Variétés différentielles et champs de tenseurs.

Bahram Houchmandzadeh
Université Joseph Fourier, Grenoble.

23 août 2005

Table des matières

1. Introduction. **4**

2. Back to basics. **6**

3. Connexions affines. **12**

4. Dérivation covariante. **17**

5. La courbure d'une variété. **20**

6. Torsion d'une variété. **28**

7. Les géodésiques. **31**

7.1. Transport parrallèle du vecteur tangente. 31

7.2. Distance minimum entre deux points. 34

8. Ajouter un métrique. **38**

A. Théorie algébrique des tenseurs. **39**

A.1. Les formes linéaires et l'espace dual. 39

A.2. Les tenseurs. 41

B. Exemples de connexions affines dans un espace euclidien. 43

B.1. Connexion affine de coordonnées curvilignes. . . . 43

B.2. Généralisation. 44

B.3. Généralisation de généralisation. 46

C. Les formes différentielles. 48

D. Connexion sphérique. 50

E. La courbure d'une connexion sphérique. 51

1. Introduction.

Le titre de ce document peut paraitre intimidant. Il ne s'agit cependandant que de redéfinir et généraliser les concepts de géométrie que nous possédons déjà : points, vecteurs, tangentes, parallèles, distances... Il y a beaucoup de raison de vouloire généraliser la géometrie habituelle, la principale étant que nous *vivons* dans un monde où justement la géometrie est non-euclidienne. Par ailleurs, énormément de problèmes plus "classiques" de physique et de mécanique se ramènent à des problèmes de géométrie généralisée. Par exemple, vous connaissez déjà la formulation Lagrangienne de la mécanique : une particule "choisit" la trajéctoire qui minimise une certaine intégrale. En terme géometrique, la trajectoire de la particule est un géodésique (le chemin le plus court entre deux points) dans un espace où nous avons redéfinit la notion de distance. Disposer de l'interprétation géomtrique nous permet de jeter un regard nouveau sur la plupart des théories que nous connaissons.

Comme vous le savez déjà, la géometrie habituelle, Euclidienne, n'est qu'un cas particulier parmis toutes les géometries que l'on peut définir. L'histoire de cette branche de mathématique commence avec les efforts intenses des mathematiciens de prouver (plutot que d'admettre) le cinquième postulat d'Euclide : "d'un point à l'extérieur d'une droite, nous ne pouvons tracer qu'une seule droite parallèle à la première". Beaucoup de mathématiciens sentaient que ce postulat était de trop et que l'on pourrait le démontrer à partir des quatre précédents. Tout leurs efforts ont pourtant échoué pendant environ deux mille ans. Le mathématicien russe Lobachevski (environ 1820) prit un chemin détourné et essaya de démontrer le postulat par l'absurde : supposons que l'on puisse tracer une *infinité* de droite parallèle, et voyons quand est ce que cela nous mène à une contradiction. Il se trouve cependant que cela ne mène à aucune contradiction et ce fut le premier exemple de géométrie non-euclidienne. Vers 1850, Riemann[1] donna une formulation extrémement générale de la géometrie qui est le fondement de notre compréhension actuelle. Ces géometries ont eu leurs heures de gloire après la formulation de la relativité générale par Einstein en 1916. Elie Cartan, dans un article de 1923[2] en donne un exposé d'une très grande beauté. Dans ce document, je suivrai essentiellement l'article de Cartan comme fil directeur.

Dans ce manuscrit, j'accorderai peu de place à la définition exacte et rigoureuse de beacoup de concepts, et ceci pour plusieurs raisons : (i) cela augmenterai de façon considérable le volume de ce texte ; (ii) j'aimerai emmener le lecteur le plus rapidement vers les beautés de cette théorie. A s'attarder sur le chemin pour démontrer les théorèmes d'existences et visiter les précautions qu'il faut prendre pour ne pas être damnés par le fantôme de Bourbaki, on perd de vue le but. Je préfère de loin illustrer les concepts à l'aide d'exemples.

---

[1] Riemann est un mathématicien qui a peu publié mais qui à chaque fois a révolutionné le domaine auquel il a consacré son attention. Ceci est la cas de la théorie des fonctions analytiques ; la théorie des nombres et le "nombre" de nombres premiers ; la géometrie. La géometrie non-euclidienne avait été abordée mais non publiée par Gauss lui même. Rieman a occupé le chair de mathématique de Gauss à l'université de Gottingen après le décès de ce dernier.

[2] *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (première partie).* Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure Sér. 3, 40 (1923), p. 325-412. Cet article et les deux suivants sont disponible sur *numdam* : www.numdam.org. Elie Cartan est très connu (entre autre) pour ces travaux sur les formes différentielles et l'algèbre extérieur.

2. Back to basics.

Le point de départ des géométries non-enclidiennes est une constatation simple : prenons les habitants d'un monde à deux dimensions vivant sur un plan. Ils n'aurait pas beacoup de mal à formuler la géométrie comme nous le faisons nous. Prenons maintenant le cas des habitants d'une tôle ondulée. Pour nous qui les regardons d'une dimension supérieure, il est évident que leur monde n'est pas plat. Mais comment pourrait ils le déduire eux ? Ils pourrait élaborer également une géometrie (qu'est ce un point, une droite, ...) et ensuite effectuer des mesures "de l'intérieur", comme par exemple la somme des angles d'un triangle et de la, en déduire le genre du monde dans lequel ils vivent. Il n'y a aucune raison de ne pas généraliser cet approche aux dimensions supérieures et essayer de déterminer dans quel genre de monde nous vivons, nous.

Variétés differentielles. Il nous faut revisiter nos notions intuitives de géométrie. La première étape est de se donner un ensemble de points $\mathcal{M}$. Nous enrichissons ensuite cet ensemble en y définissant une topologie. Cela veut essentiellement dire que nous sommes capable de définir le *voisinage* d'un point P[1]. En terme poétique, les points de $\mathcal{M}$ ne sont pas isolés les uns des autres mais forment

[1] Nous pouvons faire cela de façon assez abstraite sans faire appel à la notion de *distance* qui viendra plus tard. Il faut définir pour cela les *ouverts* et les *fermés.* Nous n'avons pas besoin de rentrer plus dans le détail, notre intuition de voisinage d'un point nous suffit pour l'instant.

un tissu. La topologie nous donne également accès au concept de la continuité d'une fonction f qui associe aux points de $\mathcal{M}$ des nombres réels ($f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$). Très grossièrement, f est continu en P si pour deux points P et Q, [$f(P)$ et $f(Q)$ sont voisin dans $\mathbb{R}$] implique [les deux points eux même sont voisin dans $\mathcal{M}$] [2].

Enfin, dernier étape, nous disons que $\mathcal{M}$ est une variété de dimension n si nous pouvons le munir d'un système de coordonnées, c'est à dire si nous pouvons repérer de façon *unique* chaque point de $\mathcal{M}$ par un $n-$tuplet de $\mathbb{R}^n$ [3]. Nous noterons les coordonnées d'un point par $(x^1, x^2, ..., x^n)$. Il est d'usage d'utiliser des exposants et non des indices, qui sont reservés à d'autres usages. L'exemple le plus simple est notre esapce euclidien classique à trois dimension munie des coordonnées cartésiennes (x, y, z) ; la tôle ondulée dont la surface est donnée par $z = \sin x$ est une variété à deux dimensions, chaque point pouvant être repéré par un couple (x, y) ; la sphère en est un autre exemple.

Il est évident que le choix du système de coordonées n'est pas unique. Si l'on se donne n fonctions $y^i = y^i(x^1, ..., x^n)$, alors un voisinage du point P peut également être décrit par les coordonnées $(y^1, y^2, ...y^n)$. Pour que le changement de coordonnées soit valable, ll suffit que le Jacobien $|\partial(y^1, ...y^n)/\partial(x^1, ..., x^n)| \neq 0$. Par exemple,

[2] Plus exactement, soit $x_0 = f(P)$. f est continu en P si pour un voisinage quelconque V de x_0, on peut trouver un voisinage U de P tel que $f^{-1}(V) \subset U$. Cela revient à la définition habituelle $\forall \varepsilon$, $\exists \eta$ que nous connaissons si nous avions définit une distance entre points dans $\mathcal{M}$.

[3] Il est possible que nous ne puissions pas avoir un seul système de coordonnées pour couvrir tous les points de la variété, et que l'on soit obligé d'utiliser plusieurs systèmes qui se recouvrent partiellement. Par exemple, les points à la surface d'une sphère ne sont pas reperés par leurs coodoonées (x, y) de la projection sur un plan. Chaque couple (x, y) repère deux points de la sphère. Il faut alors disposer d'une règle nous indiquant comment passer d'une couverture à l'autre.

nous pouvons repérer les points du plan par leur coordonnées cartesiennes (x,y) ou leur coordonnées polaires (r,θ). Comme $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, le Jacobien $J = |\partial(x,y)/\partial(r,\theta)| = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$. Le changement de coordonnées est valable partout où $r \neq 0$. Par contre, le changement de coordonnées $\xi = x$, $\eta = x^2$n'est pas valable, puisqu'en se donnant un couple (ξ,η), nous ne pouvons pas determiner de façon unique un couple (x,y) correspondent. Vous pouvez vérifier que le jacobien est bien nul dans ce cas. Ce dernier changement de coordonnées n'était pas valable puisqu'il faisait correspondre à une infinité de points (x,y) un seul point (ξ,η). La condition "Jacobien non nul" nous protège de ces changements de variables[4].

Les vecteurs. A chaque point P de l'espace $\mathcal{M}$, nous pouvons associer des vecteurs. Les vecteurs associés à un point forment bien sur un espace vectoriel . Si u et v sont deux vecteurs de cet espace, alors nous pouvons définir λuet $u+v$ qui sont également des vecteurs associés au point P avec les propriétés usuelles des vecteurs. L'espace vectoriel en question s'appelle espace tangent en P et se note $\mathcal{M}_P$. Si $\mathcal{M}$ est l'espace euclidien habituel, alors $\mathcal{M}_P$ est l'ensemble de tous les vecteurs dont l'origine est le point P. Si $\mathcal{M}$ est la surface d'une sphère, alors les vecteurs du $\mathcal{M}_P$ sont tous contenu dans le plan tangente à la sphère au point P.

Les vecteurs nous permettent de passer d'un point P à un point Q voisin : $Q = P + u$ ($u \in \mathcal{M}_P$). Nous devons prendre quelques précautions. Dans l'espace euclidien auquel nous sommes habitués, on peut passer de n'importe quel point à n'importe quel autre à l'aide d'un vecteur. Quand l'espace est courbe cependant, nous n'avons

[4] Ceci s'appelle le théorème de la fonction implicite, qui joue un rôle fondamental en analyse.

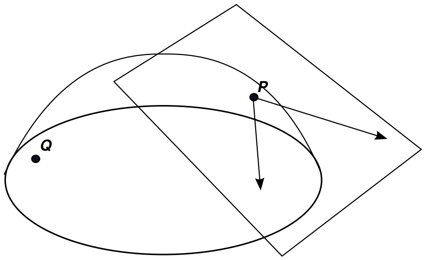

FIG. 2.1.: La variété constitué des points d'une sphère. L'espace tangent au point P est constitué des vecteurs contenus dans le plan tangente. Notez que le vecteur PQ n'appartient pas à l'espace tangent $\mathcal{M}_P$.

aucun garantit que le vecteur PQ appartiennent à l'espace tangent en P. Nous devons nous contenter du voisinage immédiat du point P.

L'ajout d'une structure d'espace vectoriel en chaque point d'une variété peut paraître un peu ad-hoc, un peu comme si nous avions inventé de toute pièce des objets totalement nouveaux. Une autre façon, peut-être plus familier d'ajouter la structure vectorielle est de considérer l'ensemble des courbes sur la variété, c'est à dire des fonctions γ qui associent à un nombre réél un point de la variété : $\gamma : \mathbb{R} \to \mathcal{M}$. Considérons maintenant les courbes qui passent par P en $t = 0$ (t est ici la variable que nous utilisons pour paramétrer la courbe) par exemple : $\gamma(0) = P$. Alors, ce que nous appelons les vecteurs tangentes en P sont simplement les $d\gamma/dt|_{t=0}$. Pour passer d'un point P à un point voisin Q, il suffit de prendre une courbe γ qui passe par ces deux points : $\gamma(0) = P$, $\gamma(dt) = Q$ et alors $Q = P + d\gamma/dt|_{t=0}dt$. Nous avons pris le vecteur $u = d\gamma/dt|_{t=0}$, nous l'avons multiplié par le scalaire dt et cela nous a permis de passer du point P au point Q : $Q = P + dt\,u$. A vrai dire, il n'y a pas à faire de disctinction entre le concept de vecteur comme "droite avec une flèche basé en P" et "dérivée d'une courbe passant par P prise en ce point". Dans les deux cas, les vecteurs nous permettent de passer d'un point à un point voisin.

Prenons le cas d'une variété à n dimensions $\mathcal{M}_P$ muni des coordonnées $x = (x^1, ..., x^n)$ et le point P de coordonnées $x_0 = (x_0^1, ..., x_0^n)$. Considérons les n courbes $\gamma_i(t) = (x_0^1, .., x_0^i + t, ..., x_0^n)$ $(i = 1, ..., n)$. Dans ce cas, les n vecteurs $e_i = d\gamma_i/dt|_{t=0} = (0, ...1, ...0)$ appartiennent à l'espace tangent $\mathcal{M}_P$ et n'importe quel autre vecteur de cet espace est une combinaison linéaire de ces derniers. Nous prendrons dans la suite de ce texte *ces vecteurs* en particulier comme la base de l'espace tangent en P (Fig.2.2). Nous les noterons, en notations abrégé, $\partial/\partial x^i$ Il va de soit que nous savons effectuer des changements de base. Par exemple, puisque $e_x = \partial/\partial x = (\partial/\partial r)(\partial r/\partial x) + (\partial/\partial\theta)(\partial\theta/\partial x)$ nous déduisons que $e_x = \cos\theta_0\, e_r - (1/r_0)\sin\theta\, e_\theta$.

Pour finir, notons que toutes les quantités vectorielles en physique sont reliées d'une façon ou d'une autre au mouvement d'un point et compatible donc avec la définition que nous donnons des vecteurs ici. Ceci est le cas bien sûr de la vitesse d'une particule et ses dérivées ; de la force qui est mesurée par le mouvement qu'elle induit ; du champ électrique et magnétique qui sont dérivées des forces, ...

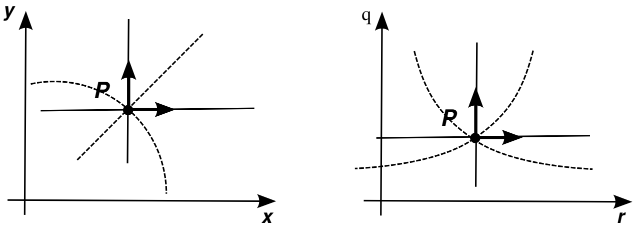

FIG. 2.2.: Le plan repépré par deux systèmes de coordonnées différents $(x^1,x^2) = (x,y)$ et $(x^1,x^2) = (r,\theta)$. Un point P et deux vecteurs de son espace tangent choisis comme vecteurs de base y sont montré. Figure de gauche : les deux courbes standardes (x_0+t,y_0) et (x_0,y_0+t) qui "portent" les vecteurs de la base y sont montrés en trait plein. Figure de droite : les deux courbes standardes sont (r_0+t,θ_0) et (r_0,θ_0+t), également en trait plein. Les courbes standardes de chaque système de coordonnées sont montrées en pointillées sur l'autre figure.

3. Connexions affines.

Résumons le chemin parcouru : nous nous sommes donnés un ensemble de points ; nous les avons liés à l'aide d'une topologie ; nous les avons munis d'un ou plusieurs systèmes de coordonnées pour repérer les points. Nous avons appelé cela une variété. Ensuite, nous avons associés à chaque point des vecteurs (formant un espace vectoriel). Nous devons maintenant nous donner le moyen de comparer des vecteurs qui sont associés à des points *différents*. Nous sommes tellement habitués à cette operation dans l'espace euclidien que nous nous posons même plus la question : soit le point Pet un vecteur u en ce point ; le point Q et un vecteur v en ce point . Pour comparer ces deux vecteurs, il suffit de "tracer" un vecteur "égal" au v en P, appelons le v' et ensuite de comparer u et v' qui sont maintenant des vecteurs associés au même point.

Concrétement, les opérations que nous avons décrites reviennent à ceci : nous avons utilisé un système de coordonnées cartesien $(x^1, x^2, ... x^n) = (x, y, z, ...)$. A chaque point de l'espace, nous associons une base de vecteurs $(e_1, e_2, ... e_n)$ où $e_i = \partial/\partial x^i$. Le vecteur v en Q s'écrit, dans la base associée à ce point[1], $v = v^i e_i$. Nous

[1]Rappelons la convention de sommation : une lettre répétée une fois en indice une fois en exposant implique la sommation : par exemple, $v^i e_i = \sum_{i=1}^{n} v^i e_i$; $g_{ij} dx^i dx^j = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx^i dx^j$. De même, on peut écrire $dx_i = g_{ij} dx^j$ et $dx^i = g^i_j dx^j$. Les exposants dénotent les composantes des vecteurs, les indices les composantes des co-vecteurs. Par contre, une expression du genre $dx^i = g_{ij} dx^j$ est mal formée. Ceci ressemble à la règle des parenthèses ouvertes et fermées

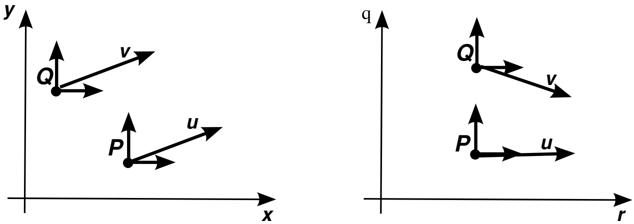

FIG. 3.1.: Deux vecteurs u et v montrés dans le plan repéré (i) à gauche, par les coordonnées cartésiennes ; (ii) à droite, par les coordonnées polaires. Les deux vecteurs qui parraissent “égaux” à gauche ne le sont plus à droite.

construisons alors dans la base associée au point P un vecteur avec les *mêmes* composantes[2] : $v' = v^i e_i$.

Cette opération nous aurait paru grossièrement faux si nous étions en train par exemple d'utiliser les coordonnées polaires du plan : les vecteur $(1,0)$ au point P et $(1,0)$ au point Q ne *sont* pas égaux si ces deux points sont repéré par des angles θ différents (Fig.3.1) .

Nous devons donc nous donner des règles strictes pour savoir transporter un vecteur d'un endroit à un autre. En réalité, il faut penser dans le sens inverse : C'est la règle que nous nous donnons qui fixe la nature (euclidien ou non) de notre variété et du système de coordonnées (cartesien ou non) que nous nous sommes données. Si par exemple, nous repérons le plan à l'aide des coordonnées que nous appelons (r,θ) et que nous nous donnons la régle $v' = v^i e_i$, alors (r,θ) sont des coordonnées cartesiennes bien que nous ne les

qui nous permettent rapidement de vérifier que par exemple, $a = b + (c + c($ n'est pas très correct. Une convention de notation bien utile dans une discipline où l'on manipule plusieurs indices et exposants à la fois ;

[2]En toute rigueur, nous aurions dû écrire $v = v^i e_i^Q$ et $v' = v^i e_i^P$ pour bien insister que la première base est associée au point Q et la deuxième au point P.

ayons pas appelé (x,y) et l'espace qu'elles repèrent est euclidien.

La régle de transport des vecteurs d'un endroit à l'autre s'appelle une *connexion affine.* C'est une (la) propriété fondamental de la variété et permet de relier les vecteurs définis en différents points. Nous verrons plus bas comment elle nous permet de savoir si la variété est courbe ou non par exemple.

Comme nous n'avons pas de garantit que l'espace ne soit pas courbe, nous pouvons seulement nous donner une connexion qui relie des vecteurs associés aux points dans le voisinage immédiat l'un de l'autre à l'aide d'éléments différentiels. Pour effectuer des transports de vecteurs sur de plus long trajet, il nous faudra intégrer ces relations différentiels.

Reprenons : nous supposons notre variété muni d'un système de coordonnées $(x^1, x^2, ...x^n)$ et de trièdres[3] en chaque point. Considérons un point P et son trièdre $(e_1, ..., e_n)$ et un point voisin P'et son trièdre $(e'_1, ..., e'_n)$. Dans ce cas, nous pouvons repérer P' à l'aide d'un vecteur tangent en P :

$$P' = P + \omega^i e_i$$

où $\omega = (dx^1, dx^2, ..., dx^n)$ et ω^ien est simplement la $i-$ème composante. De même, chaque vecteur e'_i doit pouvoir être exprimé comme une combinaison linéaire des vecteurs e_i :

$$e'_i = e_i + \omega_i^j e_j$$

où ω_i^j est un tableau qui contient les divers éléments dx^i. Les deux relations, exprimées sous forme de différence sont appelées la connexion

[3]Par trièdre nous entendons ici les vecteurs de base $e_i = \partial/\partial x^i$. Nous aurions dû utiliser le mot n-èdre, puisque nul part, nous nous restregnons aux variétés tri-dimensionnelle. Le mot n'étant pas consacré, nous nous tenons au trièdre.

affine :

$$dP = \omega^i e_i \tag{3.1}$$
$$de_i = \omega_i^j e_j \tag{3.2}$$

Exemple 1. Pour un espace euclidien muni de coordonnées cartésiennes, $\omega_i^j = 0$.

Exemple 2. Pour le plan euclidien muni des coordonnées polaires, cherchons la connexion affine. Pour plus de lisibilité, nous noterons (r, θ) pour l'instant à la place de (x^1, x^2), et continuons d'appeler (x, y) les coordonnées cartésiennes. Les deux systèmes sont reliés par $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ et donc

$$\begin{aligned} e_r &= \cos\theta e_x + \sin\theta e_y \\ e_\theta &= -r\sin\theta e_x + r\cos\theta e_y \end{aligned}$$

Notez le facteur r dans l'expression de e_θ qui est différent de ce que vous définissez habituellement comme le vecteur orthonormal. En prenant les différentielles des équations ci-dessus ; en notant que $d(e_x) = 0$ et que par exemple $d(\cos\theta) = -\sin\theta d\theta$ ... ; et en retransformant les e_x,e_y à la fin à nouveau en e_r et e_θ, nous trouvons finalement[4]

$$\begin{pmatrix} de_r & de_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_r & e_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -rd\theta \\ (1/r)d\theta & (1/r)dr \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

On fait en général la démarche inverse : une variété muni de la connexion ci-dessus *est un espace euclidien muni de coordonnées polaires*. Une connexion définit le type de l'espace.

[4] La convention de notation maricielle est que l'indice supérieur désigne la ligne, et l'indice inférieure la colonne. C'est pourquoi $(de_r\ de_\theta)$ est écrit sous forme de vecteur ligne.

Maintenant que nous savons transporter les vecteurs de base d'un point à un autre, nous savons transporter n'importe quel vecteur $v' = v^i e'_i$, défini en $P+dP$ et trouver sa copie v en P :

$$\begin{aligned} v' &= v^i e'_i \\ v &= v^i e_i + \omega_i^j v^i e_j \end{aligned} \tag{3.4}$$

De façon générale, chaque élément ω_i^j est une combinaison linéaire d'éléments dx^1, dx^2,... Nous aurions pu par exemple avoir comme matrice de connexion d'une variété bi-dimentionnel[5]

$$\begin{pmatrix} x^2dx^1 + x^1dx^2 & dx^1 + dx^2 \\ -dx^1 + dx^2 & (x^2 + x^1)dx^1 + (x^2x^1)dx^2 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons noter cela sous la forme

$$\omega_i^j = \Gamma_{ik}^j dx^k \tag{3.5}$$

pour bien faire ressortir les éléments infinitésimaux. Dans l'exemple ci-dessus par exemple, $\Gamma^1_{1,1} = x^2$, $\Gamma^1_{1,2} = x^1$ et ainsi de suite. Il est util pour s'entrainer de trouver les coonexions dans quelques systèmes habituels de coordonnées de l'espace euclidien comme le cylindrique et le sphérique (appendice B) et également regarder quelques exemple de connexion non-euclidienne(appendice D).

[5]Nous verrons plus bas que n'importe quelle expression ne peut pas former une connexion affine et qu'il y a des contraintes.

4. Dérivation covariante.

Supposons que nous nous sommes donnés un champ de vecteurs sur la variété. Ceci est par exemple le champ des vitesses d'un fluide en chaque point, ou le champ électrique dans l'espace, ...Un champ est donné par les n fonctions de ces composantes $u^i = u^i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$. Dans le plan euclidien, le champ $u^1 = x^1$, $u^2 = 0$ désigne des vecteurs parrallèles à l'axe x si $(x^1, x^2) = (x, y)$ sont les coordonnées cartésiennes ; il désigne un champ radial si $(x^1, x^2) = (r, \theta)$ sont les coordonées polaires.

La plupart des loi de physique gouvernant les champs de vecteurs (de gravitation, électromagnétique, vitesses de fluide, déplacement élastique d'un solide,...) sont formulées sous forme différentielle ou locale : elles relient la variation du champ entre un point et un autre infiniment voisin à leurs causes. Les équations de Maxwell relient par exemple les variations locales du champ électromagnétique (exprimées sous forme de rotationnelle, divergence, ... de ces champs) aux charges et aux courants. Nous avons donc besoin d'outils pour calculer la variation d'un champ entre un point et son voisin, et ceci dans un cadre générale et non seulement pour l'espace euclidien muni de coordonnées cartesiennes.

Faisons nous la main justement dans ce cas le plus simple (euclidien+cartesien) et contentons nous de deux dimensions. Soit le champs

$$u(x^1, x^2) = u^i(x^1, x^2) e_i$$

alors

$$\begin{aligned} u^i(x^1+dx^1,x^2+dx^2)-u^i(x^1,x^2) &= \partial u^i/\partial x^1|_{x_0}dx^1+\partial u^i/\partial x^2|_{x_0}dx^2 \\ du^i &= a^i_j dx^j \end{aligned}$$

où $a^i_j = \partial u^i/\partial x^j$. Nous aurions pu écrire cela sous forme un peu plus condensée

$$du = a^i_j dx^j e_i \tag{4.1}$$

Le calcul était facilité ici puisque nous n'avions pas de problème particulier de transport de vecteur.

Dans le cas général, il faut d'abord créér une copie du vecteur[1] $u(x+dx)$ au point x, et ensuite seulement calculer la différence :

$$\begin{aligned} u(x+dx) &= u^i(x+dx)e'_i \\ &= \left[u^i(x)+(\partial u^i/\partial x^j)dx^j\right]\left[e_i+\Gamma^j_{ik}dx^k e_j\right] \end{aligned}$$

le premier crochet est simplement l'expansion d'une fonction scalaire au premier ordre, tandis que le deuxième crochet désigne le transport des vecteurs du point $x+dx$ au point x. Comme maintenant toutes les quantités sont définies au point x, nous pouvons retrancher de l'expression ci-dessus $u(x) = u^i(x)e_i$. En ne retenant que les termes de premier ordre en dx, nous obtenons alors :

$$du = (\partial u^i/\partial x^j)dx^j e_i + u^i(x)\Gamma^j_{ik}dx^k e_j \tag{4.2}$$

Le deuxième terme est d'aspect un peu menaçant, mais ce n'est qu'une somme sur les trois indices i, j et k. Comment nous désignons nos variables n'a aucune importance. Par exemple, si $n=3$, les termes $x_i y^i$, $x_\alpha y^\alpha$ et $x_j y^j$désignent tous les trois la somme

[1]Nous utilisons x pour désigner le n-tuplet $(x^1,x^2,\ldots x^n)$.

$x_1y^1 + x_2y^2 + x_3y^3$. Nous pouvons dans le deuxième terme de l'expression (4.2), effectuer une permutation entre les noms des indices : $j \to i$, $k \to j$, $i \to k$ et réecrire

$$\begin{aligned} du &= (\partial u^i/\partial x^j)dx^j e_i + u^k(x)\Gamma^i_{kj}dx^j e_i \\ &= \left[(\partial u^i/\partial x^j) + u^k(x)\Gamma^i_{kj}\right] dx^j e_i \end{aligned} \tag{4.3}$$

L'expression entre crochet est appelé la dérivée covariante du champ de vecteur et généralise l'expression (4.1) à n'importe quelle variété munie de n'importe quel système de coordonnées ; on le note par $u^i_{;j}$ (avec un point-vigule avant l'indice) pour noter que c'est la dérivée (covariante) du $i-$ème composante du vecteur par rapport à la $j-$ème variable. Les connexions Γ^i_{kj} sont souvent appelés les symboles de Christoffel (de deuxième espèce). On peut réécrire l'expression ci-dessus sous la forme compacte :

$$du = u^i_{;j} dx^j e_i$$

Un déplacement de dx^j(dans la direction de e_j donc) induit une variation de $u^i_{;j}dx^j$ dans la $i-$ème composante du vecteur u.

5. La courbure d'une variété.

Comment détermnier si la variété $\mathcal{M}$ est courbe et non plate ? Si nous regardons la variété de l'extérieur, ceci ne pose aucun problème : un plan est plat, tandis que la surface d'une sphère est courbe. Par "regarder la variété de l'extérieur", il faut entendre ceci : Nous disposons d'une variété euclidienne, et nous cousidérons des sous-variétés qui sont données explicitement par leurs équations. Dans l'esapce à trois dimensions, un plan est donné par $ax + by + cz = d$, une sphère centrée sur l'origine par $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ et ainsi de suite. De façon générale, une sous variété de dimension k est donnée explicitement par la donnée de $(n-k)$ fonctions $F^i(x^1, ..., x^n) = 0$, $i = 1, ...(n-k)$. Nous pouvons alors appliquer nos connaissances de la géométrie différentielle et de calculer la courbure à l'aide des dérivées (première et seconde) des fonctions F^i.

Mais comment déterminer *de l'intérieur* si la variété est courbe ou non ? La seule donnée dont nous disposons est la connexion affine ou autrement dit, la régle de transport parallèle des vecteurs. La caractéristique des variétés courbes est le faite que si l'on transporte un vecteur parallèlement le long d'une courbe fermée, *nous trouvons à l'arrivée un vecteur différent de celui que nous avions utilisé au départ* ! Nous appelerons cette différence la courbure. Pour démystifier cela, jetez un coup d'oeil sur la figure (5.1), où la variété est une sphère. Nous considérons une courbe qui part d'un point A sur l'équateur et rejoint le pôle le long d'un méridien ; revient à nouveau sur l'équateur au point B par un autre mérdien, perpendi-

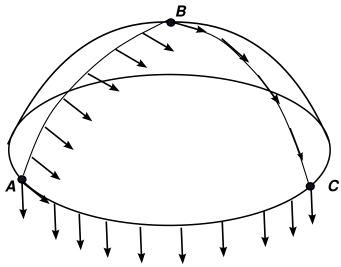

FIG. 5.1.: Transport parallèle d'un vecteur dans une variété courbe. AB et BC sont des méridiens, perpendiculaire l'un à l'autre au pôle B. Le vecteur initial au point A est perpendiculaire à AB et parallèle à l'équateur. Lors du trajet AB, le vecteur reste perpendiculaire à la courbe ; pendant le trajet BC, le vecteur est tangent à la courbe ; finalement, lors du trajet CA, le vecteur reste perpendiculaire à l'équateur.

culaire au premier au pôle ; finalement la courbe revient en A le long de l'équateur. Considérons maintenant un vecteur en A parallèle à l'equateur, et suivons le de proche en proche par le transport parallèle. Vous voyez qu'à l'arrivée, le vecteur est *perpendiculaire* à l'équateur[1].

Nous allons effecteur plus en détail ce calcul, en nous contentant de ballader un vecteur le long d'une courbe fermée *infiniment petite*.

[1]Le concept de transport parallèle a fait l'objet d'une longue correspondence entre E. Cartan et A. Einstein entre 1929 et 1932. Voir "Elie Cartan, Albert Einstein, lettres sur le parallèlisme aboslue", Académie Royale de Belgique, 1979. L'exemple de la figure (5.1) est précisement celui donné par Cartan à Einstein en 1923 pour l'introduire au parallèlisme. Einstein avait formulé sa théorie en utilisant seulement le tenseur métrique et était étrnger au concept de connexion affine.

Donnons nous un vecteur e_i au point P, où la base (e_i) est attaché à ce point. En transportant (parallèlement) ce vecteur au point $P+dP$, dans la base associée à $P+dP$, la différence s'écrit, d'après notre définition de la connexion affine (3.2),

$$de_j = \omega^i_j e_i$$

Si maintenant nous nous déplaçons le long d'une courbe fermée ∂S, la variation totale de cette composante s'écrit

$$\Delta e_j = \int_{\partial S} \omega^i_j e_i \tag{5.1}$$

Avant d'aller plus loin, précisons quelques notations. ∂S désigne la courbe fermée qui entoure un domaine S. Chaque ω^i_j est une 1-forme différentielle et contient des combinaisons linéaires d'éléments différentielles du genre $Adx^1 + Bdx^2 + \ldots$ Nous pouvons donc utiliser l'arsenal des formes différentielles et le théorème de stokes pour masser un peu cette expression. Si vous n'êtes pas très habitué au langage des formes différentielles, reportez vous à l'appendice C. En appliquant le théorème de Stokes à l'expression (5.1), nous avons

$$\begin{aligned}
\Delta e_j &= \int_S (d\omega^i_j)e_i - \omega^i_j de_i \\
&= \int_S (d\omega^i_j)e_i - \omega^i_j \omega^k_i e_k \\
&= \int_S (d\omega^i_j - \omega^k_j \omega^i_k)e_k
\end{aligned}$$

où pour passer de la première ligne à la deuxième, nous avons utilisé la définition (3.2) de de_i et pour passer de la deuxième ligne à la troisième, nous avons permuté leux deux indices muettes de sommation i et k.

La quantité entre parenthèse

$$\begin{aligned}\Omega^i_j &= d\omega^i_j - \omega^k_j\omega^i_k &(5.2)\\ &= d\omega^i_j + \omega^i_k\omega^k_j &(5.3)\end{aligned}$$

qui est une 2-forme mesure la courbure de la variété. La courbure est souvent présentée sous la forme (5.2) ; il peut être util cependant de le présenter sous la forme (5.3) où le deuxième terme désigne le produit usuel de deux matrice (n'oubliez pas que pour deux 1-forme, $\omega_1\omega_2 = -\omega_2\omega_1$, *i.e.* le produit est anticimmutatif). On peut ainsi écrire $\Omega = d\omega + \omega^2$

Prenons l'exemple de la connexion polaire ω à deux dimensions donné par l'expression(3.3). Nous avons, rappelons le

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & -rd\theta \\ (1/r)d\theta & (1/r)dr \end{pmatrix}$$

et donc, en effectuant terme à terme les dérivations extérieures,

$$d\omega = \begin{pmatrix} 0 & -drd\theta \\ (-1/r^2)drd\theta & 0 \end{pmatrix}$$

Par ailleurs, en suivant les régles de produit des 1-formes ($d\theta d\theta = drdr = 0$, $d\theta dr = -drd\theta$), nous avons

$$\omega^2 = \begin{pmatrix} 0 & -rd\theta \\ (1/r)d\theta & (1/r)dr \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -rd\theta \\ (1/r)d\theta & (1/r)dr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & drd\theta \\ (1/r^2)drd\theta & 0 \end{pmatrix}$$

qui est, à un signe près, égale à $d\omega$. La courbure de la variété est donc uniformément nulle $\Omega = 0$. Ceci n'est bien sûr pas étonnant, puisque nous savons que nous sommes dans un espace euclidien (donc plat) où nous utilisons simplement des coordonnées curvilignes. Il n'est pas trop difficile de montrer que la courbure de n'importe quelle connexion qui dérive d'un changement de coordonnées cartésienne en curviligne à une courbure nulle. Faites le comme un exercice.

Si nous utilisons les symboles de chritoffel $\omega^i_j = \Gamma^i_{jl} du^l$, nous avons, selon les règles de la différentiation éxterieure,

$$d\omega^i_j = \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial u^m} du^m du^l$$

et donc

$$\Omega^i_j = \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial u^m} du^m du^l - \Gamma^k_{jm}\Gamma^i_{kl} du^m du^l$$

La quantité

$$\overline{R}^i_{jml} = \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial u^m} - \Gamma^k_{jm}\Gamma^i_{kl} \tag{5.4}$$

est (preque) appelé la courbure riemannienne de la variété et est à la base de la théorie générale de la relativité : grossièrement parlant, ce que nous appelons la masse d'une particule est simplement la courbure locale de l'espace-temps, vu comme une variété à quatre dimension. Nous y viendrons plus tard.

Même si cela ne saute pas au yeux du premier coups dans l'expression (5.4), R^i_{jml} est anti-symetrique pour la permutation de ses deux dernières indexes, puisque $\Omega^i_j = R^i_{jml} du^m du^l$ est une 2-formes. Dit autrement, une forme $\omega = 3dxdy + 1dydx$ s'écrit plus succintement $\omega = 2dxdy$ ou encore $\omega = dxdy + (-1)dydx$. La partie symétrique de la forme n'a aucune importance. Cela veut simplement dire que nous réecrivons la 2-forme $\omega = Adxdy + Bdydx$ sous la forme anti-symétrique $\omega = (1/2)(A-B)dxdy + (1/2)(B-A)dydx$.

On peut appliquer la même procédure pour redéfinir la courbure de façon moins rededante :

$$R^i_{jml} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial u^m} - \Gamma^k_{jm}\Gamma^i_{kl} - \frac{\partial \Gamma^i_{jm}}{\partial u^l} + \Gamma^k_{jl}\Gamma^i_{km}\right)$$

C'est en réalité cette dernière quantité que nous appelons la courbure de Rieman d'une variété. La courbure Ω s'écrit donc $\Omega^i_j = R^i_{jml} dx^m dx^l$.

Pour résumer, en effectuant un parcours fermé infiniment petit et en transportant parallèlement un vecteur $e_i$le long de ce parcours , nous obtenons à l'arrivé le vecteur e_i *plus* un changement (Fig.6.1(a))

$$\Delta e_i = \Omega^j_i e_j$$

Ω^j_i est donc la composante selon le vecteur e_j de cette variation. Si le parcours était contenu dans le plan $dx^m dx^l$, la variation (selon la direction e_j) serait R^j_{iml} multiplié par l'élément de surface infinitésimal $dx^m dx^l$. Pour un parcours plus général, nous décomposons le parcours en somme de parcours dans les divers plan $dx^m dx^l$ et nous additionnons chaque contribution.

Apportons encore quelques petites précisions pour approfondir ce que nous venons de voir.

Les deuxièmes différentielles. Supposons données une connexion affine

$$(de_1, ...de_n) = (e_1, ...e_n)\omega$$

En différentiant encore cette relation, nous trouvons

$$\begin{aligned}(d^2e_1, ...d^2e_n) &= (de_1, ...de_n)\omega + (e_1, ...e_n).d\omega \\ &= (e_1, ...e_n)[\omega^2 + d\omega]\end{aligned}$$

L'expression entre crochet est bien sûr la courbure de rieman Ω de la variété . Ce tensseur (on démontrera bientôt que c'est un tenseur) permet dont de relier les deuxièmes différentielles des vecteurs aux vecteurs : $(d^2e_1, ...d^2e_n) = (e_1, ...e_n)\Omega$.

Courbure de l'espace euclidien muni de coordonnées curvilignes. Nous avons indiqué que les changement de coordonnées curviligne de coordonnées cartésiennes n'induisent pas de courbure ; nous allons le démontrer. En effet, nous avons vu (appendice B) que dans ce cas, la connexion affine est donnée par $\omega = \Lambda^{-1}d\Lambda$, où Λest le tenseur de passage entre la base cartésienne et la base curviligne. La courbure de rieman est donc données par

$$\Omega = d(\Lambda^{-1}d\Lambda) + \Lambda^{-1}.d\Lambda.\Lambda^{-1}.d\Lambda$$

Notons d' abord que les composantes de Λ ne sont que des fonctions scalaire ; selon le lemme de poincarré donc, $d^2\Lambda = 0$. Le premier terme de la courbure est alors simplement

$$d(\Lambda^{-1}d\Lambda) = d\Lambda^{-1}.d\Lambda$$

Par ailleurs, comme $\Lambda^{-1}\Lambda = I$, nous avons

$$d\Lambda^{-1}.\Lambda + \Lambda^{-1}.d\Lambda = 0$$

nous pouvons donc réarrager le deuxième terme de la courbure :

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1}.d\Lambda.\Lambda^{-1}.d\Lambda &= -d\Lambda^{-1}.\Lambda.\Lambda^{-1}.d\Lambda \\ &= -d\Lambda^{-1}.d\Lambda \end{aligned}$$

La contribution des deux termes s'annulent et nous avons $\Omega = 0$. L'espace euclidien muni de n'importe quelle système de coordonnées est donc de courbure nulle. C'est d'ailleurs comme cela que l'on définit l'espace euclidien.

La courbure est un tenseur. Rappelons la définition de la courbure :

$$d^2(e_1,...e_n) = (e_1,...e_n)\Omega$$

passons maintenant dans une autre base, f_i, à l'aide d'un tenseur de passage Λ : $(f_1,...,f_n) = (e_1,...,e_n)\Lambda$. En remplaçant les vecteurs dans la relation de courbure, nous trouvons :

$$d^2[(f_1,...,f_n)\Lambda^{-1}] = (f_1,...,f_n)\Lambda^{-1}\Omega \tag{5.5}$$

Or, comme nous l'avons indiqué dans le paragraphe précédent, $d^2[\Lambda^{-1}] = 0$ (lemme de Poincarré). Le terme de gauche de la relation (5.5) est donc simplement $d^2(f_1,...,f_n).\Lambda^{-1}$ et finalement

$$d^2(f_1,...,f_n) = (f_1,...,f_n)\Lambda^{-1}\Omega\Lambda$$

Ω se comporte donc comme un tenseur lors des changement de base. Notez que nous ne pouvions pas appliquer cet dérivation à la connexion affine (qui n'est pas un tenseur), puisque en général, $d\Lambda \neq 0$.

6. Torsion d'une variété.

La torsion d'une variété est un concept proche de la courbure. Prenons un parcours fermé (infinitésimal) et calculons la somme géométrique des vecteurs tangents à la courbe. Il faut bien sûr pour effectuer la somme ramener tous les vecteur en un point (par exemple à l'intérieur de la courbe), mais comme le parcours est infinitésimal, le choix du point n'a pas beaucoup d'importance est n'introduirait que des infiniement petit d'ordre supérieur. Cette somme est ce que nous appelons la torsion de la variété (en un point à l'intérieur de la courbe).

$$\begin{aligned} dP &= du^i e_i \\ \Delta P &= \oint dP \end{aligned}$$

Si nous sommes dans une variété euclidienne muni de coordonnée cartésienne, il est évident que cette somme est nulle :

$$\begin{aligned} \oint du^i e_i &= (\oint du^i) e_i \\ &= (u^i_{final} - u^i_{initial}) e_i \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dans la première ligne, nous avons utilisé le faite que e_i se transporte tel quel pour ce genre de variété. Vous pouvez d'ailleurs montrer facilement qu'une variété euclidienne muni de coordonnées curviligne quelconque est sans torsion.

Dans le cas d'une variété générale munie d'une connexion ω, nous pouvons utiliser, comme dans le cas de la courbure, le théorème de Stokes

$$\begin{aligned}\oint_{\partial S} du^i e_i &= -\int_S du^i de_i \\ &= -\int_S du^i \omega_i^j e_j\end{aligned}$$

La quantité $\Sigma^j = \omega_i^j du^i$ est la variation induite (selon le vecteur e_j) dans le vecteur tangent une fois que nous avons accompli un tour complet. Nous pouvons, comme d'habitude, écrire explicitement les éléments différentielles

$$\begin{aligned}\Sigma^j &= \Gamma_{ik}^j du^k du^i \\ &= S_{ik}^j du^k du^i\end{aligned}$$

où S_{ik}^j est la partie antisymétrique de la connexion : $S_{ik}^j = (1/2)(\Gamma_{ik}^j - \Gamma_{ki}^j)$ comme nous l'avions fait pour la courbure.

L'interprétation géométrique est similaire à celle que nous avions donnée pour la courbure : En effectuant un parcours fermé contenu dans le plan $du^k du^i$, la somme géométrique des vecteurs tangents est non nulle et sa composante selon le vecteur $e_j$vaut S_{ik}^j multiplié par l'élément de surface infinitésimal $du^k du^i$ (Fig.6.1(b)).

Si vous avez dérivé l'expression général de la connexion pour des coordonnées curvilignes dans l'espace euclidien, vous avez surement remarqué que la connexion est symétrique $\Gamma_{ik}^j = \Gamma_{ki}^j$, ce qui veut dire que l'espace euclidien en général est sans torsion.

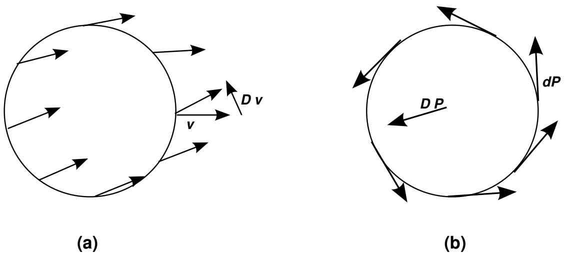

FIG. 6.1.: (a) La courbure d'une variété en un point est le changement que subit un vecteur lors de son transport parallèle le long d'une courbe infinitésimale autour de ce point. (b) La torsion d'une variété en un point est la somme géométrique des vecteurs tangents à une courbe infinitésimale autour de ce point.

7. Les géodésiques.

Dans l'espace euclidien, nous disposons de courbes aux propriétés très particulières que nous appelons des "droites" : ce sont des courbes (i) dont les tangentes en tous points sont parrallèle entre elles ; (ii) qui définissent le plus court trajet entre deux points. Nous allons généraliser la notion de droite aux variétés différentielles quelconques, où on les appelle des "géodésiques". Nous ne pouvons pas pour l'instant poursuivre la deuxième définition, puisque nous n'avons pas encore défini la distance entre deux points - nous ne disposons pas de métrique - mais nous allons voir que la première définition se généralise facilement.

7.1. Transport parrallèle du vecteur tangente.

Nous cherchons une courbe $\mathcal{C}$ dont ses tangentes sont parrallèles entre elles. Une courbe est donnée par les n fonctions de ses coordonnées en fonction d'un paramètre s : $x^i = x^i(s)$. La tangente u en un point est

$$u(s) = \frac{dx^i}{ds} e_i$$

et pourque deux points voisin sur la courbe ait des tangentes parrallèle, il faut que la dérivée covariente de la fonction ci-dessus, *quand on se déplace le long de la courbe*, soit nulle. Rappelons la définition de la dérivée covariante d'un champ de vecteur :

$$du = \left[(\partial u^i/\partial x^j) + u^k(x)\Gamma^i_{kj}\right] dx^j e_i$$

comme nous nous déplaçons le long de la courbe, les dx^j ne sont pas quelconque, mais données par $dx^j = (dx^j/ds)ds$. Le premier terme dans le crochet se réécrit simplement alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \quad \tfrac{dx^j}{ds} &= \frac{du^i}{ds} \\ &= \frac{d^2x^i}{ds^2} \end{aligned}$$

La variation (en fonction de s, la seule variable indépendante) du vecteur tangent le long de la courbe s'écrit donc

$$du = \left[\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kj}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^j}{ds}\right] dse_i$$

Remarquez que le deuxième terme dans le crochet $\Gamma^i_{kj}\dot{x}^k\dot{x}^j$(qui est une somme sur les k et j) s'écrit de façon plus symetrique $(1/2)(\Gamma^i_{kj} + \Gamma^i_{jk})\dot{x}^k\dot{x}^j$. Comme vous le voyez, le calcul tensoriel implique souvent l'extraction de partie symetrique et antisymetrique, et une notation a été inventé à cet effet : () indique la partie symetrique et un [] la partie antisymetrique.

$$\begin{aligned} \Gamma^i_{(jk)} &= (1/2)(\Gamma^i_{kj} + \Gamma^i_{jk}) \\ \Gamma^i_{[jk]} &= (1/2)(\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}) \end{aligned}$$

Pour conclure : la courbe $\mathcal{C}$ donnée par les n équations $x^i = x^i(s)$ est un géodésique si ces fonctions obéissent aux n équations différentielles

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{(kj)}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^j}{ds} = 0 \quad i = 1, \ldots, n \tag{7.1}$$

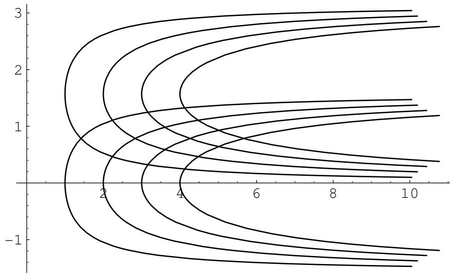

FIG. 7.1.: Une famille de courbes géodésiques pour la connexion $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 1/x^1$; $\Gamma^1_{22} = -x^1$. Les conditions initiales sont $a = 1,2,3,4$; $b = 0,1$.

Exemple. Pour une variété bidimensionnelle munie de la connexion affine $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 1/x^1$; $\Gamma^1_{22} = -x^1$, les équations des géodésiques sont données par

$$\begin{aligned} \frac{d^2x^1}{ds^2} - x^1\left(\frac{dx^2}{ds}\right)^2 &= 0 \\ \frac{d^2x^2}{ds^2} + \frac{2}{x^1}\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^2}{ds} &= 0 \end{aligned}$$

et vous pouvez vérifier que la solution de ce système est

$$\begin{aligned} x^1 &= \sqrt{a^2+s^2} \\ x^2 &= b + \arctan(s/a) \end{aligned}$$

où a et b sont deux paramètres dépendants des conditions initiales (Fig.7.1). Evidemment, la connexion affine ci-dessus est celle des coordonnées polaires dans l'espace euclidien et nous n'avons fait qu'écrire l'équation d'une droite en coordonnées polaires . ■

7.2. Distance minimum entre deux points.

Nous n'avons pas encore définie la distance entre deux points, mais la forme de l'équation (7.1) nous fait fortement penser à une dérivation lagrangienne. Dans l'espace euclidien muni de coordonnées cartésiennes, la distance entre deux points voisins est donnée par $d\ell^2 = \sum_i dx^i dx^i$. La longueur d'une courbe est

$$\ell = \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{\sum_i \left(\frac{dx^i}{ds}\right)^2} ds$$

La courbe qui minimise cette longeur est obtenue à travers les équations d'Euler-Lagrange du lagrangien

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \sum_i \left(\frac{dx^i}{ds}\right)^2 \qquad (7.2)$$

qui sont

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0$$

Comme dans ce lagrangien, rien ne dépend explicitement des coordonnées x^i mais seulement de leurs dérivées $\dot{x}^i$, l'équation d'euler-lagrange donne tout simplement

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = 0$$

dont la solution est bien sur une famille de droite.

La forme quadratique du lagrangien est très attrayante. Nous pouvons penser que dans une variété quelconque, la distance entre deux points voisins conserve une forme quadratique dont la forme la plus générale est $d\ell^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ où g_{ij}est une fonction de la position (n'oubliez pas la convention de sommation). Nous supposons en plus que g est symetrique, c'est à dire $g_{ij}(x) = g_{ji}(x)$. Par exemple, en coordonnées polaires, la distance infinitésimale est donnée par $d\ell^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$ et donc $g_{11} = 1$; $g_{22} = r^2$; $g_{12} = g_{21} = 0$.

En supposant cette forme pour la distance, la courbe qui minimise la distance entre deux points est obtenue par le biais du Lagrangien ($\dot{x}$ est un raccourci pour dx/ds)

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j \tag{7.3}$$

Le premier terme de l'équation Euler-Lagrange nous donne

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^i} &= \frac{d}{ds}\left((g_{ij} + g_{ji})\dot{x}^j\right) \\
&= 2\frac{d}{ds}\left(g_{ij}\dot{x}^j\right) \\
&= 2g_{ij}\ddot{x}^j + 2\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^k\dot{x}^j \\
&= 2g_{ij}\ddot{x}^j + \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\right)\dot{x}^k\dot{x}^j
\end{aligned}$$

le terme additionnel vient ici de la dérivation de g_{ij} par rapport à s en utilisant la règle des dérivées composées : $dg_{ij}/ds = (\partial g_{ij}/\partial x^k)(dx^k/ds)$. La dernière ligne s'obtient en faisant un petit jeux avec les deux indices j et k.

Le deuxième terme de l'équation d'E-L est plus simple, mais il faut se souvenir que tous les termes du genre $g_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k$ dépendent *à priori* de x^i via la dépendance de g_{jk} :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^i} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\dot{x}^j\dot{x}^k$$

Une convention de notation (qui allège l'écriture) veut que l'ont représente les dérivées partielles par un simple virgule : $g_{ij,k} = \partial g_{ij}/\partial x^k$.

Les équations d'E-L s'écrivent alors :

$$g_{ij}\ddot{x}^j + \frac{1}{2}\left(g_{ij,k} + g_{ik,j} - g_{jk,i}\right)\dot{x}^j\dot{x}^k = 0$$

N'oublions pas que l'équation ci-dessus est en réalité un système de n équations (pour $i = 1, ..., n$) et que chaque ligne comporte une somme sur j pour les dérivées seconde du genre $g_{i1}\ddot{x}^1 + g_{i2}\ddot{x}^2 + ...$ Sous forme matricielle, nous écrirons ceci comme $g\ddot{x} + ... = 0$. On peut réarranger ce système en le multlipliant par la matrice inverse g^{-1}pour n'avoir qu'une seule dérivée seconde par ligne. En notation tensorielle, la matrice inverse est notée g^{ji}et nous avons la relation évidente $g^{ki}g_{ij} = \delta^k_j$. Il suffit donc de multiplier chaque ligne par g^{ji} (ce qui sous entend une sommation sur l'indice i) et de changer le nom de quelques indices pour éviter toute confusion :

$$\ddot{x}^j + \frac{1}{2}g^{ji}\left(g_{il,m} + g_{im,l} - g_{lm,i}\right)\dot{x}^l\dot{x}^m = 0 \qquad (7.4)$$

Résumons : si une courbe minimise la distance entre deux points où l'élément de distance infinitésimale est donnée par $d\ell^2 = g_{ij}dx^i dx^j$, alors les coordonnées de la courbe $x^i = x^i(s)$ doivent obéir aux équations différentielles (7.4).

Si de plus nous voulons que nos deux définitions de géodésique correspondent, nous devons avoir, par comparaisons des équations (7.4) et (7.1), la relation suivante entre le metrique et la (partie symetrique de la) connexion :

$$\Gamma^j_{(lm)} = \frac{1}{2}g^{ji}\left(g_{il,m} + g_{im,l} - g_{lm,i}\right)$$

ce qui d'ailleurs est une façon très simple de déduire la connexions si nous connaissons la metrique ou plus éxactement l'élément de ligne.

Exemple : coordonnées polaire. Comme nous l'avons indiqué plus haut, pour les coordonnées polaire, $g_{rr} = 1$; $g_{\theta\theta} = r^2$. La matrice est diagonale et son inverse (qui est également diagonale) est $g^{rr} = 1$; $g^{\theta\theta} = 1/r^2$. Par ailleurs, la seule dérivée non nulle et $g_{22,1} = g_{\theta\theta,r} = 2r$. Nous avons par exemple (en n'écrivant que les termes non nuls)

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{22} &= (1/2)g^{11}(-g_{22,1}) = -r \\ \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} &= (1/2)g^{22}(g_{22,1}) = (1/r) \end{aligned}$$

qui heureusement est en accord avec ce que nous connaissions déjà.■

Il ne vous a probablement pas échappé que l'équation (7.3) a la forme de l'énergie cinétique en coordonnées curviligne. Un géodésique est donc simplement le chemin suivi par une particule soumise à aucune force. Ce résultat nous paraît évident dans l'espace euclidien, mais nous pouvons le généraliser à n'importe quelle variété. Ceci est d'ailleur le point de départ de la relativité générale : une masse (une étoile par exemple) courbe l'espace-temps autour d'elle. Les particules en chute libre (par exemple une planète orbitant autour de l'étoile) ne font que suivre les géodésiques de cet espace-temps courbe. Ce que nous appelons le champ de gravitation n'est que la courbure de l'espace-temps.

8. Ajouter un métrique.

Introduire le produit scalaire et le tenseur métrique. Dérivée covariante du tenseur et sa relation avec la partie symétrique de la variété.

A. Théorie algébrique des tenseurs.

A.1. Les formes linéaires et l'espace dual.

Nous savons déjà ce que sont les vecteurs (associés à un point). Une forme linéaire σ est une fonction qui prend un vecteur en entrée et produit un scalaire en sortie, et fait cela de façon linaire : $\sigma : \mathcal{M}_P \to \mathbb{R}$

$$
\begin{array}{rcl}
\sigma(\lambda e_1 + \mu e_2) & = & \lambda\sigma(e_1) + \mu\sigma(e_2) \\
e_1, e_2 \in \mathcal{M}_P & , & \lambda, \mu \in \mathbb{R}.
\end{array}
$$

Il n'est pas difficile de montrer que les formes linéaires forment elles même un espace vectoriel où nous définissons de façon évidente les opérations "additions de deux formes" et "multiplication par un scalaire d'une forme". Par exemple, la forme $\sigma = \sigma^1 + \sigma^2$ est celle qui associe à un vecteur e le scalaire $\sigma^1(e) + \sigma^2(e)$. En calcul vectoriel et matriciel usuel, les composantes des vecteurs sont assemblés dans une colonne (vecteur colonne) tandis que les formes linéaires sont notés par une ligne (vecteur ligne). Souvent, les formes linéaires sont appelées des *co-vecteurs*.

exemple. Si nous nous sommes donnés une base de vecteurs, la forme π^i qui associe à chaque vecteurs sa composante selon le vecteur de base e_i est une forme linéaire : si $e = a^i e_i$, alors $\pi^i(e) = a^i$.

Comme les formes linéaires forment un espace vectoriel, on peut y définir une base $(\sigma^1, ..., \sigma^n)$; une forme quelconque s'écrit alors $\sigma = a_i \sigma^i$. Vous voyez ici apparaître la convention des indices supérieurs et inférieurs : les vecteurs (comme e_i) sont indexés par des indices inférieurs, leurs composantes par des indices supérieurs (comme a^i) ; la convention est inversée pour les co-vecteurs. En géométrie, nous sommes constemment en train de manipuler des vecteurs et des co-vecteurs en même temps et cette convention est un moyen util de se souvenir qui est qui. Appliquer la forme ci-dessus à un vecteur $e = a^j e_j$ nous donne :

$$\sigma(e) = [a_j \sigma^j](a^i e_i) = a_j a^i \sigma^j(e_i)$$

L'espace des formes linéaires est appelé l'espace dual $\mathcal{M}_P^*$ et est de même dimension[1] que l'esapce vectoriel $\mathcal{M}_P$. Comme ces deux espaces sont de même "taille", on peut associer de façon unique un vecteur et un co-vecteur. Il n' y a pas une façon intrinsèque ou unique d'établir cette association. Cependant, *si* nous nous sommes donnés une base e_i dans l'espace direct, il est alors naturel de choisir comme base de l'espace dual justement les projections π^j :

$$\pi^j e_i = \delta_i^j$$

L'application[2] de la forme $\sigma = a_j \pi^j$ au vecteur $e = a^i e_i$ produit le scalaire

$$\sigma e = (a_j \pi^j)(a^i e_i) = a_j a^i \delta_i^j = a_i a^i$$

[1] Si la dimension de l'espace vectoriel est *finie*. Sinon, l'espace dual est en général "plus vaste".

[2] Comme vous remarquez, nous avons laissé tombé la parenthèse et à la place de $\sigma(e)$ nous notons σe

ou, en notation matricielle classique,

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \ldots \\ a^n \end{pmatrix} = a_1 a^1 + a_2 a^2 + \ldots + a_n a^n$$

Last but not least, l'espace dual de l'espace dual est l'espace vectoriel de départ. On peut ainsi voir les vecteurs comme des formes linéaires sur des co-vecteurs, avec la définition $\sigma e = e\sigma$, où $\sigma \in \mathcal{M}_P^*$ et $e \in \mathcal{M}_P^{**} = \mathcal{M}_P$.

A.2. Les tenseurs.

Un tenseur de type (r,s) est une application multi-linéaire qui prend r co-vecteurs et s vecteurs et produit un *scalaire*. Le rang d'un tenseur de type (r,s) est $r+s$.

exemple 1. Un tenseur T de type $(0,1)$ produit un scalaire à partir d'un vecteur, c'est donc une forme linéaire que l'on peut écrire (une fois que nous nous sommes donnés une base) $T = a_j \pi^j$. Un tenseur de type $(1,0)$ est un vecteur $T = a^i e_i$.

exemple 2. Un tenseur T de type $(0,2)$ prend deux vecteurs et produit un scalaire. On peut le noter $T = t_{ij}\pi^i \otimes \pi^j$ qui est une façon concise de noter son action sur les couples de vecteurs[3]. Ainsi, $T(e_1, e_1) = t_{11}$, $T(e_2, e_3) = t_{23}$ et ainsi de suite. Vous avez problablement plus l'habitude de noter ce tenseur par une matrice, mais

[3] L'opération $\otimes$ est appelé un produit tensoriel.

cette notation devient difficile dès que le rang dépasse 2. Si on l'applique aux deux vecteur $u = u^i e_i$ et $v = v^j e_j$, nous avons , à cause de la linéarité de l'application

$$T(u,v) = T(u^i e_i, v^j e_j) = u^i v^j T(e_i, e_j) = t_{ij} u^i v^j.$$

Un tenseur de type $(2,0)$ prend deux vecteurs et produit un scalaire : $T = t^{ij} e_i \otimes e_j$. Enfin, un tenseur de type $(1,1)$ prend la forme $T = t^i_j e_i \otimes \pi^j$.

Reprenons le cas d'un tenseur T de type $(0,2)$. Comme nous l'avons dit, $T(u,v)$ est un scalaire. On peut construire la forme linéaire $\tilde{u} = T(u,.)$ dont l'action est définie par $\tilde{u}(v) = T(u,v)$. Il est trivial de démontrer que $\tilde{u} = \tilde{u}_j \pi^j$ où $\tilde{u}_j = t_{ij} u^i$. Il est coutume de dire que l'indice de u a été abaissé par le tenseur T.

De façon général, un tenseur (r,s) se note[4] $T = T^{i_1,\dots i_r}_{j_1,\dots,j_s} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \dots \otimes e_{i_r} \otimes \pi^{j_1} \dots \otimes \pi^{j_s}$.

[4]Il ne faut pas confondre le tenseur, qui est une application linéaire, et sa représentation en terme de tableau de nombres. Cette dernière est une image de l'application qui dépend de la base choisie.

B. Exemples de connexions affines dans un espace euclidien.

B.1. Connexion affine de coordonnées curvilignes.

Supposons que nous somme dans un espace euclidien où nous disposons de coordonées cartesiennes $(x^1,...,x^n)$. Nous utilisons cependant des coordonées curvilignes $(y^1,...y^n)$. Nous avons besoin d'établir les symboles de christoffel pour ces derniers. Cela est nécessaire par exemple si nous voulons écrire des divergences, rotationnelles et laplacien dans ces bases. Appelons $(e_1,...e_n)$ la base naturelle associée aux x^i et $(f_1,...,f_n)$ la base associée aux y^i. Nous avons alors

$$f_i = \partial/\partial y^i = (\partial/\partial x^k)(\partial x^k/\partial y^i) = \Lambda_i^k e_k$$

où les dérivées sont prises au point P ; Λ est le tenseur $\binom{1}{1}$ de passage d'une base à l'autre où nous notons $\Lambda_i^k = \partial x^k/\partial y^i$. Pour trouver la différence entre le vecteur $f_i(P+dP)$ et $f_i(P)$, nous faisons un petit séjour dans le monde cartésien (les primes dénotent les quantités au point $P+dP$:

$$df_i \quad = \quad f_i' - f_i \tag{B.1}$$

$$= [\Lambda_i^k(P+dP) - \Lambda_i^k(P)]e_k \tag{B.2}$$

$$= \frac{\partial \Lambda_i^k}{\partial y^j} dy^j e_k \tag{B.3}$$

$$= \frac{\partial \Lambda_i^k}{\partial y^j} dy^j \frac{\partial y^m}{\partial x^k} f_m \tag{B.4}$$

Pour passer de (B.1) nous avons effectuer un changement de base et utiliser le faite que les vecteurs e_i ne varient pas. L'expression entre crochet est simplement une fonction scalaire que nous développons pour arriver à la prochaine ligne ; finalement, une fois que tout est exprimé au point P, nous sommes repassé en base f_i. Comme par définition, $\Lambda_i^k = \partial x^k / \partial y^i$, nous avons, finalement

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{\partial^2 x^k}{\partial y^i \partial y^j} \frac{\partial y^m}{\partial x^k} \tag{B.5}$$

Vous pouvez par exemple démontrer que dans le plan muni de coordonnées polaires $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, tous les coefficients sont nuls exceptés

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} ; \Gamma_{22}^1 = -r \tag{B.6}$$

B.2. Généralisation.

L'exercice ci-dessus impliquait une bonne dose de manipulation d'indices qui nous font parfois perdre de vue la forêt qui est derrière. Refaisons les calculs, mais cette fois de façon plus golbal, en utilisant les formes différentielles (voir appendice C). Supposons à nouveaux que nous disposons de coordonnées cartésiennes x^i dans un espace euclidien, et que nous voulons calculer la connexion affine pour des coordonnées curviligne $y^i = y^i(x^1, ...x^n)$. Comme plus haut, nous noterons les vecteurs de base des coordonnées x^i par e_i et ceux associés aux coordonnées y^i par f_i. La relation entre les deux bases en chaque point P s'écrit

$$(f_1, f_2, ...f_n) = (e_1, e_2, ...e_n)\Lambda \tag{B.7}$$

où à nouveau $\Lambda_i^k = \partial x^k / \partial y^i$ est le tenseur de passage entre les deux bases. Différentions la relation ci-dessus :

$$\begin{aligned}(df_1, ..., df_n) &= (de_1, ..., de_n)\Lambda + (e_1, ..., e_n).d\Lambda \\ &= (e_1, ..., e_n).d\Lambda\end{aligned}$$

Nous sommes passé de la première ligne à la deuxième en utilisant le fait que les différentielles des vecteurs e_i sont nulles, puisqu'ils représentent des coordonnées cartésiennes. Maintenant, en utilisant le fait que $(e_1, ...e_n) = (f_1, f_2, ...f_n)\Lambda^{-1}$, nous trouvons la connexion affine pour la base des f_i :

$$(df_1, ..., df_n) = (f_1, f_2, ...f_n)\Lambda^{-1}.d\Lambda$$

et donc

$$\omega = \Lambda^{-1}.d\Lambda$$

qui n'est bien sûr rien d'autre que la relation (B.5) écrit sous forme de formes différentielles.

Exemple : coordonnées polaires (encore). Nous avons $(e_r, e_\theta) = (e_x, e_y)\Lambda$ où

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

Nous avons donc

$$d\Lambda = \begin{pmatrix} -\sin\theta.d\theta & -\sin\theta.dr - r\cos\theta.d\theta \\ \cos\theta.d\theta & \cos\theta.dr - r\sin\theta.d\theta \end{pmatrix}$$

et

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta/r & \cos\theta/r \end{pmatrix}$$

Nous trouvons alors pour $\omega = \Lambda^{-1}.d\Lambda$:

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & -rd\theta \\ (1/r)d\theta & (1/r)dr \end{pmatrix}$$

qui est bien sûr la même chose que la relation (B.6).

Exercices. Dériver les coefficients de christoffel en coordonnées sphériques.

B.3. Généralisation de généralisation.

Nous n'avons pas à nous restreindre aux changement de coordonnées curviligne à partir de coordonnées cartesiennes d'un esapce euclidien : la méthode ci-dessus se généralise à n'importe quel changement de coordonnées. Supposons que nous disposons de coordonnées x^i pour une variété différentielle quelconque et nous disposons, pour ces coordonnées, d'une connexion affine :

$$(de_1, ..., de_n) = (e_1, ..., e_n)\omega \tag{B.8}$$

et nous cherchons la connexion affine $\bar{\omega}$ pour les coordonnées $y^i = y^i(x^1, ...x^n)$. Comme d'habitude, nous avons une relation entre les vecteurs des deux bases :

$$(f_1, f_2, ...f_n) = (e_1, e_2, ...e_n)\Lambda$$

En différentiant la relation ci-dessus et en utilisant la connexion affine des e_i (éq.B.8), nous trouvons

$$\begin{aligned}(df_1,...df_n) &= (de_1,...de_n)\Lambda+(e_1,...,e_n).d\Lambda \\ &= (e_1,...,e_n)\omega\Lambda+(e_1,...,e_n).d\Lambda \\ &= (f_1,...f_n)[\Lambda^{-1}\omega\Lambda+\Lambda^{-1}d\Lambda]\end{aligned}$$

Ce qui nous donne la connexion affine pour les f_i :

$$\bar{\omega}=\Lambda^{-1}\omega\Lambda+\Lambda^{-1}d\Lambda \tag{B.9}$$

La relation ci-dessus nous permet de calculer aisement une nouvelle connexion affine après un changement de coordonées. Notez également que ω ne se comporte pas comme un tenseur, puisque si c'était le cas, lors d'un changement de base nous n'aurions dû trouver que le terme $\Lambda^{-1}\omega\Lambda$. Le terme additionnel dans la relation, $\Lambda^{-1}d\Lambda$ empêche ω de se comporter comme un tenseur honnète.

C. Les formes différentielles.

Je ne donne ici qu'un très bref aperçu des choses à savoir sur les formes différentielles. Pour une approche plus approfondie, se reporter à mon cours de mathématiques. Un des meilleures livres d'introduction sur ce sujet est celui de HM Edwards, "Advanced calculus : a differentiel form approach".

Les formes differentielles sont, en gros, les expressions qui apparaissent sous le signe $\int$. Dans l'espace à trois dimension par exemple, une 1-forme est une expression du genre $\omega = Adx + Bdy + Cdz$ où A, B, C sont des fonctions de x, y, z. Une 2-forme est de la forme $Adxdy + Bdydz + Cdzdx$. Il faut comprendre le produit $dxdy$ comme un produit vectoriel : $dxdy = -dydx$ et bien sûr, $dxdx = dydy = dzdz = 0$.

Une fonction sacalaire est une 0-forme. La dérivée (on appelle cela la dérivation extérieure) d'une 0-forme $f(x, y, z)$ est $\omega = df = (\partial_x f)dx + (\partial_y f)dy + (\partial_z f)dz$. La dérivation des formes supérieures suit le même principe : chaque coefficient d'un élément est dérivé ; si nous rencontrons des éléments du genre $dxdx$, ils valent zéro ; nous arrangeons les expression $\alpha dxdy + \beta dydx$ en $(\alpha - \beta)dxdy$. Par exemple, si $\omega = Adx + Bdy + Cdz$,

$$\begin{aligned} d\omega &= (\partial_x A)dxdx + (\partial_y A)dydx + (\partial_z A)dzdx + \ldots \\ &= (\partial_x B - \partial_y A)dxdy + (\partial_y C - \partial_z B)dydz + (\partial_z A - \partial_x C)dzdx \end{aligned}$$

qui, en langage du calcul vectoriel, s'appelle le rotationnel.

La dérivation de produit d'une $m-$forme ω_1 et d'une $k-$forme ω_2 suit (presque) la règle habituelle :

$$d(\omega_1\omega_2) = (dw_1)\omega_2 + (-1)^m\omega_1 d\omega_2$$

Le théorème le plus fameux sur l'intégration des formes différentielles est appélé le thèorème de Stokes :

$$\int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega$$

où ω est une $k-$forme dans un espace à n dimension, S un domaine de cet espace de dimension $k+1$, et ∂S la frontière qui entoure ce domaine. En langage du calcul vectoriel à trois dimensions, on donne plusieurs noms à ce théorème. Par exemple, la circulation d'un vecteur le long d'une courbe fermée est égale au flux du rotationnel de ce vecteur à travers la surface entourée par la courbe ; le flux d'un vecteur à travers une surface fermée est égale à l'intégrale de la divergence de ce vecteur dans le volume entrouré par cet élément ...

D. Connexion sphérique.

A écrire en détail. Essayer de trouver la connexion avec et sans passer par 3d embedding.

E. La courbure d'une connexion sphérique.

A écrire en détail.