$

Nous dirons alors que les formules

$$X_r = \varrho \, \lambda_{n/r}, \tag{23}$$

nous donnent les expressions canoniques des X_r.

En partant de ces expressions canoniques on procèdera de la manière suivante.

On commencera par associer à la congruence $[n]$ $n-1$ congruences formant avec elle une ennuple orthogonale (et il sera dans ce cas utile d'avoir recours au système, ou à un des systèmes, canoniques par rapport à la congruence $[n]$). Après cela on transformera les équations du problème

*) *Levi-Civita* «Tipi di potenziali, che si possono far dipendere de due sole coordinate», Memorie delle Accademia delle Scienze di Torino, Tomo XLIX, 1899, § 4.

en substituant respectivement aux a_{rs} et aux X_r les expressions données par les formules (4′) et (22), et à leurs dérivées les éléments des systèmes dérivés par dérivation covariante selon la forme fondamentale.

On obtient de la sorte un système d'équations étroitement en rapport avec les éléments essentiels du problème, et dont l'interprétation géométrique, presque toujours facile et naturelle, le caractérise d'une manière nette et opportune. — Ce système nous donnera aussi souvent des indications très avantageuses pour son intégration, en rendant presque intuitif le système de variables indépendantes, qu'il faut choisir pour en obtenir, si cela est possible, les équations intégrales. — Dans ce cas on revient en fin aux notations ordinaires, et l'on obtient les solutions canoniques du problème.

Ces méthodes, nous le reconnaissons les premiers, n'ont pas la prétention d'éliminer les difficultés essentielles aux questions, aux quelles elles sont appliquées. Au contraire elles ne conduisent qu'à des transformations d'équations laissant nécessairement subsister toutes ces difficultés. — Elles nous apprennent seulement à éviter tous les obstacles accidentels; et par ce seul fait il arrive souvent que, en partant d'un système d'équations bien compliqué, on parvient à un système canonique très simple et parfaitement abordable. On obtient alors des succès intéressants et inattendus là, où les méthodes ordinaires auraient presque certainement échoué.

S'il s'agit d'un système double symétrique α_{rs}, on a recours aux équations

$$(23) \qquad \sum_1^n {}_s (\alpha_{rs} - \varrho\, a_{rs})\, \lambda^{(s)} = 0. \qquad (r = 1, 2, \cdots, n)^{*)}$$

En éliminant $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \cdots, \lambda^{(n)}$ on parvient à une équation du dégré n en ϱ, dont les propriétés sont bien connues. Toutes ses racines $\varrho_1, \varrho_2, \cdots, \varrho_n$ sont réelles et leur substitution à ϱ dans les équations (23), conduit en tout cas à la détermination d'une ou de plusieurs ennuples orthogonales $[1], [2], \cdots, [n]$, telles que l'on a pour les éléments du système donné les expressions canoniques

$$\alpha_{rs} = \sum_1^n {}_h\, \varrho_h\, \lambda_{h/r}\, \lambda_{h/s}.$$

En partant de ces expressions on transforme les équations du problème et on parvient souvent à ses solutions canoniques d'une manière tout à fait analogue à celle, qui a été indiquée pour le cas des systèmes simples.

*) *Ricci* «Sulla teoria delle linee geodetiche e dei sistemi isotermi di Liouville», § 2 Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, 1894 et aussi *Levi-Civita* «Sulla trasformazione delle equazioni dinamiche», § 7, Annali di Matematica, 1896.

Voyons désormais les règles générales, que l'on peut déduire pour un système d'ordre quelconque des exemples, que nous venons de considérer.

On a vu (§ 1) que les éléments d'un système covariant quelconque d'ordre m peuvent être exprimés comme fonctions homogènes du dégré m des éléments des systèmes coordonnés covariants d'une ennuple arbitraire, que nous appellerons désormais *ennuple de référence.* Pour obtenir les expressions canoniques des éléments d'un système simple X_r nous avons dans le premier exemple choisi cette ennuple de manière que dans les formules générales

$$X_r = \sum_1^n {}_h\, c_h \lambda_{h/r},$$

on eût

$$c_1 = c_2 = c_3 = \cdots = c_{n-1} = 0.$$

De même on a réduit dans le deuxième exemple les α_{rs} à leurs expressions canoniques en choisissant l'ennuple de référence de manière que dans les formules

$$\alpha_{rs} = \sum_1^n {}_{hk}\, c_{hk} \lambda_{h/r} \lambda_{k/s}$$

on eût

$$c_{hk} = 0. \qquad (h \neq k)$$

En général, si l'on a affaire à un système covariant d'ordre m, i importe avant tout d'en réduire les éléments à des expressions canoniques bien choisies en prenant l'ennuple de référence de la manière la plus opportune. Après cela, pour établir les équations intrinsèques du problème, on n'aura qu'à suivre des procédés très simples et uniformes.

Chapitre III.

Applications analytiques.

§ 1.

Classification des formes quadratiques de différentielles.*)

Soit φ une forme quadratique des différentielles des n variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$, essentiellement positive. En choisissant convenablement $n + \mu$ fonctions $y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots, y_{n+\mu}$ des x, on peut toujours (pour μ assez grand) satisfaire à l'équation

$$\varphi = dy_1^2 + dy_2^2 + \cdots + dy_n^2 + \cdots + dy_{n+\mu}^2.$$

*) Cfr. *Ricci* «Principi di una teoria delle forme differenziali quadratiche» Ann. di Matematica, Ser. II^a, T. XII, 1884, ou le Chapitre V, des «Lezioni, etc.».

La plus petite valeur m de μ, pour laquelle une telle égalité est possible, peut varier de 0 jusqu'à $\frac{n(n-1)}{2}$. On a de la sorte un criterium fondamental pour la classification des formes φ. Le nombre m s'appelle *classe de la forme* correspondante. Il ne peut pas dépasser $\frac{n(n-1)}{2}$. Ainsi, par exemple, les formes binaires ($n=2$) sont ou bien de classe zéro, ou bien de première classe.

Les formes de classe 0 (à un nombre quelconque de variables) sont caractérisées par ce fait que le système de Riemann (voir page 142) est identiquement nul. Pour les formes de première classe on a le théorème suivant:

Pour qu'une forme φ soit de première classe il faut et il suffit qu'on puisse déterminer un système double symétrique b_{rs} tel que

1°. $$a_{rt,su} = b_{rs}b_{tu} - b_{ru}b_{ts},$$

2°. *le système b_{rst}* (dérivé covariant selon φ) *soit symétrique.**)

Lorsque ces conditions sont vérifiées, les fonctions $y_1, y_2, \cdots, y_n, y_{n+1}$ peuvent être déterminées comme intégrales d'un certain système complet.

Pour les formes des classes supérieures on démontre un théorème analogue.

Mais nous n'insistons pas davantage sur cet argument; une autre application importante du calcul différentiel absolu appelle notre attention.

§ 2.

Invariants absolus.**) — Remarques géométriques. — Paramètres différentiels.

Les recherches classiques de Jacobi, Lamé et Beltrami, auxquelles on doit l'introduction dans l'analyse des invariants bien connus sous le nom *de paramètres différentiels*, ont leur fondement dans la considération de la variation première de certaines intégrales. Malgré l'élégance et l'ingéniosité de cet artifice, on est ainsi conduit à des méthodes indirectes et très eloignées de celles, que la nature même de la question semble suggérer.

Elle rentre en effet dans le problème général suivant, qui n'est après tout qu'un problème d'élimination algébrique:

---

*) Nous disons qu'un système multiple est symétrique, lorsque ses éléments correspondants à une même combinaisons des indices sont identiques.

**) Voir *Ricci* «Sui parametri e gli invarianti delle forme quadratiche differenziali» Ann. di Matematica, Ser. IIa, T. XIV, 1886 et «Lezioni etc», Chap. V. A consulter aussi *Levi-Civita* «Sugli invarianti assoluti», Atti dell' Istituto Veneto, 1894.

Étant donnée une forme quadratique définie φ et un nombre quelconque de systèmes associés S (covariants ou contrevariants), *déterminer tous les invariants absolus, que l'on peut former avec les coefficients de φ, les éléments des systèmes S et les dérivées des uns et des autres jusqu'à un ordre μ fixé à l'avance.*

Si l'on n'avait pas à considérer les dérivées, ce serait une question bien connue, pour laquelle il suffirait de se rapporter à la théorie des formes. L'intervention des dérivées semble au premier abord compliquer beaucoup la recherche. Fort heureusement il n'en est rien. Le calcul différentiel absolu nous ramène toujours à la même question, en substituant aux dérivées ordinaires les éléments des systèmes, qui proviennent des systèmes donnés par dérivation selon φ. Plus précisément on a le théorème:

Pour obtenir tous les invariants différentiels absolus d'ordre μ, il suffit de déterminer les invariants algébriques du système des formes suivantes:

1) *forme fondamentale φ;*
2) *formes associées S et leurs dérivées selon φ, jusqu'à l'ordre μ;*
3) (pour $\mu > 1$) *forme quadrilinéaire, dont les coefficients sont les éléments du système de Riemann; formes dérivées de cette-ci jusqu'à l'ordre $\mu - 2$.*

En appelant *invariants propres* d'une forme φ ceux, qui dépendent uniquement des coefficients de φ et de leurs dérivées, on déduit de la proposition précédente les deux corollaires que voici:

Les formes de classe 0 *n'admettent aucun invariant différentiel propre.*

Les formes de classe supérieure ne possèdent pas des invariants différentiels du premier ordre; leurs invariants d'ordre $\mu > 1$ sont ceux des formes 1), 3).

Ces résultats prennent naturellement une forme bien plus simple pour les formes binaires et ternaires.

Pour $n = 2$ (Voir Chapitre I, § 6) le système de Riemann peut être substitué par l'invariant G de Gauss, qui est le seul invariant du second ordre propre des formes binaires.

Il est bon de remarquer dès à présent que, lorsqu'on regarde φ comme le ds^2 d'une surface, la valeur de G n'est que le produit des rayons principaux de courbure. C'est pour cela que G s'appelle aussi *courbure totale de la forme φ.* D'après ce qui precède, nous pouvons affirmer que $G = 0$ donne la condition nécessaire et suffisante pour qu'une forme binaire φ soit de classe zéro. En langage géométrique c'est la proposition bien connue que les surfaces développables sont les seules qui soient applicables sur le plan.

Pour $G = 0$, notre forme binaire n'a pas évidemment des invariants propres; en général

Les invariants propres d'une forme binaire jusqu'à un ordre quelconque $\mu > 2$, *s'obtiennent en déterminant les invariants absolus algébriques communs à la forme* φ *et à celles, qui ont pour coefficients les dérivées covariantes de* G *jusqu'à l'ordre* $\mu - 2$.

Ce résultat est contenu implicitement dans un mémoire de Casorati.*)

Pour $n = 3$, on peut substituer à la considération du système covariant de Riemann, celle du système contrevariant double $\alpha^{(rs)}$ ou de son réciproque α_{rs}, et il est bien clair avant tout que les conditions $\alpha_{rs} = 0$ sont à la fois nécessaires et suffisantes pour qu'une forme ternaire soit de classe 0. Lorsque le système α_{rs} n'est pas identiquement nul, la considération des deux formes quadratiques aux coefficients a_{rs} et α_{rs} nous donnera tous les invariants différentiels propres du second ordre. Comme invariants algébriques de ces deux formes on peut prendre les racines de l'équation

$$\| \alpha_{rs} - \varrho a_{rs} \| = 0,$$

que nous appellerons *invariants fondamentaux de la forme* φ. On est conduit à ce choix par la réduction du système double α_{rs} à sa forme canonique (Chap. II, § 5). Elle fait ressortir tout naturellement un triple des congruences orthogonales, très importantes pour l'étude géométrique des propriétés, qui généralisent la notion de courbure totale des variétés à deux dimensions.

Nous y reviendrons dans les applications géométriques (Chap. IV, § 8); pour le moment bornons-nous à avertir que nous appelons les congruences du triple *congruences principales* et *directions principales* celles de leur tangentes.

Il est à peine nécessaire d'ajouter que, pour avoir les invariants propres d'une variété ternaire, jusqu'à un ordre $\mu > 2$, il suffira de prendre en considération, à côté des deux formes employées tout-à-l'heure, celles, qui se déduisent par la dérivation covariante des α_{rs} jusqu'à l'ordre $\mu - 2$.

Cela posé pour les invariants propres, examinons maintenant quelques exemples simples du cas général, où l'on a aussi des systèmes associés.

Supposons en premier lieu qu'il s'agisse de deux fonctions U et V associées à une forme quelconque φ à n variables.

Les paramètres différentiels du premier ordre $\Delta_1 U$ et $\Delta_1 V$ et celui, que Beltrami appelle paramètre mixte de U, V

$$\left(\nabla (U, V) = \sum_1^n {}_{rs}\, a^{(rs)}\, U_r V_s \right)$$

épuisent le système des invariants différentiels du premier ordre.

---

*) «Ricerca fondamentale per lo studio di una certa classe di proprietà delle superfici curve», Ann. di Matematica, Ser. I^a, T. III e IV, 1860—61.

Lorsqu'on a affaire à une seule fonction associée U, pour le premier ordre, on n'a évidemment que $\underset{1}{\Delta} U$; pour le deuxième ordre on devra considérer les invariants absolus des trois formes algébriques $\varphi = \sum_1^n {}_r U_r dx_r$, $\psi = \sum_1^n {}_{rs} U_{rs} dx_r dx_s$. En particulier les invariants du couple φ, ψ sous leur forme rationnelle (c'est-à-dire les coefficients de $\varrho^{n-2}, \varrho^{n-2}, \cdots$ l'équation $\frac{1}{a} \| U_{rs} - \varrho a_{rs} \| = 0$) seront respectivement des degrés $1, 2, \cdots, n$ par rapport aux dérivées secondes de U.

L'invariant du premier degré $\sum_1^n {}_{rs} a^{(rs)} U_{rs}$ n'est que le paramètre bien connu $\underset{2}{\Delta} U$ de Beltrami.

Soit maintenant associé à notre forme φ un système simple X_r. Il donne lieu aux invariants du premier ordre, qui appartiennent au système algébrique de trois formes, c'est-à-dire φ, la forme linéaire $\sum_1^3 {}_r X_r dx_r$ et la forme *bilinéaire* dont les coefficients sont les éléments du premier système dérivé selon φ du système des X_r. Parmi ces invariants, il convient de signaler

$$\Theta = \sum_1^n {}_{rs} a^{(rs)} X_{rs},$$

qui se présente fréquemment dans les applications. A ce même point de vue il ne sera pas sans intérêt d'avertir que des transformations faciles conduisent à une seconde expression de Θ, c'est-à-dire

$$\Theta = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_1^n {}_r \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\sqrt{a}\, X^{(r)}\right),$$

qui est plus commode pour les calculs, tandis que l'expression précédente se prête mieux aux déductions théoriques. Dans le cas particulier de deux variables seulement, on peut substituer à la forme bilinéaire, qu'on vient d'indiquer, la forme quadratique aux coefficients $X_{rs} + X_{sr}$, pourvu qu'on y ajoute l'invariant, qui s'obtient en composant le système X_{rs} avec le système contrevariant E (Chap. I, § 3). Son expression est

$$\sum_1^2 {}_{rs} \varepsilon^{(rs)} X_{rs} = \frac{1}{\sqrt{a}} (X_{12} - X_{21}),$$

ou, si l'on veut,

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \left\{ \frac{\partial X_1}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_1} \right\}.$$

D'une façon analogue, pour $n = 3$, il suffit d'associer au système double symétrique $X_{rs} + X_{sr}$, un système simple contrevariant, que nous définissons en posant:

$$2\mu^{(r)} = \sum_{1}^{3}{}_{st}\, \varepsilon^{(rst)} X_{st}.$$

En développant et en tenant compte de la convention faite à l'égard des indices, on trouve pour les $\mu^{(r)}$ les expressions

$$2\mu^{(r)} = \frac{1}{\sqrt{a}} \left\{ \frac{\partial X_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial X_{r+1}}{\partial x_{r+2}} \right\},$$

très-aisées à calculer effectivement dans les applications particulières.

Chapitre IV.

Applications géomètriques.

§ 1.

Étude des variétés à deux dimensions (Géométrie sur une surface): Généralités. — Courbure. — Congruences. — Faisceaux de congruences. — Invariants d'un faisceau. — Théorème de Beltrami.

La théorie des surfaces et des lignes tracées sur une surface, telle qu'elle a été fondée par Gauss s'est maintenant développée de manière à constituer à elle seule un vaste et fécond domaine scientifique. Mais, même dans les meilleures expositions de cette théorie, l'unité de méthode fait défaut: Elle ne ressort pas comme le développement naturel de principes simples et bien déterminés. Le calcul différentiel absolu y conduit au contraire sans aucun effort, en donnant à la théorie une forme aussi simple que possible.

Il conduit aussi à séparer rationnellement la théorie des variétés à deux dimensions, considérées en elles mêmes, de la théorie des surfaces, considérées comme douées d'une forme rigide dans notre espace. La première découle de la considération de la forme différentielle, qui exprime le ds^2 de la variété (*première forme fondamentale*); pour la seconde, il suffit d'associer une autre forme quadratique (*seconde forme fondamentale*, d'après M. Bianchi).

Nous commençons par la première. Soit une variété V_2 définie par l'expression du carré de son élément linéaire

$$ds^2 = \sum_{1}^{2}{}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s \equiv \varphi.$$

Convenons de regarder cette forme comme fondamentale. Si son invariant de Gauss s'annule, nous savons déjà que la variété sera linéaire. Si cet invariant G n'est pas nul, l'association de G à φ donne lieu à tous les invariants propres de la forme, c'est-à-dire à toutes les expressions liées à des propriétés intrinsèques de la variété V_2.

Soient $\lambda_{1/r}$, $\lambda_{2/r}$ les systèmes coordonnés covariants de deux congruences orthogonales quelconques de courbes tracées dans notre variété (congruences [1], [2]). Reprenons, pour $n=2$, les positions générales (6) du Chapitre II. En faisant

$$\varphi_s = \sum_1^2{}^j \gamma_{21j}\,\lambda_{j/s}\,, \tag{1}$$

elles deviennent

$$\lambda_{1/rs} = -\lambda_{2/r}\,\varphi_s\,, \quad \lambda_{2/rs} = \lambda_{1/r}\,\varphi_s\,. \tag{2}$$

Les coefficients de rotation du couple [1], [2] se réduisent dans ce cas à deux seuls algébriquement indépendants; nous pourrons prendre γ_{121}, γ_{212}. Il représentent les courbures géodésiques des lignes 1 et 2 respectivement.

Si l'on pose

$$\bar{\varphi}_r = \sum_1^2{}^s \varepsilon_{rs}\,\varphi^{(s)}\,,$$

la formule (20) du Chap. II peut être remplacée par

$$\sum_1^2{}^{rs} a^{(rs)}\,\bar{\varphi}_{rs} = G. \tag{3}$$

Dans les deux dernières équations (2) considérons les $\lambda_{2/r}$ comme inconnues et immaginons en même temps les $\lambda_{1/r}$ remplacées par leurs valeurs

$$\lambda_{1/r} = \sum_1^2{}^s \varepsilon_{rs}\,\lambda_2^{(s)}\ ^{*)}$$

et les φ_s par celles, qu'on tire des (1). La (3') constitue alors la condition nécessaire et suffisante pour que ces équations et la

$$\sum_1^2{}^r \lambda_{2/r}\,\lambda_2^{(r)} = 1 \tag{4}$$

forment un système complètement intégrable. Si l'on désigne par $\lambda_{2/r}$ les

*) On les obtient en résolvant les deux équations

$$\sum_1^2{}^r \lambda_1^{(r)}\,\lambda_{1/r} = 1, \quad \sum_1^2{}^r \lambda_1^{(r)}\,\lambda_{2/r} = 0,$$

éléments d'une solution particulière de ce système algébrico — différentiel, sa solution générale s'obtient en posant.

$$\lambda_r = \text{sen}\,\alpha\,\lambda_{1/r} + \cos\alpha\,\lambda_{2/r}\,,$$

où α est une constante.

Pour une valeur particulière quelconque de α, les λ_r sont les éléments du système coordonné covariant d'une congruence, dont les lignes forment, en chaque point de V_2, un angle α avec la ligne 2.

Il s'en suit que le système φ_r joue le même rôle pour toutes les congruences, qui rencontrent une congruence donnée sons un angle constant α, quelque soit la valeur de α.

Un tel système de congruences se nomme *faisceau* et φ_r (ou respectivement $\varphi^{(r)}$) s'appelle *système coordonné covariant* (ou *contrevariant*) *du faisceau*.

L'équation (3) représente donc la condition pour qu'un système φ_r donné à l'avance soit le système coordonné covariant d'un faisceau.

Si φ_r et ψ_r sont les systèmes covariants de deux faisceaux, les différences $\varphi_r - \psi_r$ ont une signification géométrique remarquable. Elles sont les dérivées de l'angle, que forment entre elles les lignes de deux congruences déterminées, mais quelconques, des deux faisceaux.

En suivant les règles du § précédent, supposons qu'on ait construit tous les invariants différentiels absolus, qu'on peut obtenir par l'association à φ du système covariant d'une congruence [2]. On aura obtenu, par le fait même, toutes les expressions aptes à représenter les propriétés intrinsèques d'une telle congruence, ou bien encore d'une ligne quelconque, tracée dans la variété V_2.

En opérant, comme on vient de dire, nous trouvons un seul invariant algébrique (ou d'ordre zéro), qui, conformément à (4), est égal à l'unité.

A cause des (2), les invariants différentiels du premier ordre sont les invariants algébriques absolus, communs à la forme fondamentale et aux deux formes linéaires ayant pour coefficients $\lambda_{2/r}$ et φ_r.

Il sont au nombre de deux, par exemple

$$J_1 = \sum_1^2{}_r\, \lambda_2^{(r)}\,\varphi_r = \gamma_{212}\,,$$

$$J_2 = \sum_1^2{}_r\, \varphi^{(r)}\,\varphi_r = \gamma_{121}^2 + \gamma_{212}^2\,.$$

Pour avoir les invariants du second ordre, on devra adjoindre la forme bilinéaire aux coefficients φ_{rs}, ou, ce qui est le même, l'invariant G et la forme quadratique ayant pour coefficients

$$\psi_{rs} = \frac{1}{2}\,(\varphi_{rs} + \varphi_{sr})\,.$$

Parmi les invariants qui en résultent, on doit signaler

$$\vartheta = \sum_1^2 {}_{rs}\, a^{(rs)} \psi_{rs} = \sum_1^2 {}_{rs}\, a^{(rs)} \varphi_{rs}.$$

Enfin, pour obtenir tous les invariants d'un ordre quelconque $\mu > 2$, il faut considérer encore les systèmes dérivés de G et de ψ_{rs} jusqu'à l'ordre $\mu - 2$.

Les invariants propres de la forme fondamentale représentent, avons-nous dit, les propriétés intrinsèques de la variété V_2; de même ceux qui dépendent aussi des φ_r, ψ_{rs} et leurs dérivées, sans contenir toutefois les $\lambda_{2/r}$, se rapportent à des propriétés intrinsèques du faisceau, dont φ_r est le système covariant. Ainsi l'invariant J_2 représente la somme des carrés des courbures géodésiques de deux lignes appartenant à deux congruences orthogonales, mais quelconques, du faisceau. C'est une propriété du faisceau qu'une telle somme ait la même valeur pour un couple quelconque de congruences orthogonales.

De même l'invariant ϑ nous apprend que la différence

$$\frac{\partial \gamma_{212}}{\partial s_2} - \frac{\partial \gamma_{121}}{\partial s_1}$$

ne varie pas avec le couple considéré; lorsqu'elle s'annule (et dans ce cas seulement) toute congruence du faisceau est isotherme. D'ici ressort tout naturellement le théorème de Beltrami: *Si une congruence est isotherme, il en est de même pour toutes les congruences, qui appartiennent avec elle au même faisceau.*

§ 2.

Surfaces de l'espace ordinaire. — Équations fondamentales de la théorie de l'applicabilité. — Formes particulières remarquables. — Généralisation des formules de Gauss et de Codazzi.

Comme il résulte du § 1 du Chapitre précédent, pour déterminer toutes les surfaces, qui admettent une expression donnée pour leur ds^2, il suffit de déterminer tous les systèmes doubles b_{rs}, qui satisfont au système algébrico-différentiel

$$c) \qquad b_{rst} = b_{rts},$$

$$g) \qquad \frac{b}{a} = G,$$

où l'on a posé

$$b = b_{11} b_{22} - b_{12}^2.$$

Après cela les coordonnées y_1, y_2, y_3 des points de la surface, par rapport à un système cartesien orthogonal quelconque, sont les intégrales du système

$$i)\qquad a_{rs} = \sum_1^3{}_h\, y_{k/r}\, y_{h/s},$$

$$(h = 1,2,3;\ r, s = 1,2)$$

$$j)\qquad y_{h/rs} = z_h\, b_{rs},$$

les z_h étant définies par les équations

$$\sum_1^3{}_h\, z_h\, y_{h/r} = 0, \qquad (r = 1, 2)$$

$$\sum_1^2{}_h\, z_h^2 \qquad = 1.$$

Il va sans dire que $y_{h/r}$, $y_{h/rs}$ désignent les derivées covariantes des fonctions inconnues y_h. Le système i), j) est désormais complètement intégrable (car les conditions d'intégrabilité se réduisent précisément aux equations c) et g)). Son intégrale générale dépend de six constantes arbitraires; elles fixent la position des axes coordonnés par rapport à la surface, ou, si l'on veut, la position de la surface par rapport aux axes, lorsqu'on regarde ceux-ci comme donnés et qu'il s'agit de trouver la forme de la surface.

Nous voyons donc qu'à chaque intégrale particulière du système i), j) correspond une unique surface, déterminée à un déplacement rigide près, qui admet la forme φ comme expression du carré de son élément linéaire. Les équations i), j) peuvent être appelées *équations intrinsèques* de la surface. Ces équations, en concours avec c) et g) (qu'on dira *équations fondamentales de la théorie des surfaces*), se prêtent à l'etude des propriétés de la surface, qu'elles définissent beaucoup mieux que l'équation en termes finis, où figurent des éléments étrangers à la surface elle-même.

Les équations (c, g) aussi bien que les (i, j) se transforment convenablement (Chapitre II, § 1) en posant

$$(5)\qquad b_{rs} = \sum_1^2{}_{hk}\, \omega_{hk}\, \lambda_{h/r}\, \lambda_{k/s},$$

où les $\omega_{hk} = \omega_{kh}$ désignent trois, invariants et les $\lambda_{1/r}$, $\lambda_{2/r}$ les systèmes covariants d'un couple orthogonal quelconque.

On démontre que ω_{11}, ω_{22} et ω_{12} mesurent, au signe près, les courbures normales et la torsion géodésique des lignes 1, 2.

En convenant pour un moment de ne pas considérer comme distincts les indices qui différent entre eux par un multiple de 2, les formules c) et g) équivalent respectivement aux suivantes:

$$c_1)\qquad \frac{\partial \omega_{ii}}{\partial s_{i+1}} - \frac{\partial \omega_{ii+1}}{\partial s_{i+2}} = \sum_1^2{}_h \left\{ \omega_{ih}\,\gamma_{ii+2h} + \omega_{i+1h}\,\gamma_{hh+1h+1} \right\}, \qquad (i = 1, 2)$$

$$g_1)\qquad \omega_{11}\,\omega_{22} - \omega_{12}^2 = G.$$

Si nous introduisons six nouvelles inconnues ξ_1, ξ_2, ξ_3; η_1, η_2, η_3 en écrivant simplement (y, ζ) pour un quelconque des systèmes (y_h, ζ_h), les équations i) et j) deviennent

$$i_1)\qquad \begin{cases} \sum_1^3{}_h\, \xi_h^2 = 1, \quad \sum_1^3{}_h\, \eta_h^2 = 1, \quad \sum_1^3{}_h\, \xi_h\,\eta_h = 0, \\ y_r = \xi\,\lambda_{2/r} + \eta\,\lambda_{1/r}, \end{cases}$$

$$j_1)\qquad \begin{cases} \xi_r = \quad\ \eta\,\varphi_r + \zeta \sum_1^2{}_h\, \omega_{2h}\,\lambda_{h/r}, \\ \eta_r = -\,\xi\,\varphi_r + \zeta \sum_1^2{}_h\, \omega_{1h}\,\lambda_{h/r}, \end{cases}$$

étant

$$\zeta = \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}.$$

Les inconnues ξ_1, ξ_2, ξ_3; η_1, η_2, η_3 ne sont pas autre chose que les cosinus de direction des tangentes aux lignes 1, 2; les $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ sont alors les cosinus de la normale à la surface, toujours, bien entendu, par rapport aux axes y_1, y_2, y_3.

Comme il a été enseigné au Chapitre II, il y a un couple $\lambda_{1/r}$, $\lambda_{2/r}$ pour qui les expressions (5) prennent une forme très simple, qui est leur forme canonique. Ce couple correspond aux lignes de courbure de la surface. On a alors $\omega_{12} = 0$, ce qui donne le théorème connu que les lignes de courbure ont leur torsion géodésique nulle; ω_{11}, ω_{22}, changées de signe, sont les courbures principales. Les c_1) et g_1) se réduisent dans ce cas aux formules bien connues de Codazzi et de Gauss.

On peut aussi supposer $\omega_{22} = 0$ (ce qui est loisible toutefois, pour un couple de congruences réelles, seulement lorsque $G \leq 0$). Les lignes de la congruence [2] sont alors asymptotiques; l'équation g_1) définit ω_{12} et les c_1) conduisent à des relations, signalées déjà par M. Raffy.*)

*) «Sur le problème général de la deformation des surfaces», Comptes Rendus, 13 Juin 1892.

Nous devons renvoyer aux «Lezioni etc.», si souvent citées, le lecteur désireux de se rendre complètement compte comment des formules indiquées descendent les théorèmes les plus importants de cette théorie. Il vaut mieux que nous nous arrêtions un moment sur un problème important de la théorie de l'applicabilité, où le calcul différentiel absolu a permis d'aller jusqu'un fond. Ce sera l'objet du § suivant.

§ 3.

Surfaces jouissant de propriétés données. — Quadriques.

Soit donnée une forme φ: Qu'on se propose de reconnaître si, parmi les surfaces, qui admettent la forme φ comme expression de leur ds^2, il en a qui satisfont à certaines conditions fixées à l'avance. Pour cela il suffira d'adjoindre aux équations c_1), g_1); i_1), j_1) celles, qui expriment analytiquement les conditions données. Tout se réduit alors à déterminer les conditions d'intégrabilité d'un tel système. Si on peut y satisfaire, on a par là même les équations dont dépend la recherche des surfaces inconnues. C'est la méthode classique, qui conduit par exemple à décider si, parmi les surfaces, auxquelles convient une expression déterminée pour l'élément linéaire, il y en a de réglées ou à courbure moyenne constante, etc. Nous nous bornons à avertir que les théorèmes connus sur la déformation de telles catégories de surfaces se retrouvent de la façon la plus spontanée en employant nos méthodes.

Nous nous en sommes servi en particulier*) pour reconnaître, s'il existe, et déterminer, lorsqu'il en est ainsi, les surfaces du second dégré non developpables, qui possèdent un élément linéaire donné. Ce problème, qui avait été résolu seulement pour la sphère, est maintenant épuisé pour une quadrique quelconque. On peut de la sorte, par des simples opérations en termes finis, décider si une forme donnée φ peut appartenir comme carré de l'élément linéaire à une surface du second dégré. *Il y a au plus une quadrique, à des mouvements près, qui jouit de cette propriété.* Lorsque il y en a une effectivement, elle reste ainsi déterminée.

§ 4.

Extension de la théorie des surfaces aux espaces linéaires à n dimensions.

Les considérations d'ordre générale, dont il a été question dans les §§, qui précèdent, s'étendent très aisément aux variétés à n dimensions contenues

*) *Ricci* «Sulle teoria intrinseca delle superficie ed in ispecie di quelle di secondo grado», Atti dell' Istituto Veneto, 1895; «Lezioni etc.», Seconde partie, Chap. VI.

dans un espace linéaire S_{n+1}. Il paraît à propos de réserver à de telles variétés le nom d'*hypersurfaces*. On s'en rend compte en se rappelant que les formules c) et g) de ce Chapitre sont un cas particulier ($n=2$) de celles, qu'on a rencontré au Chapitre précédant, pour exprimer qu'une forme φ est de la première classe.

Ou peut déduire des dites formules qu'une hypersurface à n dimensions, dont on connaît l'expression du ds^2, est déterminée de forme (en n'ayant pas égard à la position dans l'espace S_{n+1}) par une seconde forme quadratique différentielle. Si aux coefficients b_{rs} de cette dernière on donne des expressions analogues aux (5), on a les équations fondamentales

$$C)\qquad \frac{\partial \omega_{hl}}{\partial s_j} - \frac{\partial \omega_{hj}}{\partial s_l} = \sum_1^n {}_k\, \omega_{hk}(\gamma_{kjl} - \gamma_{klj}) + \sum_1^n {}_k\, (\omega_{jk}\gamma_{khl} - \omega_{lk}\gamma_{khj}),$$

$$G)\qquad \omega_{hk}\omega_{ij} - \omega_{hj}\omega_{ik} = \sum_1^n {}_{rstu}\, a_{rs,tu}\, \lambda_h^{(r)} \lambda_k^{(s)} \lambda_i^{(t)} \lambda_j^{(u)}.$$

A côté des coordonnées cartesiennes $y_1, y_2, \cdots, y_{n+1}$ des points de l'hypersurface, il convient d'introduire comme inconnues auxiliaires les cosinus de direction des lignes des congruences de référence. En désignant par ξ_{ih} le cosinus de l'angle que la ligne i fait avec l'axe des y_h, les équations intrinsèques d'une hypersurface peuvent se résumer comme il suit

$$\mathrm{I)}\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_1^{n+1} {}_h\, \xi_{ih}\xi_{jh} = \begin{cases} 1, & \text{pour } i=j \\ 0, & \text{pour } i \gtrless j \end{cases} & (i,j=1,2,\cdots,n) \\ \displaystyle y_r = \sum_1^n {}_i\, \xi_i \lambda_{i/r}, & \end{cases}$$

$$\mathrm{II)}\qquad \xi_{i/r} = \sum_1^n {}_j \left(\zeta\omega_{ij} + \sum_1^n {}_l\, \gamma_{ijl}\xi_l \right) \lambda_{j/r}, \qquad (i,r=1,2,\cdots,n)$$

où, à la place de ξ_i, il faut entendre successivement chacune des

$$\xi_{ih}, \qquad (h=1,2,\cdots,n+1)$$

et on a écrit, pour abréger, ζ au lieu de

$$\sqrt{1-\sum_1^n {}_h\, \xi_h^2}.$$

Il est bien clair que $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_{n+1}$ représentent les cosinus directeurs de la normale à l'hypersurface; les γ sont les coefficients de rotation par rapport aux n congruences de référence.

Les invariants ω ont aussi des significations analogues à celles, qu'on a indiqué pour $n = 2$. En prenant les b_{rs} sous leur forme canonique, les congruences correspondantes sont formées, comme il arrive pour $n = 2$, par les lignes de courbure de l'hypersurface. Il va sans dire que dans ce cas les équations E), G); I), II) se simplifient notablément.

§ 5.

Groupes de mouvements dans une variété quelconque.*)

Soit φ l'expression du ds^2 d'une variété V_n. Considérons un mouvement infinitésimal, qui fait subir aux points de la variété un déplacement infiniment petit $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \cdots, \xi^{(n)}$, c'est-à-dire qui fait passer chaque point $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ à la position voisine $\left(x_1 + \xi_1^{(1)}, x_2 + \xi_2^{(2)}, \cdots, x_n + \xi_n^{(n)}\right)$. Nous dirons *rigide* ou sans déformation un tel mouvement, si la forme φ admet la transformation infinitésimale

$$Xf = \sum_1^n {}_r\, \xi^{(r)} \frac{\partial f}{\partial x_r}.$$

Les conditions, auxquelles doivent satisfaire les $\xi^{(r)}$, pour qu'il en soit ainsi, ont été données par M. Killing.**)

Avec les notations du calcul différentiel absolu, elles s'écrivent

$$k) \qquad \xi_{rs} + \xi_{sr} = 0.$$

Soient

$$\xi_r = \varrho\, \lambda_r$$

les expressions canoniques des ξ_r.

La congruence, dont λ_r est le système coordonné covariant, est formée par les trajectoires du mouvement rigide, engendré par la transformation infinitésimale Xf.

En posant dans les k) pour les ξ_r leurs expressions canoniques, on trouve le théorème suivant, qui est une extension naturelle de ce, qui arrive pour les surfaces.

Pour qu'une congruence donnée C dans une variété quelconque V_n résulte des trajectoires d'un mouvement sans déformation, il faut et il suffit:

a) *que tout système de $n-1$ congruences orthogonales entre elles et à C soit canonique* (par rapport à cette dernière).

---

*) *Ricci* «Sui gruppi continui di movimenti in una varietà qualunque a tre dimensioni», Memorie della Società Italiana delle Scienze, Ser. 3ᵃ, T. XII, 1899.

Les résultats de ce mémoire ont été résumés dans deux Notes des Comptes Rendus (16 et 22 Août 1898).

**) Voir le mémoire „Ueber die Grundlagen der Geometrie", Crelle's Journal, Bd. CIX, 1892.

b) *que toute congruence normale à C soit géodésique, ou telle que sa courbure géodésique soit en chaque point perpendiculaire à la ligne de C, passant par le même point.*

c) *que la congruence C soit normale et la famille ∞^1 des hypersurfaces orthogonales soit isotherme.*

Lorsque $n = 3$, en employant le système covariant E (Chap. I, § 3), les équations k) peuvent être remplacées par

$$k_0) \qquad \xi_{rs} = \sum_1^3{}_t \, \varepsilon_{rst} \, \mu^{(t)},$$

où les $\mu^{(r)}$ sont des inconnues auxiliaires, qui forment évidemment un système contrevariant.

Dans la variété V_3, que nous considérons, prenons un triple orthogonal quelconque [1], [2], [3] et introduisons à la place des ξ_r et μ_r les invariants η_i et ϑ_i, définis par les équations

$$\eta_i = \sum_1^3{}_r \, \xi^{(r)} \lambda_{i/r}, \qquad \vartheta_i = \sum_1^3{}_r \, \mu^{(r)} \lambda_{i/r}.$$

Les k_0) deviennent

$$k_0') \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \eta_i}{\partial s_i} &= \sum_1^3{}_h \, \gamma_{ihi} \, \eta_h, \\ \frac{\partial \eta_i}{\partial s_{i+1}} &= \sum_1^3{}_h \, \gamma_{ihi+1} \, \eta_h + \vartheta_{i+2}, \\ \frac{\partial \eta_i}{\partial s_{i+2}} &= \sum_1^3{}_h \, \gamma_{ihi+2} \, \eta_h - \vartheta_{i+1}, \end{aligned} \right. \qquad (i = 1, 2, 3)$$

et on aura les conditions d'intégrabilité (Chap. II, § 2)

$$h) \qquad \frac{\partial \vartheta_i}{\partial s_j} = \sum_1^3{}_h \, \gamma_{ihj} \, \vartheta_h + \gamma_{jj+2} \, \eta_{j+1} - \gamma_{jj+1} \, \eta_{j+2}. \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

§ 6.

Étude complète des groupes de mouvements pour les variétés V_3 à trois dimensions. — Résolution du problème: Reconnaître si une V_3 donnée admet un groupe de mouvements et le déterminer, lorsqu'il existe.

Groupes intransitifs. — Dans une variété V_3 une famille ∞^1 de surfaces V_2 peut être représentée (Chap. II, § 3) par le même système (covariant par exemple) qui représente la congruence de ses trajectoires orthogonales. Soit donc donné un tel système et proposons-nous de reconnaître s'il y a des mouvements rigides dans V_3, qui transforment *chaque* V_2 en elle même. Tout d'abord il est à remarquer que, d'apres ce qui précède, on pourra regarder le problème comme résolu toutes les fois que du mouvement cherché restent déterminées les trajectoires; ce, qui arrivera pour les groupes à un seul paramètre.

Cela posé, regardons, dans les équations k_0'), h) du § précédent, comme congruence [3] celle des trajectoires orthogonales aux surfaces V_2. On aura

(1) $$\eta_3 = 0,$$

et les équations k_0'), pour $i = 3$, nous donneront

(2) $$\sum_1^3{}_h \gamma_{3h3}\, \eta_h = 0,$$

(3) $$\vartheta_1 = \sum_1^3{}_h \gamma_{3h2}\, \eta_h, \qquad \vartheta_2 = -\sum_1^3{}_h \gamma_{3h1}\, \eta_h.$$

Si la (2) n'est pas une identité, prise avec (1), elle nous fournit les rapports des ξ_1, ξ_2, ξ_3 et par conséquent les trajectoires du mouvement cherché, pourvu toutefois qu'il soit possible, c'est-à-dire que les conditions portées par le théorème du § 5 soient satisfaites.

Si, au contraire, la (2) est identiquement verifiée, on a

(4) $$\gamma_{313} = \gamma_{323} = 0,$$

ce qui nous dit (Chap. II, § 3) que la congruence [3] est géodésique. Nous voyons donc que:

Pour qu'une variété V_3 admette un groupe de mouvements rigides à plus qu'un paramètre, qui laisse invariante toute surface d'une famille ∞^1, il faut que ces surfaces soient parallèles.

Remarquons maintenant que, à cause des équations (1) et (3), les fonctions inconnues se réduisent à trois seulement, soit η_1, η_2 et ϑ_3. Comme les équations k_0'), qui restent à considérer, et les h) donnent toutes les dérivées premières de ces trois fonctions, exprimées par les fonctions elles mêmes et par des quantités connues, on a encore:

Le groupe de mouvements rigides, qui laisse invariante toute surface d'une famille ∞^1, dépend au plus de trois paramètres.

Pour épuiser notre recherche, il faut discuter d'une façon complète le système simultané (1), (3), (4), k_0'), h). Un choix convenable du couple [1], [2] rend cette discussion bien aisée. Nous ne pouvons pas cependant la réproduire ici. Parmi les résultats auxquels elle conduit nous nous bornons à citer le suivant:

Si une variété V_3 admet un groupe à trois paramètres de l'espèce considérée tout à l'heure, en un point quelconque de V_3 les directions principales sont données par la normale et par les tangentes à la surface V_2, qui passe par le même point; les invariants principaux de V_3, dont deux coïncident, sont invariants du groupe et gardent par conséquent la même valeur sur chaque V_2.

Groupes transitifs. Voici les résultats obtenus pour ce cas, en partant toujours des équations k_0'), h) du § précédent.

Lorsque V_3 admet un groupe G à plus qu'un paramètre, les invariants principaux de V_3 sont invariants du groupe:

Pour que ce groupe soit transitif, il faut donc que les invariants principaux soient constants. Admettons qu'il en soit ainsi et désignons ces invariants par ω_1, ω_2, ω_3. Il nous faudra distinguer les trois cas suivants:

1°. $$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3;$$

2°. $$\omega_2 = \omega_3, \qquad \omega_1 \neq \omega_2;$$

3°. $$\omega_2 \neq \omega_3, \qquad \omega_3 \neq \omega_1, \qquad \omega_1 \neq \omega_2.$$

Dans le premier cas la variété V_3 est à courbure constante et le groupe G à six paramètres.

Dans le second cas à l'invariant ω_1 correspond une congruence principale [1] unique et déterminée; aux invariants ω_2 et ω_3 toutes les congruences orthogonales à [1]. Le groupe G sera transitif et à 4 paramètres, pourvu que soient encore satisfaites les conditions que voici:

a) la congruence [1] est géodésique; pour toute congruence orthogonale [2], la courbure géodésique est perpendiculaire à la fois aux lignes 1, 2;

b) les coefficients de rotation γ_{132}, γ_{123} ont des valeurs constantes opposées.

Dans le dernier cas, le triple [1], [2], [3] des congruences principales de V_3 est complètement déterminé. Pour que G soit transitif, il faut encore (et il suffit) que les coefficients de rotation du triple soient tous constants. Cette condition vérifiée, le groupe a précisément trois paramètres.

§ 7.

Relations des résultats précédents avec les recherches de Lie et de M. Bianchi.

Les recherches, dont on vient de parler, sont liées intimement avec celles de Lie sur le problème de Riemann-Helmholtz et celles de M. Bianchi sur les espaces à trois dimensions, qui admettent un groupe continu de mouvements *).

M. Bianchi a déterminé, en se rapportant à des variables convenablement choisies, tous les types de groupes de mouvements possibles dans une variété V_3 et les éléments linéaires (exprimés par les mêmes variables), qui leurs correspondent.

Nous venons de nous occuper de la question suivante:

L'élément linéaire d'une variété quelconque V_3 étant donné en coordonnées générales, reconnaître s'il y a des mouvements rigides possibles dans cette variété, et déterminer, lorsqu'il y en a, le groupe, qu'ils forment, par ses équations de définition.

On fixe de la sorte les criteriums, qui permettent de décider si un élément linéaire donné rentre dans un des types de M. Bianchi. Ces caractères d'une nature invariante revêtent parfois une forme géométrique très suggestive.

Nos résultats portent une contribution nouvelle au problème, que Lie appelle de Riemann-Helmholz.

Rappelons pour cela que nous avons considéré au § précédent deux systèmes simples $\xi^{(r)}$ et $\mu^{(r)}$. Lorsque la variété V_3 est euclidéenne et x_1, x_2, x_3 sont des coordonnées cartésiennes orthogonales, les ξ sont les composantes de la translation, les μ les composantes de la rotation, qui correspondent au nouvement rigide infiniment petit, qu'on envisage. D'après le § 4 du premier chapitre, nous pouvons immédiatement former les composantes de ces vecteurs pour l'espace euclidéen en coordonnées générales. Les mêmes expressions sont valables aussi pour une variété quelconque V_3, lorsqu'on se borne au domaine (du premier ordre) d'un point donné, parce que celui-ci fait toujours partie d'un espace linéaire tangent.

Cela posé, les équations de définition du groupe G des mouvements d'une variété donnée, nous apprennent que:

Dans les variétés à courbure constante, et dans ce cas seulement, il existe un mouvement infiniment petit, pour lequel les composantes de translation et celles de rotation prennent, dans un point donné, des valeurs initiales fixées à l'avance.

Nous trouvons ici la signification cinématique précise des paroles de Riemann**) qui contiennent la solution, donnée par lui, au problème, dont il s'agit. Ce sont les paroles suivantes, réproduites aussi dans l'ouvrage de Lie: ***)

*) Voir les Memorie della Societa Italiana delle Scienze, Ser. 3ª, T. XI, 1897.

**) Gesammelte Werke, pag. 264.

***) *Lie-Engel*, Theorie der Transformationsgruppen, Dritter Abschnitt, pag. 289 et suivantes.

Der gemeinsame Charakter dieser Mannigfaltigkeiten, deren Krümmungsmass constant ist, kann auch so ausgedrückt werden, dass sich die Figuren in ihnen ohne Dehnung (ici, remarque Lie, il doit être sous entendu *beliebig*) *bewegen lassen.*

Si nous envisageons maintenant les variétés V_3, qui possèdent un groupe de mouvements G, transitif, mais à 4 paramètres seulement, la translation peut être encore choisie à volonté, mais la rotation doit s'effectuer autour d'un axe déterminé; lorsque le groupe transitif est à trois paramètres il n'est plus possible aucune rotation, tout en restant arbitraire la translation.

Remarquons en terminant que les résultats, qu'on vient d'exposer, répondent complétement, du moins pour les variétés à trois dimensions, à la question, qui a été mise à concours par la Société Jablonowski, pour l'année 1901 *).

Signalons encore cette circonstance, qu'on aurait pu dans la recherche se passer sans inconvénient de la théorie de groupes, bien qu'on ait préféré en adopter le langage pour faire mieux saisir au lecteur l'esprit des résultats et leur connexion avec ceux, qui étaient déjà connus.

Chapitre V.

Applications mécaniques.

§ 1.

Intégrales premières des équations de la dynamique — Intégrales linéaires (ordinaires et particularisées).

Considérons un système matériel à liaisons indépendantes du temps, avec n degrés de liberté. Soit

$$2T = \sum_{1}^{n} {}_{rs}\, a_{rs}\, x_r'\, x_s'$$

l'expression de la force vive du système. (On désigne selon l'usage par un accent les dérivées par rapport au temps t).

Les équations de Lagrange, qui définissent le mouvement du système sous l'action de forces données, sont

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial x_h'}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_h} = X_h, \qquad (h = 1, 2, \cdots, n)$$

---

*) Voir par exemple B. 50, 1898, page 601 de ce même receuil.

où les X_h sont liées aux forces directement appliquées par des relations bien connues.

On reconnaît aisément que, lorsqu'on change les paramètres x_n, les X_h se transforment par covariance.. Introduisons aussi le système réciproque $X^{(h)}$, notre forme fondamentale étant, bien entendu,

$$2\,T dt^2 = \sum_1^n{}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s.$$

En résolvant les équations de Lagrange par rapport aux dérivées secondes des coordonées, on a

$$(1) \qquad x_i'' = X^{(i)} - \sum_1^n{}_{rs} \begin{Bmatrix} rs \\ i \end{Bmatrix} x_r'\, x_s'\text{*)};$$

c'est la forme, qui convient le mieux à notre but.

Soit maintenant f une fonction des x et des x'. Pour que

$$f = \text{const.}$$

soit une intégrale première des équations, il faut et il suffit que $\frac{df}{dt}$, c'est-à-dire

$$\sum_1^n{}_i \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i}\, x_i' + \frac{\partial f}{\partial x_i'}\, x_i'' \right\}$$

s'annule identiquement, lorsqu'on remplace les x_i'' par leurs valeurs (1). La condition pourra donc s'écrire

$$(2) \qquad \frac{df}{dt} = \sum_1^n{}_i \frac{\partial f}{\partial x_i'}\, X^{(i)} + \sum_1^n{}_i \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i}\, x_i' - \frac{\partial f}{\partial x_i'} \sum_1^n{}_{rs} \begin{Bmatrix} rs \\ i \end{Bmatrix} x_r'\, x_s' \right\} \equiv 0.$$

Il est bien connu**) qu'à toute intégrale algébrique (à l'égard des x') du mouvement d'un système, sous l'action de forces données, correspond une intégrale homogène (toujours à l'égard des x') pour le mouvement du même système, sans forces.

C'est ainsi que l'étude de ce cas acquiert une importance toute particulière. Sous forme géométrique il correspond aux intégrales homogènes des géodésiques, car les trajectoires du mouvement en l'absence de forces ne sont autre chose que les géodésiques de la variété V_n, dont $2\,T dt^2$ est l'expression du ds^2.

---

*) Les $\begin{Bmatrix} rs \\ i \end{Bmatrix}$ sont les symboles de Christoffel de seconde espèce; voir Chap. I, § 5.

**) Voir par exemple: *Levi-Civita* «Sugli integrali algebrici delle equazioni dinamiche», Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino, Vol. XXXI, 1896.

Appliquons donc en premier lieu la formule (2), pour exprimer qu'une forme homogène

$$f = \sum_1^n {}_{r_1 r_2 \cdots r_m} c_{r_1 r_2 \cdots r_m} x'_{r_1} x'_{r_2} \cdots x'_{r_m}$$

de degré m, égalée à une constante, donne lieu à une intégrale première des géodésiques. En remarqant que les coefficients de f forment un système covariant symétrique d'ordre m et ayant égard aux formules (20) du Chap. I, on passe immédiatement de (2) (où l'on suppose $X^{(i)} = 0$) à

$$\sum_1^n {}_{r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+1}} c_{r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+1}} x'_{r_1} x'_{r_2} \cdots x'_{r_m} x'_{r_{m+1}} \equiv 0. \tag{3}$$

Le premier système dérivé du système $c_{r_1 r_2 \cdots r_m}$ s'est introduit par lui-même. On peut prévoir dès à présent la simplification, que la dérivation covariante va porter dans ce genre de recherches.

Si l'on ne suppose pas que toutes les X s'annulent à la fois, les conditions pour que $f =$ const. (f étant la forme considérée tout à l'heure) soit une intégrale du système (1) se composent de (3) et de

$$\sum_1^n {}_{r_1 r_2 \cdots r_m} c_{r_1 r_2 \cdots r_m} X^{(r_1)} x'_{r_2} \cdots x'_{r_m} \equiv 0. \tag{4}$$

C'est ce qu'on peut déduire de (2), en remarquant que les termes de différent degré doivent s'annuler séparément et en outre que les coefficients $c_{r_1 r_2 \cdots r_m}$ sont symétriques par rapport aux m indices. De cette même remarque il suit qu'en égalant à zéro les coefficients de chaque terme en (4), on obtient

$$\sum_1^n {}_{r_1} c_{r_1 r_2 \cdots r_m} X^{(r_1)} = 0. \qquad (r_2, r_3, \cdots, r_m = 1, 2, \cdots, n) \tag{4'}$$

Illustrons ces généralités, en discutant les conditions d'existence des intégrales

$$\sum_1^n {}_r c_r x_r' = \text{const.},$$

linéaires (par rapport, peut-on dire, aux composantes des vitesses). L'identité (3) devient

$$\sum_1^n {}_{rs} c_{rs} x_r' x_s' \equiv 0,$$

ou, en développant,

$$c_{rs} + c_{sr} = 0. \qquad (r, s = 1, 2, \cdots, n) \tag{5}$$

S'il s'agit des géodésiques, il n'y a pas d'autres conditions; en général, on doit avoir égard aussi aux relations (4'), qui dépendent des forces appliquées. Elles se réduisent pour notre cas à

$$(6) \qquad \sum_1^n {}_r\, c_r X^{(r)} = 0.$$

Nous avons déjà rencontré le système (5) (Chapitre précédent, § 5); il exprime que l'élément linéaire $\sqrt{2T}\,dt$ de la variété V_n admet la transformation infinitésimale $\sum_1^n {}_r\, c^{(r)} \frac{\partial f}{\partial x_r}$. Ce lien entre les intégrales linéaires des géodésiques et les mouvements sans déformation de la variété correspondante est trop bien connu pour qu'il mérite de s'y arrêter un seul moment.

En mettant le système c_r sous sa forme canonique $c_r = \varrho \lambda_r$, on obtient pour les équations (5) l'interprétation géométrique, qui a été signalée au § cité. La condition (6) prend aussi une signification bien simple; elle exprime que *la congruence canonique d'une intégrale linéaire doit être normale aux lignes de force.* Lorsque ces dernières dérivent d'un potentiel U, c'est-à-dirè, pour $X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}$, on a plus simplement que la congruence canonique doit être équipotentielle.

A cause de leur importance, nous réservons aux intégrales quadratiques $\sum_1^n {}_{rs}\, c_{rs} x_r' x_s' = \text{const.}$ le §, qui va suivre.

Nous voulons maintenant dire encore un mot sur les *intégrales particularisées* ou *équations invariantes.* On entend par là une équation

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n;\ x_1', x_2', \cdots, x_n') = 0,$$

qui est satisfaite pour toute valeur de t, lorsque cela arrive pour l'instant initial. Cela veut dire que la condition $\frac{df}{dt} = 0$ doit être une conséquence des (1) et de l'équation $f = 0$ elle même. Nous sommes ainsi conduits à l'identité

$$(7) \qquad \sum_1^n {}_i \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i' + \frac{\partial f}{\partial x_i'} x_i'' \right\} \equiv Mf,$$

où les x'' s'entendent remplacées par leurs valeurs (1) et le multiplicateur M est une fonction des x et des x' indéterminée *a priori.*

Bornons-nous au cas simple, où f serait une fonction linéaires des x'. Il est alors loisible de supposer que l'équation invariante soit

$$\sum_1^n {}^r \lambda_{n/r}\, x_r' = 0,$$

$\lambda_{n/r}$ étant le système covariant d'une congruence $[n]$ de la variété V_n.

Le premier membre de (7) est le même que dans le cas des intégrales propres. On a donc

$$\sum_1^n {}^{rs} \lambda_{n/rs}\, x_r'\, x_s' + \sum_1^n {}^r X^{(r)} \lambda_{n/r} \equiv M \sum_1^n {}^r \lambda_{n/r}\, x_r'.$$

Nous devons en conclure que le multiplicateur M peut être seulement de la forme $\sum_1^n {}^s \nu_s x_s'$, les coefficients ν étant encore indéterminés, mais fonctions seulement des x. L'identité se traduit dans les équations suivantes:

$$\sum_1^n {}^r X^{(r)} \lambda_{n/r} = 0, \tag{8}$$

$$\lambda_{n/rs} + \lambda_{n/sr} = \nu_r \lambda_{n/s} + \nu_s \lambda_{n/r}. \tag{9}$$

$(r, s = 1, 2, \cdots, n)$

L'équation (8) nous dit que les lignes de force et celles de la congruence $[n]$ se coupent sous angle droit. Comme tout à l'heure, pour des forces conservatives, cela signifie que la congruence $[n]$ est équipotentielle. Pour discuter le systéme (9), on imaginera, bien entendu, associées à $[n]$, $n - 1$ congruences, qui complètent l'ennuple et on posera

$$\omega_i = \sum_1^n {}^r \nu_r \lambda_i^{(r)}.$$

On tire alors des (9) les conditions équivalentes

$$\gamma_{nij} + \gamma_{nji} = \varepsilon_{jn}\, \omega_i + \varepsilon_{in}\, \omega_j, \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n) \tag{9'}$$

où les indéterminées ν se trouvent remplacées par les ω.

Pour $n = 2$, les (9') sont au nombre de trois. Deux servent à déterminer ω_1, ω_2; la troisième se réduit à $\gamma_{211} = 0$, ce qui veut dire que la congruence [1] est géodésique. Mais, à cause de (8), la congruence [1] est celle des lignes de force. Donc, *les problèmes à deux degrés de liberté possèdent une intégrale linéaire particularisée seulement lorsque les lignes de force sont géodésiques. Cette intégrale exprime que la vitesse et la force ont même direction.*

Il ne serait pas sans intérêt d'établir, aussi pour les problèmes à un nombre quelconque de degrés de liberté, les conditions sous lesquelles ils comportent une équation linéaire invariante.

§ 2.

Intégrales quadratiques des systèmes non soumis á forces. — Forme intrinsèque des conditions d'existence. — Hypothèse particulière, qui conduit aux forces vives de M. Stäckel.

Pour qu'un système non soumis à forces, c'est-à-dire les géodésiques de la variété V_n correspondante possèdent l'intégrale quadratique

$$H_1 = \sum_1^n {}_{rs}\, c_{rs} x_r' x_s' = \text{const.},$$

il faut et il suffit, d'après (3), que la forme dérivée $\sum_1^n {}_{rst}\, c_{rst}\, x_r' x_s' x_t'$ soit identiquement nulle. On a ainsi les conditions

(10) $$c_{rst} + c_{str} + c_{trs} = 0. \qquad (r, s, t = 1, 2, \cdots, n)$$

Pour en faire l'étude il convient naturellement d'introduire à la place des c_{rs} leurs expressions canoniques (Chap. II, § 5)

(11) $$c_{rs} = \sum_1^n {}_h\, \varrho_h\, \lambda_{h/r}\, \lambda_{h/s},$$

où les ϱ_h désignent, comme on sait, les racines de l'équation

$$\| c_{rs} - \varrho\, a_{rs} \| = 0.$$

On trouve ainsi

I) $$(\varrho_h - \varrho_i)\, \gamma_{hij} + (\varrho_i - \varrho_j)\, \gamma_{ijh} + (\varrho_j - \varrho_h)\, \gamma_{jhi} = 0, \qquad (h, i, j = 1, 2, \cdots, n;\ h \neq i \neq j)$$

II) $$\frac{\partial \varrho_h}{\partial s_i} = 2\, (\varrho_h - \varrho_i)\, \gamma_{ihh}, \qquad (h, i = 1, 2, \cdots, n)$$

ce qui donne une forme intrinsèque à la question de déterminer tous les types de forces vives, dont les géodésique admettent au moins une intégrale quadratique. Pour obtenir ces types, il faut remonter de I), II) aux expressions des éléments linéaires des variétés V_n, où l'on peut avoir une ennuple de congruences caractérisées par lesdites équations. Les ϱ y figurent comme des indéterminées auxiliaires. En les supposant toutes égales entre elles, les équations I) sont satisfaites identiquement et les II) deviennent $\frac{\partial \varrho_h}{\partial s_i} = 0$, ce qui montre que la valeur commune des ϱ doit être constante. Les invariants γ ne restent aucunement liés par cette hypothèse. Il existe donc, indépendamment de l'ennuple et par conséquent pour toute variété V_n, une intégrale quadratique.

On devait s'y attendre; c'est l'intégrale des forces vives. On tire en effet de (11), en y faisant $\varrho_h = C$, $c_{rs} = C \sum_h \lambda_{h/r} \lambda_{h/s} = C a_{rs}$ et l'intégrale $\mathsf{H}_1 = \text{const.}$ n'est autre chose que $\sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs} x_r' x_s' = \text{const.}$

A l'instar de ce cas bien évident, il parait convenable, pour la recherche des solutions du système I), II), de distinguer les divers cas, qui peuvent se présenter à l'égard des ϱ. On aura donc à considérer séparément le cas, où toutes les ϱ sont distinctes, celui où il y en a seulement $n-1$, etc. en ayant soin de distinguer encore pour chaque cas les divers groupements des coïncidences possibles.

Une telle étude n'a pas encore été abordée, en général. Il serait du plus haut intérêt que la question fût épuisée, mais, à présent elle parait encore assez ardue.

On possède des solutions particulières de notre système. Elles correspondent aux forces vives découvertes par M. Stäckel*) (qui comprennent en particulier les exemples classiques de Hamilton et de Liouville). On les retrouve aisément à partir de I), II) en faisant l'hypothèse particulière que les congruences de l'ennuple de référence soient normales**).

Vu la grande généralité de cette classe de forces vives, on pourrait être tenté de croire qu'elles comprennent toutes les solutions du système I), II). Il en est ainsi évidemment pour $n = 2$ (toute congruence pouvant dans ce cas être regardée comme normale), mais, dès qu'on passe à un plus grand nombre de variables, on reconnait aisément l'existence de types nouveaux de solutions***). La véritable difficulté consiste à les former tous. Le premier pas à faire, dans cette voie, devrait être la intégration du système I), II) dans le cas le plus proche à celui, où

---

*) Voir dans les Comptes Rendus deux notes remarquables de cet auteur (9 Mars 1893 et 7 Octobre 1895). A consulter aussi:

Di Pirro «Sugli integrali primi quadratici delle equazioni della meccanica», Annali di Matematica, Ser. II^a, T. XXIV, 1896;

Stäckel «Ueber die quadratischen Integrale der Differentialgleichungen der Dynamik», ibidem, T. XXV, 1897;

Painlevé «Sur les intégrales quadratiques des équations de la Dynamique», Comptes Rendus, 1er Février 1897.

**) Pour être exact, il faut avertir que l'on suppose d'avance la normalité de toutes les congruences de l'ennuple seulement dans le cas, où toutes les ϱ seraient distinctes. Lorsqu'il y en a quelques unes, qui coïncident, l'hypothèse est un peu moins restrictive. Cfr.

Levi-Civita «Sur les intégrales quadratiques des équations de la mécanique», Comptes Rendus, 22 Février 1897.

***) *Levi-Civita* «Sur une classe de ds^2 à trois variables», Comptes Rendus, 21 Juin 1897.

toutes les ϱ coïncident et l'intégration se fait à première vue. C'est le cas, où deux seulement des ϱ sont distinctes.

Nous signalons au lecteur cette recherche, qui — toute réduction faite — se présente sous un aspect assez simple.

§ 3.

Surfaces, dont les géodésiques possèdent une intégrale quadratique (surfaces de Liouville). — Classification de ces surfaces d'après le nombre des intégrales distinctes*).

Pour $n = 2$ les équations I), considérées tout à l'heure, font défaut et il reste seulement l'autre groupe, qui devient

$$\text{II}')\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \varrho_1}{\partial s_1} = \dfrac{\partial \varrho_2}{\partial s_2} = 0, \\ \dfrac{\partial \varrho_1}{\partial s_2} = 2(\varrho_1 - \varrho_2)\gamma_{211}, \qquad \dfrac{\partial \varrho_2}{\partial s_1} = 2(\varrho_2 - \varrho_1)\gamma_{122}. \end{cases}$$

De celles-ci, en supposant $\varrho_1 \neq \varrho_2$, on tire les conditions d'intégrabilité

$$\text{III})\qquad \frac{\partial \gamma_{211}}{\partial s_1} = \frac{\partial \gamma_{122}}{\partial s_2} = -3\gamma_{211}\gamma_{122}.$$

Chaque couple [1], [2], pour lequel la condition III) soit vérifiée, donne une intégrale quadratique $\mathsf{H}_1 =$ const. (distincte de celle des forces vives) des équations des géodésiques de la surface. Désignons par ϑ l'angle, que les lignes 2 forment avec les lignes d'une congruence géodésique quelconque. On peut aisément reconnaître que l'intégrale $\mathsf{H}_1 =$ const. équivaut à la propriété géométrique suivante: On a tout le long d'une même géodésique

$$\varrho_1 \sin^2\vartheta + \varrho_2 \cos^2\vartheta = \text{const.}$$

On tire des equations III)

$$\frac{\partial \gamma_{211}}{\partial s_1} - \frac{\partial \gamma_{122}}{\partial s_2} = 0,$$

ce qui exprime (Chap. IV, § 1) que le couple [1], [2] appartient à un faisceau isotherme.

Des II') il suit sans difficulté qu'en prenant les lignes du couple [1], [2] comme coordonnées, on peut, par un choix convenable de leurs paramètres u, v, attribuer à la forme fondamentale l'expression

$$\varphi = (\varrho_2 - \varrho_1)(du^2 + dv^2).$$

---

*) *Ricci* «Sulla teoria delle linee geodetiche e dei sistemi isotermi di Liouville», Atti dell' Istituto Veneto, 1894; «Lezioni, etc.», Première partie, Chap. VI, VII.

Comme les II') nous disent encore que ϱ_1 et ϱ_2 ne dépendent que de u et v respectivement, nous avons bien pour φ une forme de Liouville. On remarquera d'autre côté qu' à toute forme de Liouville correspond un couple [1], [2] (les congruences formées par les lignes coordonnées), qui satisfait aux conditions III). Donc, pour que les géodésiques d'une surface possèdent une intégrale première quadratique, il faut et il suffit que l'élément linéaire de la surface soit réductible à la forme de Liouville.

Maintenant se pose d'elle même la question: Reconnaître si un élément linéaire, donné à l'avance, peut être réduit à la forme de Liouville et en combien de manières essentiellement différentes; déterminer ces formes réduites, lorsqu'elles existent. La recherche équivaut naturellement à celle du nombre et des expressions des intégrales quadratiques distinctes, qui appartiennent aux géodésiques d'une forme binaire donnée.

Voici les résultats de la recherche sous la première forme:

1°. *Les surfaces à courbure constante seules possèdent* ∞^4 *systèmes isothermes de Liouville* (On désigne ainsi, pour abréger, tout couple [1], [2], qui satisfait aux conditions III)).

2°. *Les surfaces à courbure variable admettent tout au plus* ∞^2 *systèmes isothermes de Liouville. Il y a effectivement une classe de surfaces, qui jouissent de cette propriété. Ce sont les surfaces applicables sur des surfaces de révolution et ayant en outre les lignes de courbure parallèles.*

3°. *Il existe des surfaces douées de* ∞^1 *systèmes de Liouville, et d'autres encore, qui en possèdent un seul.*

M. Koenigs dans un mémoire, couronné par l'Académie des Sciences de Paris *), s'est occupé d'une question intimement liée à celle, qui vient d'être exposée, mais non identique. Il s'est proposé en effet d'assigner tous les types d'éléments linéaires, qui admettent *au moins deux* systèmes de Liouville. Par cette voie on peut établir aussi quelques uns de résultats précédents (ceux qui se rapportent au nombre de systèmes de Liouville possibles). M. Koenigs les avait énoncés en même temps que M. Ricci.

§ 4.

Transformations des équations de la dynamique.

Le problème (à une transformation de formes différentielles quadratiques près) se pose, d'après M. Painlevé **), sous la forme suivante:

---

*) «Mémoire sur les lignes géodésiques», Mémoires des Savants Étrangers, T. XXXI, 1894.

**) «Sur la transformation des équations de la dynamique», Journal de Liouville, Cinquième Série, tom. X, 1894.

Etant donné un système dynamique (A), *dont les forces ne dépendent pas des vitesses, reconnaître s'il admet des systèmes correspondants* (A_1) *et, dans le cas affirmatif, les déterminer tous.*

On nomme correspondants d'un système (A) tous les systèmes (A_1), dont les forces ne dépendent pas non plus des vitesses et qui ont les mêmes trajectoires de (A).

A l'égard des systèmes correspondants on démontre tout d'abord que, si les forces sont nulles pour un système, le même doit arriver pour ses correspondants. Dans cette hypothèse le problème de la transformation revêt l'aspect géométrique que voici:

Déterminer toutes les variétés V_n, qui peuvent être représentées sur une variété donnée avec conservation des géodésiques, c'est-à-dire de telle sorte qu'à toute géodésique de V_n corresponde dans la représentation encore une géodésique.

Cette question a été étudiée par M. R. Liouville dans son mémoire «Sur les équations de la dynamique» *). Il a établi des résultats généraux bien remarquables, sans donner toutefois une réponse définitive à la question. Peut être n'aurait-elle été possible sans le secours du calcul différentiel absolu. Nous allons donner une idée de la marche, qui a été suivie dans la résolution du problème par cette méthode **).

Soit

$$\varphi = \sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s,$$

l'expression du ds^2 d'une variété V_n donnée,

$$\psi = \sum_1^n {}_{rs}\, \alpha_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

la même expression pour une quelconque des variétés représentables sur V_n avec conservation des géodésiques. On fixe en premier lieu les équations, auxquelles doivent satisfaire les α_{rs}. Elles sont

$$2\mu\alpha_{rst} + 2\mu_t\alpha_{rs} + \mu_s\alpha_{rt} + \mu_r\alpha_{st} = 0,$$

où μ est une inconnue auxiliaire et l'on regarde, bien entendu, φ comme forme fondamentale (μ_r et α_{rst} désignant les systèmes dérivées selon φ de μ et du système α_{rs}).

Appelons a et α les discriminants de φ et ψ et posons

$$A_{rs} = \mu^2\alpha_{rs}.$$

*) Acta Mathematica, T. 19, 1895.

**) *Levi-Civita* «Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche», Annali di Matematica, Ser. II, T. XXIV, 1896.

Des équations précédentes on tire aisément

$$\mu = C\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

(C étant une constante) et

$$A_{rst} + A_{str} + A_{trs} = 0,$$

qui nous disent (§ 2) que

$$\sum_1^n {}_{rs}\, A_{rs}\, x_r'\, x_s' = \text{const.}$$

est une intégrale quadratiques pour les géodésiques de V_n. Substituons maintenant aux α_{rs} leurs expressions canoniques

$$\alpha_{rs} = \sum_1^n {}_h\, \varrho_h\, \lambda_{h/r}\, \lambda_{h/s}.$$

Les équations de condition se transforment dans les suivantes

$$\text{E)} \quad \left\{ \begin{array}{lll} \text{a)} & (\varrho_h - \varrho_i)\, \gamma_{hij} = 0, & (h \neq i \neq j) \\ \text{b)} & 2(\varrho_i - \varrho_j)\, \gamma_{iji} = \dfrac{\partial \varrho_i}{\partial s_j}, & (i \neq j) \\ \text{c)} & \dfrac{\partial(\mu\varrho_i)}{\partial s_j} = 0, & (i \neq j) \\ \text{d)} & \dfrac{\partial(\mu\varrho_i)}{\partial s_i} + \varrho_i \dfrac{\partial \mu}{\partial s_i} = 0. & \end{array} \right. \qquad (h, i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

La forme de ce système nous prévient que le nombre et aussi la nature des équations, qui le composent, dépendent du nombre des racines distinctes de l'équation $\| \alpha_{rs} - \varrho\, a_{rs} \| = 0$ et de leurs ordres de multiplicité.

Supposons d'abord que toutes les ϱ soient distinctes. L'ennuple de référence reste dans ce cas complètement déterminé et, à cause des équations a), les coefficients de rotation à trois indices distincts doivent tous s'annuler.

Il s'en suit (Chap. II, § 3) que toutes les congruences de l'ennuple sont normales, et on est naturellement amené à prendre les correspondantes variétés orthogonales comme coordonnées. Avec un tel système coordonné, l'expression du ds^2 de V_n doit être de la forme

$$\varphi = \sum_1^n {}_i\, \mathsf{H}_i^2\, dx_i^2,$$

les équations a) se réduisent à des identités et les b), c), d) deviennent respectivement:

b$_1$) $$2(\varrho_i - \varrho_j)\frac{\partial \log H_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \varrho_i}{\partial x_j} = 0, \quad (i \neq j)$$

c$_1$) $$\frac{\partial (\mu \varrho_i)}{\partial x_j} = 0, \quad (i \neq j) \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

d$_1$) $$\frac{\partial (\mu \varrho_i)}{\partial x_i} + \varrho_i \frac{\partial \mu}{\partial x_i} = 0.$$

L'intégration de ce système est aisée. On est conduit au résultat suivant:

Désignons par $\psi_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ une fonction quelconque de la seule variable x_i, par C et c deux constantes arbitraires. *Tout élément linéaire, ayant une expression de la forme*

T) $$ds^2 = \sum_1^n {}_i \left(\prod_1^n {}_j |\psi_j - \psi_i| \right) dx_i^2$$

admet les correspondants

$$ds_1^2 = \frac{C}{(\psi_1 + c)(\psi_2 + c) \cdots (\psi_n + c)} \sum_1^n {}_i \frac{1}{\psi_i + c} \left(\prod_1^n {}_j |\psi_j - \psi_i| \right) dx_i^2$$

et ceux-ci seulement. (Dans les factoriels $\prod_1^n {}_j$ on doit exclure le facteur, où l'indice j prendrait la valeur i).

Passons maintenant à l'autre cas extrême, où toutes les ϱ seraient égales. Les a) sont satisfaites identiquement, et les autres équations exigent seulement que μ et la valeur commune C des ϱ soient constantes. Les expressions canoniques des α_{rs} sont $\alpha_{rs} = C a_{rs}$, d'où il suit que la forme ψ n'est que la φ elle même, multipliée par une constante. Il était évident à priori que toute forme φ admet de tels correspondants. M. Painlevé les a appelé*) pour cela correspondants ordinaires. Ce sont seulement les correspondants non-ordinaires, qui peuvent nous intéresser.

Il est bien clair qu'en dehors de ce cas les autres hypothèses possibles à l'égard des ϱ aboutissent à des correspondants non-ordinaires. Chacune de ces hypothèses conduit à des types bien déterminés, qu'on calcule sans difficulté en intégrant les équations E), qui leurs appartiennent. Comme il est arrivé pour le premier type, l'interprétation géométrique met au jour le choix des variables, qui se prêtent mieux à l'intégration du système.

*) Loco cit.

En revenant pour un moment encore sur ce premier cas, il est bon de remarquer que l'intégrale quadratique, dont il a été en général prouvé l'existence, prend la forme

$$\sum_1^n {}^i (\psi_1+c)\cdots(\psi_{i-1}+c)(\psi_{i+1}+c)\cdots(\psi_n+c)\left(\prod_1^n {}^j |\psi_j-\psi_i|\right) x_i'^2 = \text{const.},$$

avec la même remarque que tout à l'heure à l'égard du factoriel.

Comme la valeur du premier membre doit être constante *quelle que soit* c, chacun des coefficients des différentes puissances de c nous donne séparément une intégrale quadratique. Elles sont ici au nombre de n (y compris celle des forces vives) toutes distinctes.

En général leur nombre est égal à celui des ϱ distinctes.

Ainsi qu'il a été fait (§ 3) pour $n=2$, ce ne serait pas sans importance d'établir, du moins pour $n=3$, les caractères invariantifs des variétés, dont l'expression de l'élément linéaire est réductible au type T) (*forme généralisée de Liouville*).

Plus généralement, il ne faut pas oublier que le problème de la transformation, tel qu'il a été énoncé au début de ce §, c'est-à-dire pour des forces non nulles, attend encore d'être résolu. M. Painlevé y a apporté des contributions très-intéressantes, qui épuisent même la question pour $n=2$ *).

Sera-t-il reservé au calcul différentiel absolu d'aller jusqu' au fond? Pour le moment nous ne pouvons qu'en exprimer l'espoir.

Du reste, dans cet ordre de questions, on a ouvert devant soi un très vaste champ de recherche.

Il suffit d'étendre avec M. Stäckel **) l'énoncé du problème de la transformation, en exigeant, non plus que deux systèmes dynamiques (A), (A_1) aient toutes les trajectoires en commun, mais une partie seulement, c'est-à-dire un ensemble de trajectoires, dépendant d'un certain nombre $k(<2n-1)$ de paramètres.

Dans un article, qui paraîtra prochainement, M. Malipiero envisage sous ce point de vue le cas des géodésiques, en présentant quelques remarques non dépourvues d'intérêt.

---

*) «Sur les transformations des équations de la dynamique», Comptes Rendus, 24 Août 1896. Voir aussi deux notes de *M. Viterbi* «Sulla trasformazione delle equazioni della dinamica a due variabili», Rendiconti dell' Accademia dei Lincei, 4 e 18 Febbraio 1900.

**) «Ueber Transformationen von Bewegungen», Göttinger Nachrichten, 1898.

Chapitre VI.

Applications physiques.

§ 1.

Cas de reductibilité à deux variables de l'équation
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$
(Potentiels binaires).

Si, dans l'équation de Laplace en coordonnées cartésiennes

$$\underset{2}{\Delta} u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

on suppose la fonction u indépendante de z, il reste

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

qui définit une classe très étendue de potentiels, gardant la même valeur le long des droites parallèles à l'axe des z (potentiels logarithmiques, d'après M. C. Neumann).

De même, en prenant l'équation de Laplace en coordonnées polaires ϱ, ϑ, φ, on peut supposer u indépendant de φ sans limiter davantage la généralité des solution. En effet, lorsqu'on pose $\frac{\partial u}{\partial \varphi}=0$ dans

$$\frac{1}{\varrho^2 \operatorname{sen} \vartheta}\left\{\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho^2 \operatorname{sen} \vartheta \frac{\partial u}{\partial \varrho}\right)+\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\operatorname{sen} \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right)+\frac{1}{\operatorname{sen} \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right\}=0$$

il ne reste plus aucune trace de φ dans les coefficients. On obtient de la sorte une classe très importante d'intégrales de $\underset{2}{\Delta} u=0$, les potentiels symétriques, qui sont bien connus d'après les recherches de Beltrami*). Ils restent constants sur les cercles $\varrho=$ const., $\vartheta=$ const.

On peut encore dans l'équation ci-dessus supposer u indépendant de ϱ. Les potentiels correspondants

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\operatorname{sen} \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right)+\frac{1}{\operatorname{sen} \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0$$

(aussi généraux, bien que moins importants de ceux, qui précèdent) ont pour lignes équipotentielles les droites issues de l'origine.

Il n'est pas permis de procéder d'une façon analogue à l'égard de ϑ, car, en supposant u indépendant de ϑ, on doit avoir séparément

---

*) Voir par exemple le mémoire «Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche», Memorie della Accademia di Bologna, Ser. IV, T. II, 1881.

$$\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho^2 \frac{\partial u}{\partial \varrho}\right) = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0,$$

et les intégrales de ce système simultané (c'est-à-dire

$$u = \left(c_1 + \frac{c_2}{\varrho}\right)\varphi + \left(c_3 + \frac{c_4}{\varrho}\right),$$

les c désignant des constantes) n'ont pas la même généralité que tout à l'heure.

Ces remarques nous conduisent à poser avec M. Volterra*) la question suivante:

Soit l'équation $\underset{2}{\Delta} u = 0$, transformée en coordonnées curvilignes quelconques x_1, x_2, x_3. En général, lorsqu'on posera $\frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$ dans le premier membre, on ne pourra pas débarasser l'équation réduite de la variable x_3 (ou, si l'on veut, les deux équations $\underset{2}{\Delta} u = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$ ne formeront pas un système complet). Il y a des cas (nous en avons rencontré des exemples bien simples) où une pareille circonstance se présente. *Il faut les déterminer tous.*

A chacun d'eux correspond une classe de potentiels, qui dépendent de deux coordonnées (*potentiels binaires*). Ils donnent lieu dans les applications aux mêmes simplifications que les potentiels logarithmiques ou symétriques: M. Volterra, dans le mémoire cité, a fait cette étude en général.

Il restait à établir si, outre les types connus, il y en avait d'autres et lesquels.

C'est exactement la même question, qu'a été résolue par Riemann**), à l'égard de l'équation de propagation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} + k \underset{2}{\Delta} u = 0 \quad (k \text{ étant une constante}).$$

Mais on ne pouvait songer à adopter la méthode de Riemann, à cause de l'extrême complication des formules. Il fallait ouvrir une brèche, pour se débarasser des matériaux encombrants.

C'est encore le calcul différentiel absolu qui en a fourni les moyens.

Bornons-nous à faire saisir les résultats de la recherche***).

Remarquons pour cela que une classe de potentiels binaires est caractérisée essentiellement par sa *congruence equipotentielle*, c'est-à-dire par la congruence

---

*) «Sopra alcuni problemi della teoria del potenziale», Annali della Scuola Normale di Pisa, 1883.

**) «Commentatio mathematica, qua etc.», Ges. Werke, pag. 370.

***) *Levi-Civita* «Tipi di potenziali, che si possono far dipendere da due sole coordinate», Memorie della Accademia di Torino, Ser. II, T. XLIX, 1899.

$$x_1 = \text{const.}, \qquad x_2 = \text{const.},$$

formée par les lignes, le long desquelles tous les individus de la classe gardent une valeur constante. En effet, lorsqu'on connait cette congruence, il suffit d'associer aux familles $x_1(x, y, z) = \text{const.}$, $x_2(x, y, z) = \text{const.}$ une troisième famille indépendante quelconque $x_3(x, y, z) = \text{const.}$ L'équation, qui définit les potentiels corréspondants, s'obtient en transformant $\underset{2}{\Delta} u = 0$ en coordonnées x_1, x_2, x_3 et en y faisant $\frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$. (L'hypothèse qu'une congruence soit équipotentielle équivaut précisément à ce qu'on peut faire $\frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$ dans $\underset{2}{\Delta} u = 0$, sans être gêné par x_3).

Le problème revient ainsi à déterminer toutes les congruences équipotentielles de notre espace.

Ces congruences (supposées réelles) se partagent dans les quatre catégories, que voici:

1°. Congruences rectilignes isotropes (d'après Ribaucour *);
2°. Congruence des cercles ayant même axe;
3°. Congruences de hélices;
4°. Congruences de spirales.

On en tire une classification correspondante pour les potentiels binaires. Ils sont *isotropes*, *symétriques*, *hélicoïdes*, *ou spirales*.

§ 2.

Des champs vectoriels **).

On a dans un domaine de l'éspace un *champ vectoriel*, lorsque à chaque point P du domaine correspond un vecteur (R) ayant l'origine en P.

Soient y_1, y_2, y_3 les coordonnées cartésiennes de P, Y_1, Y_2, Y_3 les composantes de (R) suivant les axes coordonnés. La loi de correspondance entre les points et les vecteurs du champ s'exprime par ce fait que les composantes Y_1, Y_2, Y_3 de (R) sont des fonctions des coordonnées y_1, y_2, y_3 de son point d'application. On suppose bien entendu qu'il s'agit de fonctions continues et douées de toutes les dérivées, qu'il nous faudra considérer.

---

*) Voir *Bianchi* «Lezioni di geometria differenziale», Chap. X; ou bien encore *Levi-Civita* «Sulle congruenze di curve», Rendiconti della Accademia dei Lincei, 5 Marzo 1899.

**) Pour les généralités sur les champs vectoriels, au point de vue, que nous envisageons ici, on consultera avec profit (outre le traité bien connu de Tait) le mémoire posthume du regretté *Ferraris* «Teoria geometrica dei campi vettoriali», Memorie dell' Accademia di Torino, T. XLVII, 1897 et un mémoire recent de M. *Donati* «Sulle proprietà caratteristiche dei campi vettoriali», Memorie dell' Accademia di Bologna, Ser. V, T. VII, 1898.

Lorsqu'on a affaire à un champ vectoriel, la quantité scalaire

$$\Theta = \frac{\partial Y_1}{\partial y_1} + \frac{\partial Y_2}{\partial y_2} + \frac{\partial Y_3}{\partial y_3} \tag{1}$$

s'introduit naturellement.

On l'appelle *divergence* du champ au point P,

$$\Theta = \mathrm{Div}\,(R).$$

Elle joue presque toujours un rôle important dans les questions physiques. Ainsi par exemple, si le vecteur (R) représente le deplacement du point P dans une déformation élastique, Θ c'est la dilatation cubique de la particule, qui environne le même point. Plus généralement, lorsque (R) est un flux d'une nature quelconque, la condensation au point P est mésurée par Θ.

Si les composantes Y_r sont les dérivées d'une même fonction U (au quel cas nous dirons que la distribution vectorielle considérée est *potentielle*) il resulte évidemment

$$\Theta = \underset{2}{\Delta}\, U. \tag{1'}$$

Il y a encore un vecteur très-intimement lié au champ, le *tourbillon* $2(\omega)$ (*curl* des anglais) de (R). Ses composantes $2\nu_1$, $2\nu_2$, $2\nu_3$ sont données par les formules suivantes:

$$\left\{\begin{aligned} 2\nu_1 &= \frac{\partial Y_3}{\partial y_2} - \frac{\partial Y_2}{\partial y_3}, \\ 2\nu_2 &= \frac{\partial Y_1}{\partial y_3} - \frac{\partial Y_3}{\partial y_1}, \\ 2\nu_3 &= \frac{\partial Y_2}{\partial y_1} - \frac{\partial Y_1}{\partial y_2}. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Quant à l'interprétation physique, envisageons, par exemple, l'image hydrodynamique. Soit (R) la vitesse d'un fluide en mouvement, la rotation des particules est définie par le vecteur (ω). Il est identiquement nul pour les distributions potentielles.

Supposons maintenant que l'espace soit rapporté à des coordonnées curvilignes quelconques x_1, x_2, x_3.

La question de représenter un champ vectoriel et ses éléments se pose d'elle même.*)

On peut définir très facilement le champ par un système simple covariant X_r, dont les éléments se réduisent en coordonnées cartesiennes

---

*) M. *Abraham* dans un article recent, paru dans ce même recueil (B. 52, 1899, pag. 81) s'est occupé aussi de la représentation des champs vectoriels en coordonnées curvilignes. Il se borne toutefois aux coordonnées orthogonales, en employant pour la déduction des formules les méthodes ordinaires.

aux composantes de (R). Nous savons déjà (Chap, I, § 4) comment s'expriment, par les X_r, composantes et projections de (R) selon les lignes coordonnées. Mais, pour obtenir Θ et (ω), il est inutile de passer par l'indermédiaire de ces projections (et de transformations d'intégrales), comme on le fait habituellement. Les principes du calcul différentiel absolu permettent d'y parvenir sur le champ.*)

Il suffit en effet de poser

$$\Theta = \sum_1^3{}_{rs}\, a^{(rs)} X_{rs}, \tag{3}$$

$$2\mu^{(r)} = -\sum_1^3{}_{st}\, \varepsilon^{(rst)} X_{st}\text{**)} \qquad (r = 1, 2, 3). \tag{4}$$

On le démontre en remarquant que Θ est un invariant et que sa valeur en coordonnées cartesiennes y_1, y_2, y_3 $\left(a_{rs} = \varepsilon_{rs},\ X_{rs} = \frac{\partial Y_r}{\partial y_s}\right)$ se réduit précisément a (1). Pour les ditributions potentielles $\left(X_r = \frac{\partial U}{\partial x_r} = U_r\right)$, il résulte $\Theta = \sum_1^3{}_{rs}\, a^{(rs)} U_{rs}$, ce qui est bien la forme générale du paramètre $\underset{2}{\Delta}\, U$. On devait évidemment s'y attendre d'après (1′).

De même le vecteur, défini par le système contrevariant $\mu^{(r)}$ (ou son reciproque μ_r) est bien (ω), car les éléments $\mu^{(r)}$, pour des coordonnées cartésiennes, ne sont pas autre chose que les ν_1, ν_2, ν_3 des formules (2). (Comparez aussi Chap. IV, § 9).

Nous avons déjà remarqué (Chap. III, § 2) qu'on peut donner aux expressions (3) et (4) la forme

$$\Theta = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_1^3{}_r \frac{\partial\left(\sqrt{a}\, X^{(r)}\right)}{\partial x_r}, \tag{3′}$$

$$2\mu^{(r)} = \frac{1}{\sqrt{a}} \left\{\frac{\partial X_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial X_{r+1}}{\partial x_{r+2}}\right\} \qquad (r = 1, 2, 3) \tag{4′}$$

(où l'on doit, bien entendu, regarder comme identiques les valeurs de r,

---

*) La même méthode conduit aussi à traduire presque immédiatement en coordonnées quelconques certaines relations intégrales. C'est le cas par exemple des formules bien connues de Green et de Stokes. Voir, quant à cette dernière: *Ricci* «Del teorema di Stokes in uno spazio qualunque a tre dimensioni e in coordinate generali», Atti dell' Istituto Veneto, 1897.

**) Pour la définition des symboles, voyez Chap. I, § 5.

qui diffèrent entre eux d'un multiple de 3). Ces expressions sont parfois avantageuses pour les calculs.

Dans la théorie de l'élasticité et surtout en électrodynamique on rencontre un vecteur (Ω), lié au vecteur fondamental du champ par la relation

$$(\Omega) = -\text{Curl Curl}\,(R) = -2\,\text{Curl}\,(\omega).$$

Il serait bien aisé d'en calculer le système contrevariant $\mathsf{M}^{(r)}$ par la réitération de la formule (4), mais il est encore plus simple de se rapporter pour un moment à des coordonnées cartésiennes. Les éléments $\mathsf{N}^{(r)} = \mathsf{N}_r$ du système en question (composantes du vecteur (Ω)) sont, d'après (2)

$$\mathsf{N}_r = 2\left\{\frac{\partial v_{r+1}}{\partial y_{r+2}} - \frac{\partial v_{r+2}}{\partial y_{r+1}}\right\} = \frac{\partial}{\partial y_{r+2}}\left\{\frac{\partial Y_r}{\partial y_{r+2}} - \frac{\partial Y_{r+2}}{\partial y_r}\right\}$$
$$- \frac{\partial}{\partial y_{r+1}}\left\{\frac{\partial Y_{r+1}}{\partial y_r} - \frac{\partial Y_r}{\partial y_{r+1}}\right\},$$

ce qui peut s'écrire

$$\mathsf{N}_r = \sum_1^3{}_p \frac{\partial^2 Y_r}{\partial y_p^2} - \frac{\partial}{\partial y_r}\sum_1^3{}_p \frac{\partial Y_p}{\partial y_p} = \sum_1^3{}_p \frac{\partial^2 Y_r}{\partial y_p^2} - \frac{\partial \Theta}{\partial y_r}. \tag{5}$$

Si maintenant on pose

$$\mathsf{M}_r = \sum_1^3{}_{pq}\, a^{(pq)} X_{rpq} - \frac{\partial \Theta}{\partial x_r}, \tag{5'}$$

on voit tout de suite que les M_r, pour des coordonnées cartésiennes, sont identiques aux N_r. Le système (5′) est bien covariant; c'est donc le système cherché.

§ 3.

Exemples divers. — Équations en condonnées générales de l'électrodynamique, de la théorie de la chaleur et de l'élasticité.

Électrodynamique. Dans un champ électromagnétique, représentons par deux vecteurs (F_e), (F_m) les forces électrique et magnétique correspondant à chaque point P du champ.

Ces forces sont en général variables avec le temps. Nous désignerons, comme d'habitude, par $\frac{\partial (F_e)}{\partial t}$ le vecteur, dont les composantes sont les dérivées des composantes de (F_e), par rapport au temps t, de même pour (F_m).

Cela posé, les équations indéfinies pour un diélectrique homogène, isotrope, en repos s'écrivent d'après Hertz:

$$(6) \qquad A\mu\,\frac{\partial(F_m)}{\partial t} = \mathrm{Curl}\,(F_e),$$

$$(7) \qquad A\varepsilon\,\frac{\partial(F_e)}{\partial t} = -\,\mathrm{Curl}\,(F_m),$$

A, μ, ε étant des constantes.

Nous pouvons les traduire en forme explicite, tout en adoptant des coordonnées curvilignes quelconques x_1, x_2, x_3. Il suffit d'avoir recours aux formules du § précédent. Introduisons pour cela les systèmes covariants X_r et L_r des deux vecteurs (F_e), (F_m). Les équations (6) et (7) développées deviennent

$$(6') \qquad A\mu\,\frac{\partial L_r}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{a}}\left\{\frac{\partial X_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial X_{r+1}}{\partial x_{r+2}}\right\},$$

$$(7') \qquad A\varepsilon\,\frac{\partial X_r}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{a}}\left\{\frac{\partial L_{r+1}}{\partial x_{r+2}} - \frac{\partial L_{r+2}}{\partial x_{r+1}}\right\}.$$

Il peut être utile (pour l'étude des vibrations, par exemple) d'avoir séparément les lois de variation de chacun des deux vecteurs (F_e), (F_m). C'est ce qu'on peut déduire par la combinaison des équations (6) et (7), en éliminant successivement (F_e) et (F_m). On trouve de la sorte

$$A^2\mu\varepsilon\,\frac{\partial^2(F_m)}{\partial t^2} = A\varepsilon\,\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{Curl}\,(F_e) = A\varepsilon\,\mathrm{Curl}\,\frac{\partial(F_e)}{\partial t} = -\,\mathrm{Curl}\,\mathrm{Curl}\,(F_m);$$

de même

$$A^2\mu\varepsilon\,\frac{\partial^2(F_e)}{\partial t^2} = -\,\mathrm{Curl}\,\mathrm{Curl}\,(F_e),$$

En posant

$$\Theta_e = \mathrm{Div}\,(F_e),$$
$$\Theta_m = \mathrm{Div}\,(F_m),$$

les formules (5′) nous conduisent aux relations suivantes:

$$(6'') \qquad A^2\mu\varepsilon\,\frac{\partial^2 L_r}{\partial t^2} = \sum_1^3{}_{pq}\, a^{(pq)}\, L_{rpq} - \frac{\partial\Theta_m}{\partial x_r},$$

$$(7'') \qquad A^2\mu\varepsilon\,\frac{\partial^2 X_r}{\partial t^2} = \sum_1^3{}_{pq}\, a^{(pq)}\, X_{rpq} - \frac{\partial\Theta_e}{\partial x_r}.$$

Pour l'éther on a en particulier

$$\begin{cases} \mu = \varepsilon = 1, \\ \Theta_m = \Theta_e = 0. \end{cases}$$

On devrait maintenant traduire en coordonnées générales les conditions aux limites, puis, en introduisant les polarisations et le courant, considérer les cas des diélectriques isotropes et des conducteurs.

De même il serait intéressant de présenter quelques applications des formules générales, que nous venons d'établir. Mais cela nous entraînerait trop loin. Ici nous devons nous borner à de simples indications nécessaires pour orienter le lecteur.

Chaleur. Le mouvement de la chaleur dans les corps conducteurs, lorsqu'on néglige à la fois les phénomènes d'absorption et le travail mécanique, est régi par l'équation

$$C\varrho \frac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{Div}\,(\mathfrak{F})\,; \tag{8}$$

C et ϱ représentent respectivement la chaleur spécifique et la densité, T la température, $(\mathfrak{F})$ le flux de la chaleur, qui correspondent au point envisagé dans le conducteur à l'instant t.

Le vecteur $(\mathfrak{F})$ est défini dans les corps isotropes par ce fait que sa composante suivant une direction quelconque est proportionnelle à la dérivée de la température T dans la même direction. On aura donc, en introduisant des coordonnées cartésiennes y_1, y_2, y_3 et les relatives composantes Y_1, Y_2, Y_3 de $(\mathfrak{F})$,

$$Y_r = c\,\frac{\partial T}{\partial y_r}, \qquad (r = 1, 2, 3) \tag{9}$$

où le facteur c peut dépendre des coordonnées y_1, y_2, y_3.

Passons maintenant à des coordonnées quelconques. On aura bien pour le système covariant X_r de $(\mathfrak{F})$

$$X_r = c\,\frac{\partial T}{\partial x_r} = c\,T_r\,,$$

par conséquent, en nous servant de (3'),

$$C\varrho \frac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{Div}\,(\mathfrak{F}) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_1^3{}_r \frac{\partial}{\partial x_r}\left(c\sqrt{a}\,\frac{\partial T}{\partial x_r}\right). \tag{8'}$$

Lorsque c est constant, on a

$$C\varrho \frac{\partial T}{\partial t} = c\,\underset{2}{\Delta}\,T\,.$$

C'est un résultat bien connu.

Considérons plus généralement le cas d'un conducteur quelconque. Les relations (9), entre les composantes du flux et les dérivées de la température, doivent être remplacées par les suivantes:

$$Y^{(r)} = \sum_1^3{}_p\, c^{(rp)}\,\frac{\partial T}{\partial y_p}\,, \tag{9'}$$

où les $c^{(rp)} = c^{(pr)}$ (*coefficients de conductivité*) peuvent être des fonctions quelconques des y.

Ici encore il est bien aisé de traduire l'équation (8) en coordonnées générales. Définissons en effet un système contrevariant double $c^{(rp)}$ par la condition que ses éléments se réduisent précisément aux coefficients de conductivité pour les variables y.

Le système contrevariant de $(\mathfrak{F})$ pourra se représenter par

$$X^{(r)} = \sum_1^3{}_p\, c^{(pr)} T_p .$$

(La raison en est toujours la même; c'est-à-dire le système est contrevariant et coïncide avec $Y^{(r)} = Y_r$ pour les coordonnées y).

Prenons maintenant Div $(\mathfrak{F})$ sous la forme (3') et nous aurons

$$(8'') \qquad C\varrho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_1^3{}_r \frac{\partial}{\partial x_r} \left\{ \sqrt{a} \sum_1^3{}_p\, c^{(pr)} \frac{\partial T}{\partial x_p} \right\},$$

qui est l'expression developpée de (8) dans le cas le plus général.

Lorsqu'on suppose le conducteur homogène, les coefficients de conductivité sont des constantes, mais il n'en est pas ainsi en général des $c^{(pr)}$ se rapportant à des coordonnées quelconque; par conséquent on ne peut pas les faire sortir du signe de dérivation dans le second membre de (8''). Il convient plutôt de revenir à l'expression, pour ainsi dire théorique, du Div $(\mathfrak{F})$, c'est-à-dire

$$\sum_1{}_{rs}\, a_{rs} X^{(rs)} .$$

Comme, à cause de l'homogéneité, les dérivées par rapport aux y des coefficients de conductivité s'annulent à la fois, il en sera de même des dérivées *contrevariantes* des $c^{(pr)}$. La dérivation de .

$$X^{(r)} = \sum_1^3{}_p\, c^{(rp)} T_p$$

donne pourtant

$$X^{(rs)} = \sum_1^r{}_{pq}\, c^{(rp)} a^{(qs)} T_{pq},$$

d'où

$$\text{Div}\,(\mathfrak{F}) = \sum_1^3{}_{rspq}\, a_{rs} a^{(qs)} c^{(rp)} T_{pq} = \sum_1^3{}_{pq}\, c^{(pq)} T_{pq},$$

et enfin

$$C\varrho \frac{\partial T}{\partial t} = \sum_1^3{}_{pq} c^{(pq)} T_{pq}.^{*)}$$

Cette équation assez simple s'applique donc aux conducteurs homogènes, mais d'une structure moléculaire quelconque.

Élasticité. Si u_r sont les composantes suivant les axes y_r du déplacement des points d'un milieu élastique, la déformation, qui en résulte dépend, comme on sait, des six quantités

$$(10) \qquad 2\alpha_{rs} = \frac{\partial u_r}{\partial y_s} + \frac{\partial u_s}{\partial y_r} \qquad (r, s = 1, 2, 3)$$

(α_{rr} est la dilatation linéaire pour la direction y_r, $\alpha_{r+1\,r+2}$ c'est un glissement, ou, si l'on veut, la dilatation angulaire des deux directions y_{r+1}, y_{r+2}).

Le potentiel des forces élastiques est une fonction 2Π des α_{rs} quadratique et homogène. Posons

$$2\Pi = \sum_1^3{}_{rspq} c^{(rspq)} \alpha_{rs} \alpha_{pq},$$

les coefficients d'élasticité $c^{(rspq)}$ $(= c^{(srpq)} = c^{(pqrs)}$ et leurs conséquences) pouvant dépendre des coordonnées y.

Si on désigne par Y_r (ou $Y^{(r)}$) les composantes de la force (F), qui agit sur l'unité de masse, par ϱ la densité et on pose encore

$$(11) \qquad \Pi^{(rs)} = \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_{rs}} = \sum_1^3{}_{pq} c^{(rspq)} \alpha_{pq},$$

les équations indéfinies de l'équilibre élastique s'écrivent:

$$(12) \qquad \sum_1^3{}_s \frac{\partial \Pi^{(rs)}}{\partial y_s} = \varrho Y^{(s)}. \qquad (r = 1, 2, 3)$$

Il est bien aisé de les présenter sous une forme valable pour des coordonnées quelconques x_1, x_2, x_3. Regardons à ce but u_r, $c^{(rspq)}$ comme les éléments, se rapportant en général aux coordonnées envisagées, de deux systèmes: simple covariant le premier, contrevariant du quatrième ordre le second.

---

*) On peut aussi justifier ce résultat par la simple remarque que les deux membres sont des invariants, et leur égalité est manifeste (d'après (8″) et l'homogénéité du conducteur) en se rapportant à des coordonnées cartésiennes.

Si l'on fait

$$(10') \qquad 2\alpha_{rs} = u_{rs} + u_{sr},$$

les (11) nous définissent un système double contrevariant $\Pi^{(rs)}$.

En représentant encore par $X^{(r)}$ le système contrevariant de la force (F), les équations démandées seront

$$(11') \qquad \sum_{\nu}^{3} {}_{js} a_{js} \Pi^{(rsj)} = \varrho X^{(r)} . \qquad (r = 1, 2, 3)$$

C'est bien évident, car la forme même en montre la nature invariante et d'autre part on retrouve les équations (12), lorsqu'on suppose les coordonnées cartésiennes orthogonales.

Ce n'est pas la place ici d'aller plus loin, mais nous ne pouvons passer sous silence que la théorie de l'élasticité est peut-être une de celle, où les méthodes du calcul différentiel absolu sont appelées a rendre les meilleurs services.*)

Padoue, Décembre 1899.

---

*) On consultera à ce propos: Riccí «Lezioni sulla teoria dell' elasticità», qui paraîtront prochaînement.