

# Cours de mathématique

B. Fourcade  
22 septembre 2019

## *Table des matières*

|   |           |
|---|-----------|
| Table des matières  | 1         |
| <b>I Analyse complexe</b>   | <b>5</b>  |
| <b>1 Fonctions d'une variable complexe</b>  | <b>7</b>  |
| 1.1 Introduction . . . . .  | 7         |
| 1.2 Continuité . . . . .  | 8         |
| 1.3 Différentiabilité . . . . .   | 8         |
| 1.4 Potentiel et fonction de courant en physique . . . . .                        | 11        |
| 1.5 La différentiation complexe et l'idée des transformations conformes . . . . . | 12        |
| 1.6 Le théorème de l'application conforme de Riemann . . . . .                    | 14        |
| 1.7 L'idée des transformations conformes . . . . .                                | 16        |
| 1.8 L'exemple de la sphère de Riemann . . . . .                                   | 18        |
| <b>2 Intégration</b>  | <b>21</b> |
| 2.1 Intégrales . . . . .  | 21        |
| 2.2 Intégrale sur des chemins . . . . .   | 22        |
| 2.3 Intégrale de Cauchy . . . . .   | 23        |
| 2.4 Conséquences . . . . .  | 26        |
| 2.5 Formule intégrale de Cauchy . . . . .   | 28        |
| 2.6 Le logarithme . . . . .   | 29        |
| 2.7 Réponse linéaire . . . . .  | 30        |
| 2.8 Series et développement en série des fonctions analytiques . . . . .          | 33        |
| <b>3 Fonctions analytiques</b>  | <b>35</b> |
| 3.1 Fonctions analytiques . . . . .   | 35        |

|           |  |           |
|-----------|--|-----------|
| 3.2       | Prolongement analytique . . . . .  | 36        |
| 3.3       | Autres théorèmes . . . . .   | 38        |
| 3.4       | Exemples de fonctions analytiques . . . . .  | 44        |
| 3.5       | Fonction puissance . . . . .   | 47        |
| 3.6       | Singularités . . . . .   | 47        |
| 3.7       | Séries de Laurent . . . . .  | 48        |
| <b>4</b>  | <b>Transformations intégrales</b>  | <b>55</b> |
| 4.1       | Séries de Fourier . . . . .  | 55        |
| 4.2       | Transformée de Fourier . . . . .   | 57        |
| 4.3       | Transformée de Laplace . . . . .   | 58        |
| 4.4       | Application : Description hydrodynamique des phénomènes en matière condensée . . . . . | 59        |
| 4.5       | Méthodes du col et de la phase stationnaire . . . . .                                  | 62        |
| <b>5</b>  | <b>Résidus</b>   | <b>67</b> |
| 5.1       | Calcul des résidus . . . . .   | 67        |
| 5.2       | Évaluation d'intégrales définies . . . . .   | 70        |
| 5.3       | Intégrale du type $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ . . . . .                          | 70        |
| 5.4       | Produits infinis . . . . .   | 71        |
| 5.5       | Fonction Gamma . . . . .   | 72        |
| 5.6       | Fonction Zeta de Riemann . . . . .   | 74        |
| 5.7       | Problèmes . . . . .  | 76        |
| <b>II</b> | <b>Fonctions de Green</b>  | <b>79</b> |
| <b>1</b>  | <b>Introduction</b>  | <b>81</b> |
| 1.1       | Introduction . . . . .   | 81        |
| 1.2       | L'espace $\mathcal{L}^2$ . . . . .   | 82        |
| <b>2</b>  | <b>Distributions</b>   | <b>85</b> |
| 2.1       | Solutions élémentaires . . . . .   | 88        |
| 2.2       | Equations aux dérivées partielles du 1er ordre: Méthode des caractéristiques           | 88        |
| <b>3</b>  | <b>Le problème de Sturm-Liouville</b>  | <b>89</b> |
| 3.1       | Existence des fonctions propres (vecteurs propres) . . . . .                           | 95        |
| 3.2       | Fonctions de Green et développement sur une base propre . . . . .                      | 97        |

|   |            |
|---|------------|
| <b>4 Applications des fonctions de Green</b>  | <b>99</b>  |
| 4.1 Fonctions de Green pour le problème de Poisson . . . . .  | 99         |
| 4.2 Fonctions de Green sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ . . . . .   | 100        |
| 4.3 Fonctions de Green pour des problèmes dépendants du temps . . . . .   | 101        |
| <b>5 Polynômes orthogonaux et fonctions de Bessel</b>   | <b>103</b> |
| 5.1 Généralité sur les polynômes orthogonaux . . . . .  | 103        |
| 5.2 Polynômes de Legendre . . . . .   | 106        |
| 5.3 Polynômes d’Hermite et de Laguerre . . . . .  | 108        |
| 5.4 Applications physiques . . . . .  | 108        |
| 5.5 Fonctions de Bessel . . . . .   | 110        |
| 5.6 Fonction génératrice des fonctions de Bessel . . . . .  | 115        |
| 5.7 Diffraction de Fraunhofer . . . . .   | 116        |
| 5.8 Épilogue 1 . . . . .  | 117        |
| 5.9 Peut-on entendre la forme d’un tambour (Kac ,1966)? La réponse est<br>non! (Bérard, Gordon et al, 1992) . . . . . | 118        |
| 5.10 Fonctions de Bessel modifiées. . . . .   | 118        |
| 5.11 Épilogue 2 . . . . .   | 120        |
| <b>A Rappels de topologie sur un espace métrique</b>  | <b>121</b> |
| A.1 Ouverts, fermés, compacts . . . . .   | 121        |
| <b>Bibliographie</b>  | <b>127</b> |
| <b>Bibliographie</b>  | <b>127</b> |



Première partie  
Analyse complexe



# Fonctions d'une variable complexe

Pour cette partie, on pourra consulter les références [6, 4, 3, 2, 5]

## 1.1 Introduction

Soit une fonction, pour l'instant supposée uni-valuée, associant à chaque point  $z$  du plan complexe un autre nombre complexe  $w$ . Nous notons :

$$w = f(z) \quad (1.1)$$

La notion de fonction étant très générale, nous nous limiterons aux fonctions  $f(z)$  données par la paire de fonctions réelles  $u(x,y)$  et  $v(x,y)$  avec  $z = x + iy$  ( $i^2 = -1$ ), où  $z$  est un point d'un domaine  $\Omega$  du plan complexe

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \quad (1.2)$$

Sans autres hypothèses, on ne peut aller plus en avant. Par contre, si la fonction est  $f(z)$  est continue et si elle est différentiable, cette deuxième propriété impliquant la première, les conséquences sont importantes et très surprenantes. Voici quelques exemples qui nous intéresseront par la suite :

1. Toutes les fonctions différentiables du plan complexe donnent les solutions de l'équation de Laplace.
2. Si  $f(z)$  est holomorphe sur un domaine  $\Omega$ , son maximum est sur la frontière de  $\Omega$ .
3. Deux fonctions analytiques, c'est-à-dire développables en série entière, qui coïncident sur un sous-ensemble non discret (segment, voisinage d'un point, etc.) d'un ouvert  $\Omega$  coïncident sur  $\Omega$ .<sup>1</sup> Cette propriété est absolument remarquable. Il suffit de connaître la fonction dans un voisinage d'un point pour la connaître dans tout le domaine de définition. On remarque l'analogie avec les polynômes de degré  $n$  qui sont eux parfaitement déterminés par leurs  $n$  racines.

Les fonctions holomorphes généralisent les polynômes complexes, mais ce sont des objets beaucoup plus flexibles : l'inverse d'une fonction holomorphe, son logarithme ou sa racine carrée, la division de deux fonctions holomorphes etc. sont des fonctions holomorphes alors que ces opérations ne laissent pas invariant l'ensemble des polynômes à variables complexes.

---

1. Un ouvert  $\Omega$  et tel que pour chaque point de  $\Omega$  il existe un disque centré en ce point contenu dans  $\Omega$ .

## 1.2 Continuité

**Définition 1.**

$$\lim_{\zeta \rightarrow z} f(\zeta) \text{ existe et } \lim_{\zeta \rightarrow z} = f(z) \quad (1.3)$$

ou de façon équivalente:

**Définition 2.** Soit  $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$  une suite de points telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \quad (1.4)$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(z) \quad (1.5)$$

Il est bien évident que ces définitions impliquent que les fonctions réelles  $u(x, y)$  et  $v(x, y)$  soient elles aussi continues<sup>2</sup>.

## 1.3 Différentiabilité

**Définition 3.**

$$\lim_{\zeta \rightarrow z} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \text{ existe et est notée } f'(z) \quad (1.6)$$

**Définition 4.** Une fonction qui est définie et différentiable au sens des complexes en tous points d'une région  $\Omega$  est dite **HOLOMORPHE** dans cette région. On parle ici de région et cette notion ne porte que sur les points intérieurs. Dans certaines présentations, on rajoute une condition: la fonction est holomorphe si sa dérivée est continue. Nous verrons que cela n'a aucune importance, car la fonction sera nécessairement infiniment dérivable.

### Conditions de Cauchy-Riemann

Les fonctions régulières possèdent une structure interne surprenante (nous verrons que les fonctions holomorphes sont nécessairement analytiques, donc  $C^\infty$ ). Un point  $z = x + iy$  étant donné, il existe deux et seulement deux méthodes pour approcher  $z$  dans (1.6). Nous pouvons poser

1. Soit  $\zeta = x + \epsilon + y$ .
2. Soit  $\zeta = x + i(y + \epsilon)$

---

2. Une fonction dont la  $k$ ème dérivée est continue est dite de classe  $C^k$ .



et former le quotient dans les deux cas:

$$\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \quad (1.7)$$

**Théorème 1.** Soit  $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

1. La première méthode donne  $f'(z) = u_x + iv_x$
2. La deuxième méthode donne  $f'(z) = \frac{1}{i}(u_y + iv_y)$

Mais il faut que le résultat soit unique. D'où le théorème:

**Théorème 2.** (Cauchy) Si  $f(z) = u + iv$  est différentiable en un point, alors les dérivées partielles obéissent à

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.8)$$

Cette propriété conduit immédiatement au résultat suivant:

**Théorème 3.** Si  $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$  est différentiable, alors  $u(x,y)$  et  $v(x,y)$  satisfont tous les deux à l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (1.9)$$

## Dérivées complexes

Soit  $f = u + iv$  une fonction  $C^1$ . Nous pouvons penser  $f(x,y)$  comme une fonction de  $z$  et  $\bar{z}$ ,  $f(z, \bar{z})$ . Nous définissons:

$$\frac{\partial}{\partial z} f = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) f \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) f \quad (1.11)$$

**Exercice 1.** Montrer que la condition  $\partial f / \partial \bar{z} = 0$  est équivalente à reformuler les conditions de Cauchy-Riemann.

**Exercice 2.** Vérifiez que chacune des fonctions suivantes est holomorphe dans le domaine où elle est définie:

1.  $f(z) = \sin z - \frac{z^2}{z+1}$ .
2.  $f(z) = e^{2z-z^3} - z^2$ .
3.  $f(z) = \frac{\cos z}{z^2+1}$ .

$$4. f(z) = z(\tan z + z).$$

**Exercice 3.** Vérifier que les fonctions suivantes ne sont pas holomorphes :

$$1. f(z) = |z|^4 - |z|^2.$$

$$2. f(z) = \frac{\bar{z}}{z^2+1}.$$

$$3. f(z) = z(\bar{z}^2 - z).$$

$$4. f(z) = \bar{z}(\sin z)(\cos \bar{z}).$$

**Exercice 4.** Vérifier

$$\frac{\partial}{\partial z} z = 1, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} z = 0 \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} z = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z} = 1 \quad (1.13)$$

**Exercice 5.** Vérifier que chacune des fonctions suivantes est harmonique :

$$1. f(z) = \operatorname{Re} z.$$

$$2. f(z) = x^3 - 3xy^2.$$

$$3. f(z) = |z|^2 - 2x^2.$$

$$4. f(z) = e^x \cos y.$$

**Exercice 6.** Vérifier que chacune des fonctions suivantes n'est pas harmonique

$$1. f(z)|z|^2.$$

$$2. f(z) = \bar{z} \sin z.$$

$$3. f(z) = f(\bar{z}) = e^{\bar{z} \cos z}.$$

**Exercice 7.** Pour chacune des fonctions réelles et harmoniques suivantes, trouver une fonction  $v$  réelle et harmonique telle que  $f = u + iv$  soit holomorphe :

$$1. u(z) = e^x \sin y.$$

$$2. u(z) = 3x^2y - y^3.$$

$$3. u(z) = e^{2y} \sin x \cos x.$$

$$4. u(z) = x - y.$$

**Exercice 8.** Utilisant  $\partial/\partial x = \partial r/\partial x \cdot \partial/\partial x + \dots$ , démontrer que :

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{i}{2} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{i}{2} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (1.15)$$

**Exercice 9.** Démontrer que les conditions de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires prennent la forme :

$$r \cdot u_r = v_\theta \text{ et } r \cdot v_r = -u_\theta \quad (1.16)$$

## 1.4 Potentiel et fonction de courant en physique

En raison des conditions de Cauchy-Riemann, nous avons la propriété suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.17)$$

qui peut être interprété comme la condition d'orthogonalité des deux vecteurs gradients  $\nabla u \cdot \nabla v = 0$ . On en conclut que les isoclines  $u = \text{const.}$  et  $v = \text{const.}$  se coupent à angle droit. En électromagnétisme,  $u$  est associé au potentiel électrique et la condition  $v = \text{const.}$  donne les lignes de champ.

Une autre application est donnée par la fonction courant en mécanique des fluides. Nous considérons un fluide incompressible et non visqueux. Nous sommes intéressés à trouver le champ de vitesse  $\mathbf{v}(x,y)$ . Cette question n'est pas évidente, car tout dépend des conditions aux limites, c'est-à-dire que la géométrie du domaine est importante.

Si  $\mathbf{v}$  est le champ de vitesse d'un fluide irrotationnel, nous pouvons l'écrire comme un gradient :

$$\begin{aligned} v_x &= \partial_x \phi \\ v_y &= \partial_y \phi \end{aligned} \quad (1.18)$$

où  $\phi$  définit le potentiel des vitesses. Supposons maintenant le fluide incompressible, alors  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ , et le champ de vitesses peut être écrit comme le rotationnel d'une fonction appelée fonction de courant  $\chi$

$$\begin{aligned} v_x &= \partial_y \chi \\ v_y &= -\partial_x \chi \end{aligned} \quad (1.19)$$

Les courbes  $\chi = \text{cst}$  sont les lignes de courant, car les particules de fluide se meuvent tangentiellement aux lignes  $\chi(x,y) = \text{cste}$ .<sup>3</sup> Les deux représentations, soit par  $\phi$ , soit par  $\chi$ , devant nécessairement être les mêmes, on retrouve les conditions de Cauchy-Riemann pour la fonction  $\phi(x,y) + i\chi(x,y)$

$$\partial_x \phi = +\partial_y \chi \quad (1.20)$$

$$\partial_y \phi = -\partial_x \chi \quad (1.21)$$

Nous pouvons donc former la fonction complexe

$$F = \phi + i\chi \quad (1.22)$$

---

3. le vecteur  $-d\chi/dy, d\chi/dx$  est tangent à cette courbe. Prendre un cercle  $x^2 + y^2 = R^2$  pour s'en convaincre.

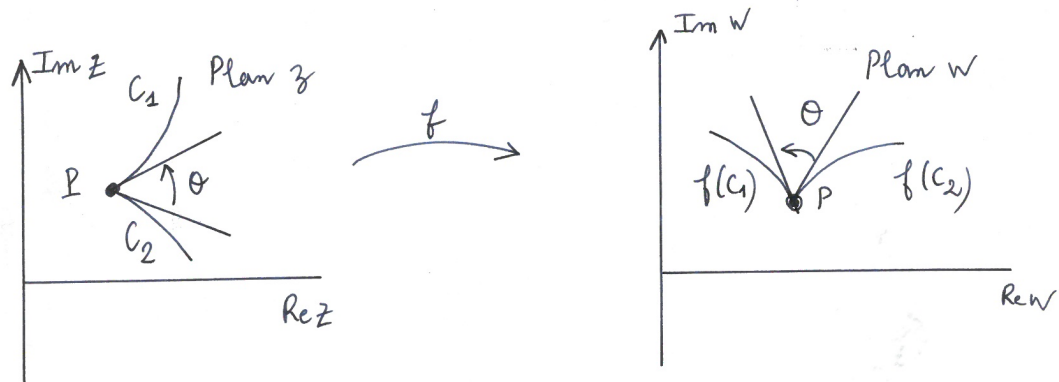


FIG. 1.1 –: Une transformation conforme préserve les angles et revient à une composition d'une rotation et d'une dilation locales.

qui est généralement appelée potentiel des vitesses.

En mécanique des fluides, les solutions  $\mathbf{v}(x,y)$  sont données par des conditions aux limites. La condition la plus naturelle est que la vitesse  $\mathbf{v}(x,y)$  est parallèle aux frontières du domaine considéré. Lorsque la géométrie de ce domaine est simple, on peut facilement trouver une solution. Par exemple, pour une solution limitée par un plan,  $\mathbf{v}(x,y) = v_0$  :

$$\phi(x,y) = v_0 \operatorname{Re}(z) \quad (1.23)$$

L'outil des transformations conformes que nous allons aborder permet de trouver la solution dans des géométries beaucoup plus complexes en procédant par changement de repère. Pour aller de l'avant, il faut mieux définir ce qu'est une application du plan complexe sur lui-même.

## 1.5 La différentiation complexe et l'idée des transformations conformes

Une transformation du plan complexe sur lui-même est dite conforme en un point  $P$  si elle préserve les angles en  $P$  et si elle dilate-contracte l'espace de façon uniforme dans toutes les directions. Une transformation conforme est par essence une

transformation locale où le facteur de dilation et l'angle de rotation sont des fonctions locales du point où la transformation est effectuée. Nous allons montrer:

**Théorème 4.** *Dans un voisinage infinitésimal d'un point  $P$  où  $f'(P) \neq 0$ , l'application  $z \rightarrow w = f(z)$  est la composée d'une rotation d'angle  $\arg |f'(P)|$  et d'une dilatation par un facteur d'échelle  $|f'(P)|$ . Les deux application conservant les angles, la propriété sera démontrée. Lorsque  $f'(P) = 0$ , la structure au voisange de  $P$  est plus complexe et sera examinée dans le cadre du prolongement analytique.*

Supposons  $f$  holomorphe dans un voisinage de  $P$  et soient  $w_{1,2}$  deux nombres complexes de module unité. les deux  $w_{1,2}$  définissent donc des vecteurs unités dans le plan complexe.

Nous définissons les dérivées directionnelles suivant  $w_{1,2}$  par :

$$D_{w_1}f(P) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(P + tw_1) - f(P)}{t} \quad (1.24)$$

$$D_{w_2}f(P) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(P + tw_2) - f(P)}{t} \quad (1.25)$$

On remarque que tout comme  $f(z)$ ,  $D_{w_1}$  et  $D_{w_2}$  sont des nombres complexes. Nous pouvons identifier les parties réelles et imaginaires aux composantes d'un vecteur. Nous aurons :

1.  $|D_{w_1}f(P)| = |D_{w_2}f(P)|$
2. Si  $|f'(P)| \neq 0$ , alors l'angle  $\theta$  entre  $w_1$  et  $w_2$  est égal à l'angle entre  $D_{w_1}f(P)$  et  $D_{w_2}f(P)$ .

Ces deux propriétés peuvent être démontrées de la manière suivante. Soit  $f = u + iv$ .  $f$  définit une application du plan réel sur lui-même  $(x,y) \rightarrow (u,v)$  dont le Jacobien en  $P$  est la matrice

$$J(P) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

Cette matrice donne la façon avec laquelle  $f$  transforme le plan complexe en lui-même dans un voisinage local du point  $P$ . Dans ce voisinage, l'approximation linéaire de  $f$  est satisfaisante et  $f$  peut être représentée par cette matrice. qui peut être ré-écrite en utilisant les conditions de Cauchy

$$J(P) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ -u_y & u_x \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

Posons  $r^2 = u_x^2 + v_y^2$  et nous pouvons écrire  $J(P)$  comme le produit d'une matrice orthogonale de déterminant 1 et d'une dilatation. Posons  $\cos \psi = u_x/r$   $\sin \psi = -u_y/r$

$$J(P) = r \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

Les matrices orthogonales de déterminant 1 étant associées à des rotations directes dans le sens horaire, elles préservent les angles tout comme les dilatations.

**Note 1.** Une application conforme transforme donc un carré élémentaire en un carré élémentaire. Il s'agit d'un résultat infinitésimal : ce résultat ne peut pas être généralisé à des pavages grossiers. On verra que tout ouvert SIMPLEMENT CONNEXE du plan complexe peut être mis en bijection continue avec le disque unité par le théorème de l'application conforme de Riemann.

**Exercice 10.** On considère la fonction holomorphe  $f(z) = z^2$ . Calculez la dérivée de  $f$  au point  $P = 1 + i$ . Calculez la matrice du Jacobien en  $P$  comme une matrice  $2 \times 2$ . Vérifiez directement que cette matrice est la composition d'une dilatation et d'une rotation et donner l'angle de cette rotation.

**Exercice 11.** Faire le même exercice avec la fonction  $h(z) = e^z$  au point  $P = 2 - i$ .

## 1.6 Le théorème de l'application conforme de Riemann

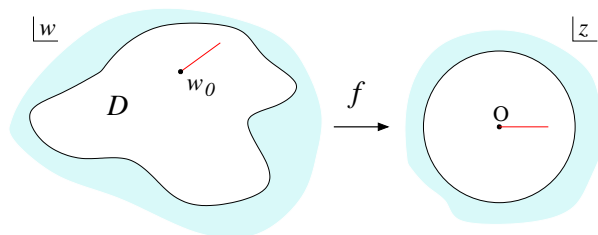
**Théorème 5.** Soit  $U$  un ouvert simplement connexe<sup>4</sup> du plan complexe DISTINCT du plan. Il existe une unique bijection holomorphe continue entre  $U$  et le disque unité  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  (ce qui veut aussi dire que l'application inverse  $f^{-1}$  est aussi continue). En d'autres mots, n'importe quel domaine fini de  $\mathbb{C}$  est topologiquement conforme au disque unité.

Ce théorème a été énoncé pour la première fois par Riemann dans sa thèse. Il semblerait que la preuve soit beaucoup moins évidente que la preuve de physicien que nous détaillons ici. Remarquons que la fonction

$$-\frac{1}{2\pi} \ln z = -\frac{1}{2\pi} [\ln|z| + i\theta] \quad (1.29)$$

---

4. Simplement connexe : tout parcours fermé peut être réduit à un point sans sortir du domaine. À ne pas confondre avec connexe dont la définition est : ne peut pas avoir une partition en deux ouverts disjoints. C'est le cas d'un intervalle.

FIG. 1.2 –: *Le théorème de l'application conforme de Riemann.*

a pour partie réelle  $\phi_1(x,y) = -1/2\pi \ln|z|$ . Elle est solution de l'équation de Laplace avec un terme source en fonction delta à l'origine  $w_0 = 0$

$$\Delta\phi = \delta(w) \quad (1.30)$$

qui donne le potentiel électrostatique en dimension 2 pour une charge électrique unité placée à l'origine. Remarquons que nous avons volontairement changé de notations en appelant le plan complexe le plan des  $w$ .

Nous pouvons, bien sûr, rajouter une constante pour que  $\phi$  soit au potentiel 0 sur la frontière du disque unité. Pour toute fonction  $\phi_1$ , nous montrerons plus tard que nous pouvons trouver une fonction conjuguée harmonique  $\phi_2$ . Supposons que nous puissions trouver la solution du problème électrique dans l'espace  $w$  et appelons  $\Phi(w)$  la fonction associée. Nous posons

$$\phi_1 + i\phi_2 = \Phi(w) = -\frac{1}{2\pi} \ln(z e^{i\alpha}) \quad (1.31)$$

qui définit une nouvelle variable  $z$ . La transformation  $w \rightarrow z$  définie par

$$z = e^{-i\alpha} e^{-2\pi\Phi(w)} \quad (1.32)$$

associe le domaine  $D$  (variable  $w$ ) au disque unité (variable  $z$ ). En effet, lorsque  $|z| = 1$ ,  $\Phi(w) = 0$ , donc  $w$  est sur le bord  $\partial D$  et lorsque  $z \rightarrow 0$ ,  $\Phi(w)$  tend bien vers l'infini, donc  $w$  tend vers 0, là où est la charge. La variable  $\alpha$  est un angle arbitraire, car nous pouvons toujours faire une rotation dont l'axe passe par le centre du cercle.

Cette démonstration, en réalité, n'est pas une. Nous avons supposé que problème électrique avait toujours une solution, ce qui n'est pas nécessairement le cas pour des frontières suffisamment irrégulières. Bien qu'il s'agisse d'un résultat « naturel », la démonstration de ce théorème est loin d'être évidente et nous entrainerait trop

loin. Une conséquence immédiate de ce théorème est que toute question concernant les fonctions holomorphes et analytiques peut être ramenée soit au disque unité, soit au plan complexe.

**Exemple 1.** MÉTHODE DES IMAGES:

*Trouvons l'application qui associe le plan supérieur au disque unité. Il faut donc trouver un potentiel électrique qui est nul sur l'axe réel. Pour le trouver, considérons un argument de symétrie. Si une charge ponctuelle de signe + localisée en  $(0, i)$  crée un potentiel, nous pouvons lui associer une charge de signe - localisée en  $(0, -i)$ . Par symétrie, le potentiel total est nécessairement nul sur l'axe réel. C'est ce qu'on appelle la méthode des images. Nous avons donc :*

$$\begin{aligned}\phi_1 + i\phi_2 &= -\frac{1}{2\pi} [\ln(w - i) - \ln(w + i)] \\ &= -\frac{1}{2\pi} \ln(e^{i\alpha} z)\end{aligned}\tag{1.33}$$

d'où

$$z = e^{-i\alpha} \frac{w - i}{w + i}\tag{1.34}$$

qui marche car si  $w \in \mathbb{R}$ ,  $|z| = 1$ , et  $z = 0$  si  $w = i$ .

## 1.7 L'idée des transformations conformes

Il s'agit d'étudier les fonctions holomorphes et bijective  $h : U \rightarrow V$ , où  $U$  et  $V$  sont deux ouverts de  $\mathbb{C}$ . Si il existe une telle application entre  $U$  et  $V$ , alors ces deux ouverts sont identiques du point de vue de l'analyse complexe. Sur le plan des applications, ces transformations permettent de trouver la solution d'équations différentielles aux dérivées partielles.

**Exemple 2.** *Cherchons à trouver la solution du problème de Dirichlet (la solution est donnée sur les frontières. Pour le problème de Neuman qui obéit au même théorème, c'est la dérivée normale qui est donnée) :*

$$\Delta u = 0 \text{ sur } \Omega \text{ et } u = f \text{ sur } \partial\Omega\tag{1.35}$$

où  $f$  est une donnée du problème. Si nous connaissons la transformation  $h(z)$  qui associe  $\Omega$  au disque unité, nous pouvons résoudre le problème comme suit. Soit  $u_0(x, y)$  la solution du problème sur le disque, alors, comme le bord de  $\Omega$  a pour image le bord du disque, la solution cherchée est  $u(x, y) = u_0 \circ h$ .



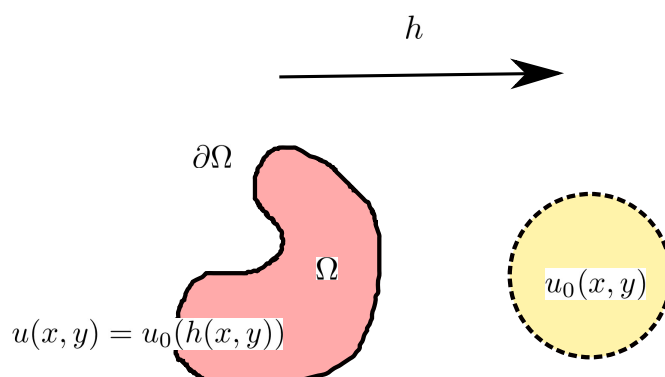
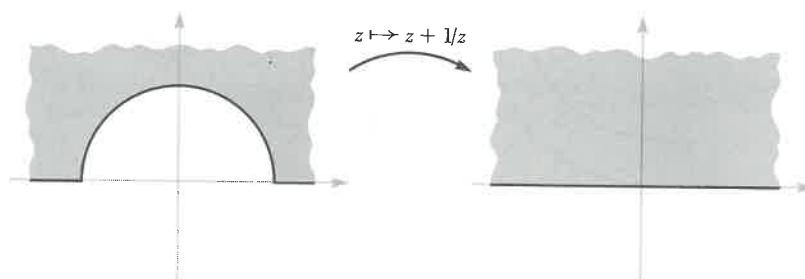


FIG. 1.3 –: Transformation conforme pour le problème de Dirichlet.

FIG. 1.4 –: Effet de  $z \rightarrow z + 1/z$ .

**Exercice 12.** *Considérez l'application:*

$$h : z \rightarrow w = h(z) = z + 1/z \quad (1.36)$$

*Cette application envoie le demi-plan supérieur à l'exclusion de la sphère unité sur le demi-plan supérieur: Pourquoi? (quelle est l'image du demi-cercle unité?) En se référant au problème hydrodynamique vu au début de ce chapitre, donner le potentiel des vitesses et les lignes de courant.*

*Rép. si  $F_0(z) = v_0 z$ , la solution est donnée par*

$$F(z) = F_0(h(z)) = v_0 \left( z + \frac{1}{z} \right) \quad (1.37)$$

et donc (cf. Figure ??):

$$\phi(r, \theta) = v_0 \left( r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta \quad (1.38)$$

$$\chi(r, \theta) = v_0 \left( r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta \quad (1.39)$$

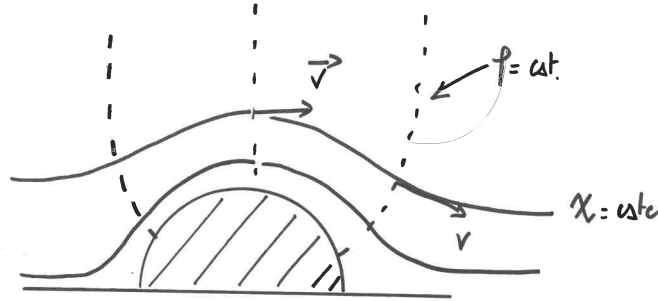


FIG. 1.5 –: Ligne de courant au voisinage d'un demi-cylindre.

## 1.8 L'exemple de la sphère de Riemann

Soit  $S^2$  la sphère de rayon unité dans  $\mathbb{R}^3$ . Nous considérons l'application  $S : S^2 \setminus \{e_3\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  où  $e_3 = (0, 0, 1)$ .  $S$  est définie par

$$S(x_1, x_2, x_3) = (1 - x_3)^{-1}(x_1, x_2) \quad (1.40)$$

Cette application associe la sphère (moins le pôle nord) au plan complexe toute entier et est connue comme la projection stéréographique de  $S^3$ . L'inverse de  $S$  est donnée par la formule

$$S^{-1}(x, y) = \frac{1}{1 + r^2}(2x, 2y, r^2 - 1), \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad (1.41)$$

On montre que  $S$  est la seule transformation conforme bijective et continue de  $S^2$  dans  $\mathbb{C}$ . Par conséquent, deux courbes ayant une intersection sur  $S^2$  à un angle  $\alpha$  ont des images dans le plan qui se coupent avec un même angle.

**Exercice 13.** *Considérer les transformations de la figure 1.7. Vérifiez que les transformations sont bijectives et que les frontières des domaines sont bien images l'une de l'autre.*

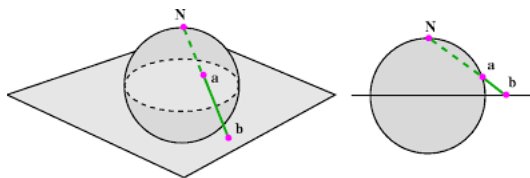


FIG. 1.6 –: La projection stéréographique associe la sphère  $S^2$  au plan complexe.

FIG. 1.7 –: Quelques transformations conformes.

**Exercice 14.** Soit  $H$  la partie supérieure du plan,  $y > 0$ . Nous désirons trouver la fonction harmonique sur  $H$  telle que

$$\begin{aligned} u(x) &= c_0 \text{ si } x \in ]-\infty, x_1] \\ u(x) &= c_1 \text{ si } x \in ]x_1, x_2[ \\ &\dots \\ u(x) &= c_n \text{ si } x \in ]x_n, +\infty[ \end{aligned} \quad (1.42)$$

1. Vérifier que la solution du problème est donnée par la partie réelle de

$$c_n + \frac{1}{i\pi} \{(c_{n-1} - c_n) \ln(z - x_n) + \dots + (c_0 - c_1) \ln(z - x_1)\} \quad (1.43)$$

2. Montrer que

$$u(x, y) = c_n + \frac{1}{\pi} \{(c_{n-1} - c_n) \theta_n + \dots + (c_0 - c_1) \theta_1\} \quad (1.44)$$

où on définira les angles  $\theta_i$  sur un schéma.

3. En utilisant ce résultat ainsi que l'un des transformations de la fig. 1.7 trouver la solution du problème suivant. Considérer un cercle dont le demi-cercle supérieur est maintenu au potentiel  $+1$  et le demi-cercle inférieur à  $\phi = 0$ . Trouver la distribution du potentiel  $\phi(x, y)$  à l'intérieur du cercle.

Rép.  $\phi(x, y) = 1 - \frac{1}{\pi} \arctan \left[ \frac{1-x^2-y^2}{2y} \right]$

**Exercice 15.** À faire en travaux dirigés:

1. La fonction  $f(z) = z^3/(x^2 + y^4)$  a-t-elle une limite quand  $z \rightarrow 0$  ?

2. Même question pour la fonction  $f(z) = xy/(x + iy)$ .
3. En quels points de  $\mathbb{C}$  les fonctions suivantes sont-elles dérivables ?
  - a)  $f(z) = x^2 + y^2$
  - b)  $f(z) = x^2 + ixy$
4. Soit  $f(z) = u(x) + iv(y)$ . Montrer que  $f$  est holomorphe si et seulement si  $f(z) = az + b$  avec  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{C}$ .
5. Si  $P$  et  $Q$ , fonctions différentiables de  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ , sont telles que les lignes  $P(x,y) = \text{constante}$  soient toujours orthogonales aux lignes  $Q(x,y) = \text{constantes}$ . La fonction  $f = P + iQ$  est-elle forcément holomorphe ?
6. Soit  $f(z)$  une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C}$ .
  - a) la fonction  $z \rightarrow \overline{f(z)}$  est-elle holomorphe ?
  - b) la fonction  $z \rightarrow f(\bar{z})$  l'est-elle ?
7. Soit  $f = P + iQ$  une fonction holomorphe sur  $U$  ouvert connexe. On fait le changement de variable polaire:

$$(r, \theta) \rightarrow (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \quad (1.45)$$

et on désigne pour préciser les notations les fonctions avec un tilde lorsqu'elles sont considérées comme des fonctions de  $r$  et  $\theta$

$$\tilde{P}(r, \theta) = P(r \cos \theta, r \sin \theta) \quad \tilde{Q}(r, \theta) = Q(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Montrer que les conditions de Cauchy-Riemann en termes des fonctions  $\tilde{P}$  et  $\tilde{Q}$  s'écrivent

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \theta} = r \frac{\partial \tilde{P}}{\partial r} \quad \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \theta} = -r \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial r} \quad (1.46)$$

# Intégration

## 2.1 Intégrales

**Définition 5.** Soit  $w = f(z)$  une fonction continue dans un domaine  $\Omega$ . Soient  $z_0$  et  $Z$  deux points arbitraires de  $\Omega$ . On définit l'intégrale en se donnant un chemin entièrement contenu dans  $\Omega$ . Ce chemin est divisé en  $n-1$  intervalles  $z_0, z_1, \dots, z_n = Z$ . Sur chaque division  $[z_{\nu-1}, z_\nu]$ , choisir un point  $\zeta_\nu$  et former la somme

$$J_n = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} (z_\nu - z_{\nu-1}) f(\zeta_\nu) \quad (2.1)$$

La limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = J \quad (2.2)$$

existe et est indépendante de la division  $z_0, z_1, \dots, z_n$  à condition que la longueur des intervalles tende vers zéro lorsque  $n$  tend vers l'infini. Cependant, la valeur de la limite  $J$  dépend du chemin.

Le problème est maintenant de calculer cette intégrale. Nous nous limitons au cas suivant :

Supposons que le chemin soit donné par  $x(t), y(t)$  avec  $t$  parcourant l'intervalle  $[\alpha, \beta]$ . Si les deux fonctions ont des dérivées  $x'(t), y'(t)$  continues, l'arc est dit RECTIFIABLE. Nous pouvons subdiviser l'intervalle  $[\alpha, \beta]$  comme

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_n = \beta$$

et poser la notation

$$z_\nu = z(t_\nu) \text{ pour } \nu = 0, 1, 2, \dots, n \quad (2.3)$$

$$\zeta_\nu = z(\tau_\nu) \text{ pour } \tau_\nu \in [t_{\nu-1}, t_\nu], \quad \nu = 1, 2, \dots, n \quad (2.4)$$

Allégeons l'écriture en posant

$$u(x(t), y(t)) = \bar{u}(t) \quad (2.5)$$

$$v(x(t), y(t)) = \bar{v}(t) \quad (2.6)$$

Les sommes  $J_n$  deviennent

$$J_n = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} (z_\nu - z_{\nu-1}) f(\zeta_\nu) = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} [x_\nu - x_{\nu-1} + i(y_\nu - y_{\nu-1})] [\bar{u}(\tau_\nu) + i\bar{v}(\tau_\nu)] \quad (2.7)$$

qui, après développement des crochets, se décompose en 4 sommes de type  $\Sigma$ . Lorsque le raffinement  $n$  tend vers l'infini, chacune des sommes approche une limite connue. Par exemple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{\nu=1}^{\nu=n} [x_\nu - x_{\nu-1}] \bar{u}(\tau_\nu) \right\} = \int_\alpha^\beta \bar{u}(t) x'(t) dt \quad (2.8)$$

D'où

**Théorème 6.** *Lorsque l'arc  $\Gamma$  est rectifiable avec  $t \in [\alpha, \beta]$*

$$J = \int_\Gamma f(z) dz = \int_\alpha^\beta (\bar{u} + i\bar{v})(x'(t) + iy'(t)) dt \quad (2.9)$$

**Exemple 3.**

$$f(z) = \frac{1}{z}, \quad \Gamma : z(t) = \cos t + i \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\int_\Gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t + i \cos t}{\sin t + i \cos t} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i \quad (2.10)$$

*résultat qui sera constamment utilisé par la suite.*

**Exemple 4.**

$$f(z) = \operatorname{Re}(z); \quad z_0 = 0, Z = 1 + i$$

*où l'intégrale est évaluée sur deux chemins :*

1. *Suivant la ligne droite  $z(t) = (1 + i)t$ . Réponse :  $J = \frac{1}{2}(1 + i)$ .*
2. *Suivant le parcours de 0 à 1 en ligne droite puis de 1 à  $1 + i$ , toujours en ligne droite. Réponse  $J = \frac{1}{2} + i$ .*

*Conclusion : Deux chemins différents peuvent donc donner deux résultats différents.*

## 2.2 Intégrale sur des chemins

Il est souvent utile d'associer une fonction continue  $\gamma$  d'un intervalle  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$  à un chemin. Lorsque  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , le chemin est fermé. Pour faciliter l'écriture, nous écrirons  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  ou  $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$ .

Prenons comme exemple le cercle de rayon  $R$ . Nous avons  $x = R \cos \theta$ ,  $y = R \sin \theta$ . Le changement de notation  $t = \theta$  est ici évident. On a  $x'(t) = -R \sin t$ ,  $y'(t) = R \cos t$  d'où  $\gamma(t) = R \cos t + i \sin t$  et  $\gamma'(t) = -R \sin t + iR \cos t$ .

**Définition 6.** *Une courbe est de classe  $C^1$ , c'est-à-dire continûment différentiable, si  $\gamma_1(t)$  et si  $\gamma_2(t)$  le sont toutes les deux. On écrira :*

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma_1}{dt} + i \frac{d\gamma_2}{dt} \quad (2.11)$$

**Théorème 7.** *Si  $f$  est de classe  $C^1$  sur un ouvert  $U$  contenant la courbe  $\gamma$ , on a la formule classique d'analyse*

$$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_a^b dt \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \frac{d\gamma_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d\gamma_2}{dt} \right] \quad (2.12)$$

*Si la fonction  $f$  est holomorphe, cette égalité peut-être réécrite en utilisant les conditions de Cauchy-Riemann*

$$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_a^b dt \frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t)) \cdot \frac{d\gamma}{dt} \quad (2.13)$$

*et cette intégrale est généralement notée :*

$$\oint_a^b dz \frac{\partial f}{\partial z}(z) \quad (2.14)$$

**Exercice 16.** *Pour chacun des cas suivants, calculer l'intégrale complexe sur le chemin  $\gamma(t)$*

1.  $f(z) = z\bar{z}^2 - \cos z$  ,  $\gamma(t) = \cos(2t) + i \sin(2t)$  ,  $0 \leq t \leq \pi/2$ .
2.  $f(z) = \bar{z}^2 - \sin z$  ,  $\gamma(t) = t + it^2$  ,  $0 \leq t \leq 1$ .
3.  $f(z) = z^3 + z/(z+1)$  ,  $\gamma(t) = e^t + ie^{2t}$  ,  $1 \leq t \leq 2$ .

## 2.3 Intégrale de Cauchy

Dans l'un des exemples précédents, nous avons montré que l'intégrale d'une fonction suivant un parcours dépendait a priori du parcours. Pour une fonction continue, on ne peut rien démontrer de plus. Par contre, si la fonction est holomorphe dans un domaine où l'arc peut être déformé, l'intégrale entre deux points ne dépend pas du parcours.

**Théorème 8.** *Soit  $w = f(z)$  une fonction régulière ou holomorphe dans un domaine  $\Omega$  supposé simplement connexe. Alors l'intégrale*

$$\int_{z_0}^Z f(z) dz$$

*est indépendante du chemin d'intégration.*

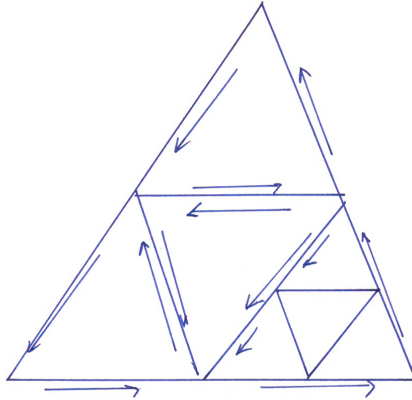


FIG. 2.1 –:

**Corollaire 1.** Prenons 2 chemins  $\Gamma_{1,2}$ . Alors

$$\int_{\Gamma_1} = \int_{\Gamma_2} \quad (2.15)$$

Soit

$$\int_{\Gamma_1} - \int_{\Gamma_2} = 0 \quad (2.16)$$

**Remarque 1.** On remarque que la condition de régularité sur la fonction  $w = f(z)$  est cruciale, car, sans cette condition, les exemples précédents ont montré que l'intégrale dépend du chemin choisi.

D'où l'énoncé équivalent du théorème de Cauchy :

**Théorème 9.** Théorème intégral de Cauchy: Soit  $w = f(z)$  une fonction régulière dans un domaine  $\Omega$  supposé simplement connexe. Alors :

$$\int_C f(z) dz = 0 \quad (2.17)$$

où  $C$  est un chemin arbitraire, pas nécessairement simple, mais FERMÉ de  $\Omega$ .

La démonstration est faite en trois étapes : le chemin est un triangle, le chemin est une ligne polygonale et, enfin, le chemin est arbitraire.

PARTIE 1: Cas du triangle. Divisons le triangle en quatre sous-triangles congruents  $T^I, T^{II}, T^{III}, T^{IV}$ . L'intégrale revient à faire la somme sur tous les côtés en sommant



éventuellement les parcours effectués en sens contraire (et qui donnent une contribution nulle une fois sommés).

$$\int_T = \int_{T^I} + \int_{T^{II}} + \int_{T^{III}} + \int_{T^{IV}} \quad (2.18)$$

Parmi les quatre triangles, il y en a un dont l'intégrale est supérieure en valeur absolue aux trois autres. Nous le notons  $T_1$

$$\left| \int_T \right| \leq 4 \left| \int_{T_1} \right| \quad (2.19)$$

Le sous-triangle  $T_1$  peut à son tour est divisé en quatre sous-triangles avec

$$\left| \int_{T_1} \right| \leq 4 \left| \int_{T_2} \right| \quad (2.20)$$

Soit au bout de  $n$  sous-divisions

$$\left| \int_T \right| \leq 4^n \left| \int_{T_n} \right| \quad (2.21)$$

Nous savons qu'il existe un seul point  $z_0$  commun à tous les triangles  $T_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, \infty$ .

Soit alors  $\epsilon > 0$ . Il existe un voisinage  $D_\delta$  de  $z_0$  tel que

$$\forall z \in D_\delta, \quad f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + \eta(z - z_0) \quad (2.22)$$

$$\text{avec } |\eta(z - z_0)| \leq \epsilon \quad (2.23)$$

Une fois donné  $\epsilon$ , nous pouvons choisir  $n$  tel que  $T_i \subset B_\delta, i \geq n$ .

D'où :

$$\int_{T_n} f(z)dz = \int_{T_n} f(0)dz - \int_{T_n} z_0 f'(z)dz + \int_{T_n} z f'(z)dz + \int_{T_n} \eta(z - z_0)dz \quad (2.24)$$

$$\int_{T_n} f(z)dz = 0 + 0 + 0 + \int_{T_n} \eta(z - z_0)dz \quad (2.25)$$

Prenant la norme,  $s_n$  étant le périmètre du triangle  $T_n$

$$\left| \int_{T_n} f(z)dz \right| \leq \epsilon \int_{T_n} |z - z_0| dz \quad (2.26)$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2} s_n^2 \quad (2.27)$$

À chaque itération, le périmètre  $s_n$  est divisé par 2. D'où

$$\left| \int_T \right| \leq \frac{1}{2} \epsilon 4^n \frac{s_0}{4^n} \quad (2.28)$$

qui peut être aussi petit que désiré. D'où le théorème.

PARTIE 2: Cas de la ligne polygonale. Il suffit alors de décomposer le chemin dur la ligne en une somme finie sur des triangles composant la ligne polygonale.

PARTIE 3: Cas du chemin arbitraire. On prend la limite d'un chemin polygonal où le nombre de segments tend vers l'infini.

Il existe une autre démonstration utilisant le théorème de Green (que nous verrons dans un chapitre ultérieur);

**Théorème 10.** *Soit un domaine  $\Omega$  fini de  $\mathbb{R}^2$  de frontière (non singulière)  $\delta\Omega$ . On suppose que  $f(x,y)$  et  $g(x,y)$  sont de classe  $C^1$  dans  $\Omega$ . Alors*

$$\int \int_{\Omega} \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\delta\Omega} (f dx + g dy) \quad (2.29)$$

Nous appliquons ce théorème à l'intégrale sur le chemin  $\delta\Omega$ :

$$\int_{\delta\Omega} f(z) dz = \int_{\delta\Omega} f(x,y)(dx + i dy) \quad (2.30)$$

Posant  $g = if$ , il vient :

$$\int_{\delta\Omega} f(z) dz = \int \int_{\Omega} \left( i \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy \quad (2.31)$$

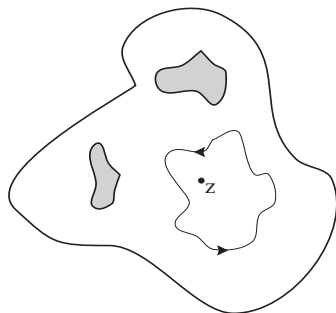
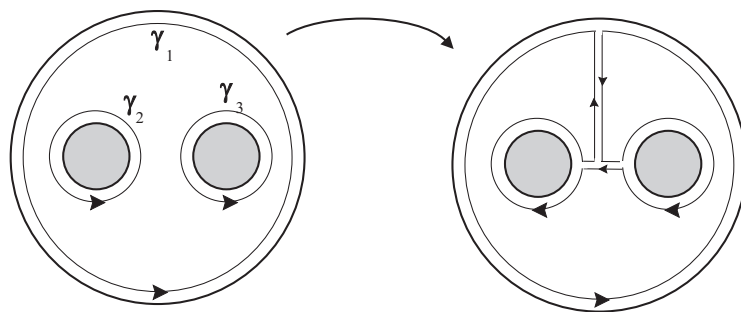
qui est nulle, car  $f(z)$  étant holomorphe, elle satisfait aux conditions de Cauchy.

## 2.4 Conséquences

**Théorème 11.** *Si l'anneau défini par les chemins  $C_1$  et  $C_2$  est tel que la fonction  $f(z)$  y soit régulière et si  $C_1$  et  $C_2$  sont orientés dans le même sens alors*

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz \quad (2.32)$$

même si la fonction  $f(z)$  n'est pas régulière dans l'intérieur de la région définie par  $C_2$ .

FIG. 2.2 –: *Le contour peut être déformé en un point.*FIG. 2.3 –: *3 contours peuvent être considérés comme 1 seul contour.*

**Théorème 12.** Si  $f(z)$  est régulière dans une région simplement connexe<sup>1</sup>  $\Omega$  et si  $f(z)$  possède une primitive  $F(z)$ , alors

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz = F(z_1) - F(z_0) \quad (2.33)$$

à condition que  $z_0, z_1$  et que le chemin d'intégration appartiennent à  $\Omega$ .

**Exemple 1.** D'après ce théorème, la fonction

$$\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$$

---

1. Une région est dite simplement connexe si tout chemin peut être rétréci à un point (en tirant sur le lacet!) sans rencontrer d'obstacle, c'est-à-dire de trou.

est une fonction régulière de  $z$  dans chaque domaine simplement connexe incluant le point  $+1$  mais pas le point  $0$ . Le domaine  $\Omega$  est donc le demi-plan  $\operatorname{Re}(z) > 0$ .

**Exercice 17.** 1. Soit  $f(z) = z^2 - z$  et  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Vérifiez le théorème de Cauchy en calculant l'intégrale.

2. Le théorème de Cauchy ne marche pas pour la fonction  $f(z) = \cot z$  sur l'anneau  $\{z \in \mathbb{C} : 1 < z < 2\}$ . Calculer l'intégrale et vérifiez que l'intégrale n'est pas zéro. Quelle hypothèse supposée dans le théorème de Cauchy n'est pas vérifiée dans ce cas?

## 2.5 Formule intégrale de Cauchy

Le théorème suivant est remarquable. Si un chemin délimite une région où une fonction est régulière, alors la valeur de cette fonction en tous points de cette région est parfaitement déterminée par ses valeurs sur le chemin, c'est-à-dire par ses valeurs sur la frontière.

**Théorème 13.** Soit  $f(z)$  une fonction régulière dans un domaine  $\Omega$ . Pour chaque chemin orienté  $C$  et pour chaque point  $z \in \Omega$ , nous avons :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (2.34)$$

si le chemin  $C$  et son intérieur sont tous les deux contenus dans  $\Omega$ .

Nous avons :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \quad (2.35)$$

La première intégrale a déjà été calculée :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{f(z)}{2\pi i} \int_C \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \quad (2.36)$$

La deuxième est équivalente à l'intégrale calculée sur un cercle  $C_z$  de centre  $z$ . Pour chaque  $\epsilon > 0$ , nous pouvons choisir le rayon du cercle  $\rho$  tel que :

$$|f(z) - f(\zeta)| < \epsilon$$

en raison de la continuité de  $f(z)$ . Nous avons alors :

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_C \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \quad (2.37)$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \frac{\epsilon}{\rho} 2\pi\rho \quad (2.38)$$

qui peut donc être aussi petit que désiré. D'où le théorème.

**Théorème 14.** *Avec les mêmes hypothèses :*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (2.39)$$

Commençons par examiner l'intégrale

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

où  $\phi(z)$  est définie sur le chemin  $\Gamma$ .

Considérons une suite  $\{z_n\}_{n \geq 0}$  de  $\Omega$  approchant  $z$  mais pour l'instant arbitraire.

Nous avons

$$\frac{f(z_n) - f(z)}{z_n - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_n)} d\zeta \quad (2.40)$$

D'où :

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{f(z_n) - f(z)}{z_n - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_n)} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \\ &= \frac{z_n - z}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - z)^2(\zeta - z_n)} d\zeta \end{aligned} \quad (2.42)$$

Soit  $M$  une borne supérieure de  $|\phi(z)|$ . Nous avons :

$$A_n \leq M \frac{|z_n - z|}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{(\zeta - z)^2(\zeta - z_n)} d\zeta \quad (2.43)$$

où l'intégrale est majorée car, pour  $n$  suffisamment grand, aucun des points n'est sur le contour. La suite  $\{z_n\}_{n \geq 0}$  tendant vers  $z$ ,  $A_n$  tend vers zéro.

Comme les dérivées d'ordre supérieur peuvent être traitées de la même manière, le théorème est démontré.  $\square$

**Remarque 2.** *Nous venons de démontrer qu'une fonction holomorphe est infiniment dérivable, ce qui est évidemment faux pour des fonctions de variable réelle.*

## 2.6 Le logarithme

**Théorème 15.** *Soit  $\Omega$  un région simplement connexe et supposons  $0 \notin \Omega$ . Alors il existe une fonction analytique  $f(z)$  unique à  $2\pi i$  près telle que  $\exp[f(z)] = z$ . Nous écrirons  $f(z) = \ln z$  et le choix de la constante arbitraire qui multiplie  $2\pi i$  est appelé COUPURE*

L'existence de cette fonction nous est assurée en prenant  $f'(z) = 1/z$ . Choisissons un point  $z_0$  arbitraire. La fonction  $\ln$  est donc définie par l'intégrale

$$\ln z = \int_{z_0}^z f'(z) dz \quad (2.44)$$

où l'intégration ne dépend du chemin si  $0 \notin \Omega$ . On ajuste la constante en se fixant une valeur de  $f(z_0)$ . Reste à démontrer que  $\exp[f(z)] = z$  si  $z \neq 0$ . Posons  $g(z) = \exp[f(z)]/z$ . La fonction  $g(z)$  est analytique dans tout domaine n'incluant pas l'origine.

Nous avons

$$g'(z) = 0 \quad (2.45)$$

D'où le résultat.

Nous aurons besoin dans la suite de la définition suivante:

**Définition 7.** Soit  $c$  une singularité d'une fonction réelle. On appelle *Partie Principale de l'intégrale de  $f(x)$  sur  $[a, b]$  avec  $c \in [a, b]$  la limite*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x) dx \right] \quad (2.46)$$

On remarque que l'intégrale  $\int_a^b dx f(x)$  n'existe pas forcément. Quand elle existe, les deux définitions coïncident.

## 2.7 Réponse linéaire

Considérons une quantité mesurable  $x(t)$ . La réponse de  $x(t)$  à un champ  $F(t)$  est linéaire :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(t-t') F(t') \quad (2.47)$$

où  $\chi(t-t')$  est une susceptibilité. Nous avons supposé le système invariant sous translation dans le temps : la réponse à l'instant  $t$  ne peut dépendre que de la différence  $t-t'$  où  $t'$  est l'instant où le champ  $F(t')$  est appliqué. Si  $F(t)$  est assimilé à un pic de Dirac, nous avons  $x(t) = \chi(t)$ . Le principe de causalité exige  $\chi(t-t') = 0, t < t'$  : La réponse est provoquée par la force et ne la précède pas.

Nous considérons maintenant la réponse du système à un champ alternatif  $F(t) = F_0 e^{-i\omega t}$ . D'où :

$$x(t) = \tilde{\chi}(\omega) F_0 e^{-i\omega t} \quad (2.48)$$

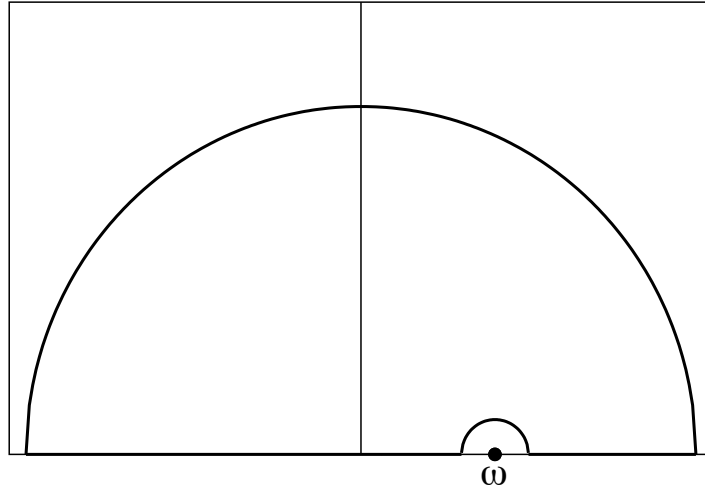


FIG. 2.4 –: Contour utilisé dans (2.54).

où la susceptibilité  $\tilde{\chi}(\omega)$  a une partie réelle et une partie imaginaire :

$$\tilde{\chi}(\omega) = \chi_1 + i\chi_2 = \int_0^{\infty} dt \chi(t) e^{i\omega t} \quad (2.49)$$

Le principe de causalité entraîne que l'intégrale est prise sur  $[0, +\infty[$ .

Comme un champ est nécessairement une quantité réelle, seule la partie réelle de (2.48) compte :

$$x(t) = \chi_1(\omega) F_0 \cos \omega t + \chi_2(\omega) F_0 \sin \omega t \quad (2.50)$$

où le premier terme oscille en phase avec  $F_0 \cos \omega t$ , alors que le deuxième est en quadrature. Nous montrons que  $\chi_1$  et  $\chi_2$  ne sont pas indépendants en raison du principe de causalité.

Posons  $z = x + iy$  avec  $x = \omega$  et définissons (2.49) dans le plan complexe supérieur :

$$\tilde{\chi}(x + iy) = \int_0^{\infty} dt \chi(t) e^{-yt} e^{ixt}, \forall y > 0 \quad (2.51)$$

car  $\chi(t)$  est nulle pour  $t \leq 0$ . Cette fonction est clairement holomorphe dans le demi-plan supérieur.

**Exercice 18.** Montrer directement que les conditions de Cauchy s'appliquent

$$d\chi_1/dx = d\chi_2/dy \quad (2.52)$$

$$d\chi_2/dx = -d\chi_1/dy \quad (2.53)$$

Le théorème intégral de Cauchy donne que l'intégrale sur le contour  $C$  de la figure 2.4 est nul :

$$\oint_C \frac{\chi(z)}{z - \omega} \quad (2.54)$$

$\xi(z)$  tendant vers 0 sur le grand cercle quand  $R \rightarrow \infty$ , nous avons

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{\omega - \epsilon} \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' + \int_{\omega + \epsilon}^{+\infty} \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \right] + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 \frac{i\epsilon e^{i\phi} d\phi}{\epsilon e^{i\phi}} \chi(\omega + \epsilon e^{i\phi}) \quad (2.55)$$

qui devient :

$$\chi(\omega) = \frac{1}{i\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{-\infty} \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (2.56)$$

où P est la partie principale définie par le crochet dans (2.55). Séparant parties réelles et imaginaires, et utilisant le fait que  $\chi_1(\omega)$  est paire et  $\chi_2(\omega)$  est impaire, on a les relations de Kramers-Kronig :

$$\chi_1(\omega) = \frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\omega' \chi_2(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} \quad (2.57)$$

$$\chi_2(\omega) = -\frac{\omega}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\chi_1(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} \quad (2.58)$$

Démonstrons cette propriété: Par définition de la partie principale et en utilisant le fait que  $\tilde{\chi}_1(\omega)$  est paire et en séprant partie réelle et imaginaire dans l'équation (2.56) :

$$\tilde{\chi}_1(\omega) = \frac{1}{2} [\tilde{\chi}_1(\omega) + \tilde{\chi}_1(-\omega)] \quad (2.59)$$

soit

$$\frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{-\infty} \frac{\chi_2(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = \frac{1}{2\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{-\infty} \frac{\chi_2(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' + \frac{1}{2\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{-\infty} \frac{\chi_2(\omega')}{\omega' + \omega} d\omega' \quad (2.60)$$

Mais

$$\frac{1}{\omega' - \omega} + \frac{1}{\omega' + \omega} = \frac{2\omega'}{\omega'^2 - \omega^2} \quad (2.61)$$

D'où le résultat.

**Exemple 5.** Nous considérons l'oscillateur hamrmonique amorti de fréquence propre  $\omega_0$

$$m\ddot{x} + m\dot{x}/\tau + m\omega_0^2 x = F(t) \quad (2.62)$$



Lorsque  $F(t)$  n'a qu'une seule composante de Fourier  $F(t) = F_0 e^{-i\omega t}$ , alors :

$$x(t) = \chi(\omega) F_0 e^{-i\omega t} \quad (2.63)$$

avec

$$\chi(\omega) = \frac{-1/m}{\omega^2 + i\omega/\tau - \omega_0^2} = \frac{-1/m}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)} \quad (2.64)$$

où

$$\omega_{1,2} = -i/2\tau \pm \tilde{\omega} \text{ avec } \tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - 1/4\tau^2} \quad (2.65)$$

Nous pouvons calculer  $\chi(t)$  en faisant la transformée de Fourier inverse

$$\chi(t) = \frac{-1}{2\pi m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)} \quad (2.66)$$

L'intégrand possède deux pôles, tous eux dans le demin plan complexe inférieur. Nous verrons que l'intégrale est nécessairement nulle pour  $t < 0$ .

## 2.8 Series et développement en série des fonctions analytiques

### Domaine de convergence

Considérons une séquence infinie  $f_0(z), f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots$ , où  $z$  est un point appartenant aux domaines de définition de toutes les fonctions  $f_n(z)$ . La série

$$\sum_{n \geq 0} f_n(z)$$

converge éventuellement. Soit  $\Omega$  le domaine de convergence : on sait que  $\Omega$  est l'intérieur d'un certain cercle dont le centre est un point  $z_0$ . Nous avons le théorème :

**Théorème 16.** (Hadamard) Soit la suite des nombres  $a_n, n > 0$ . La série  $\sum_n a_n (z - z_0)^n$  converge absolument<sup>2</sup> si  $|z - z_0| < r$  et diverge si  $|z - z_0| > r$  où  $r$  est donné par

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \quad (2.67)$$

---

2. C'est-à-dire si

$$\sum_n a_n |z - z_0|^n$$

converge.

On remarque que rien n'est dit sur ce qui se passe sur le cercle de convergence lui-même. Tout est cas d'espèce.

Souvent plus commode, on a la règle de d'Alembert

**Théorème 17.** (D'Alembert) *Le rayon du disque de convergence est déterminé par la limite*

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad (2.68)$$

## Convergence uniforme

Il existe en fait une convergence plus forte que la convergence simple d'une série. Supposons que la série  $\sum a_n z^n$  converge dans un domaine  $z \in \Omega$ , alors pour chaque  $\epsilon$  et pour chaque point  $z_1$  de  $\Omega$ , il existe un  $n_1 = n_1(\epsilon, z_1)$  tel que

$$|f_{n+1}(z_1) + f_{n+2}(z_1) + \dots + f_{n+p}(z_1)| < \epsilon, \quad \forall n > n_1, \forall p > 0$$

On remarque que  $n_1$  dépend non seulement de  $\epsilon$ , mais aussi de  $z_1$ . D'où la définition suivante :

**Définition 8.** *La série  $\sum a_n z^n$  converge UNIFORMÉMENT si  $n_1$  ne dépend que de  $\epsilon$  et non de  $z_1$  dans tout le domaine  $\Omega$ .*

Cette convergence uniforme nous assure des théorèmes suivants

**Théorème 18.** *Toute série converge de façon uniforme dans un cercle concentrique à son domaine de convergence et de rayon strictement plus petit.*

**Théorème 19.** *Considérons la série  $\sum f_n(z)$  où toutes les fonctions sont régulières dans la même région simplement connectée  $\Omega$ .*

- La série  $F(z) = \sum f_n(z)$  représente une fonction continue dans  $\Omega$ .
- Pour chaque chemin  $\Gamma$

$$\sum_n \int_{\Gamma} f_n(z) dz = \int_{\Gamma} F(z) dz$$

- La série est dérivable terme à terme et est égale à  $F^{(p)}(z)$ .

# Fonctions analytiques

## 3.1 Fonctions analytiques

### Définitions

Nous avons (enfin) la définition suivante :

**Définition 9.** La fonction  $f(z)$  est dite développable en série entière en  $z_0$  si et si seulement il existe une série entière de rayon de convergence  $r > 0$  tel que

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

Une fonction développable en série entière dans un voisinage est dite ANALYTIQUE.

**Théorème 20.** Si  $f(z)$  est une fonction holomorphe sur un ouvert  $\Omega$ . Alors  $f(z)$  est nécessairement analytique en tout point  $z_0$  de  $\Omega$  avec

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \quad (3.1)$$

En particulier

**Théorème 21.** Si  $f(z)$  est une fonction holomorphe sur un ouvert  $\Omega$ , elle est infiniment différentiable en tout point de  $\Omega$  avec

$$\forall z \in \Omega, f^{(n)}(z) = a_n n! \quad (3.2)$$

Il y a donc équivalence entre les principes d'holomorphie et d'analytité, une fonction analytique étant clairement holomorphe. Ce résultat explique une terminologie fluctuante. Suivant les sources, on parle de façon équivalente de fonctions holomorphes, analytiques, différentiables au sens des complexes, régulières ou, enfin, conformes. Enfin, on appelle fonction entière une fonction analytique sur tout le plan complexe.

**Exemple 6.** Il est évident que tout polynôme est localement la somme de son développement de Taylor.

**Exemple 7.**  $f(z) = 1/z$  est analytique sur  $\mathbb{C} \setminus 0$ , car pour  $z_0 \neq 0$ ,  $Z = z - z_0$  et

$$f(z) = \frac{1}{z_0 + Z} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{z_0^{n+1}} (z - z_0)^n \text{ si } \left| \frac{Z}{z_0} \right| < 1 \quad (3.3)$$

## 3.2 Prolongement analytique

### Prolongement par la méthode des séries

**Théorème 22.** *Soient deux fonctions  $f_1(z)$  et  $f_2(z)$  régulières dans une région  $\Omega$ . Nous supposons que  $f_1(z)$  et  $f_2(z)$  coïncident dans une région de  $z_0$  de  $\Omega$ . Cette région peut aussi être un chemin incluant  $z_0$ . Alors ces deux fonctions coïncident sur  $\Omega$ .*

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin du lemme

**Lemme 1.** *On se donne deux séries :*

$$\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n \text{ et } \sum_{n \geq 0} b_n (z - z_0)^n$$

*ayant un rayon de convergence. Si les deux séries coïncident dans un voisinage de  $z_0$  sur un nombre infini de points avec comme point limite  $z_0$ , alors les deux séries sont identiques.*

Supposons que ce lemme soit vrai: Soit  $C_0$  le plus grand cercle de centre  $z_0$  contenu dans  $\Omega$ . Les deux fonctions étant analytiques, elles sont développables en série et ces séries convergent dans  $C_0$ . D'après le lemme précédent, les deux fonctions sont identiques sur  $C_0$ .

Donnons-nous maintenant un point arbitraire  $\zeta$  de  $C_0$ . Les deux points  $z_0$  et  $\zeta$  peuvent être connectés par un chemin entièrement contenu dans  $\Omega$ . Divisons ce chemin de façon arbitraire  $z_0, z_1, z_2, \dots, z_m = \zeta$ . Pour chaque  $z_\nu$ , nous traçons le cercle  $C_\nu$  entièrement contenu dans  $\Omega$ . La division est choisie de telle sorte que chaque cercle contient le centre du suivant.

Les deux fonctions coïncidant dans  $C_0$ , elles coïncident en  $z_1$  et dans un voisinage de  $z_1$ . Elles sont développables en série en  $z_1$  et leur séries sont identiques sur  $C_1$ . Les deux fonctions sont donc identiques sur  $C_1$ . Itérant le processus, nous arrivons à  $z_{m-1}$ . Nous avons donc  $f_1(\zeta) = f_2(\zeta)$ . □

Reste à démontrer le lemme :

1. On fait  $z = z_0$ , d'où  $a_0 = b_0$ .
2. Supposons que nous ayons démontré la même propriété jusqu'au rang  $m$ ,  $a_i = b_i, 0 \leq i \leq m$ . Dans le voisinage de  $z_0$ , nous avons donc

$$a_{m+1} + a_{m+2}(z - z_0) + \dots = b_{m+1} + b_{m+2}(z - z_0) + \dots$$

Les séries de gauche et de droite représentant des fonctions continues, on peut passer à la limite  $z = z_0$ . D'où  $a_{m+1} = b_{m+1}$

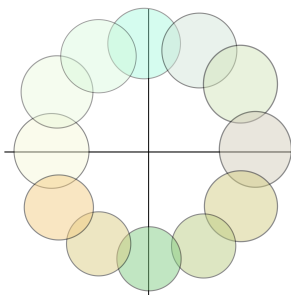


FIG. 3.1 – : *Illustration du prolongement analytique par la méthode des disques de convergence. Chaque disque a un et un seul domaine d'intersection avec le précédent. Le théorème sur l'identité des fonctions analytiques nous assure qu'on peut définir de proche en proche une seule fonction analytique dans le plan complexe. Il peut arriver que les valeurs trouvées dans le domaine commun au dernier et premier cercle ne coïncident pas. C'est le cas en particulier si la fonction analytique définie par le processus est multi-valuée (voir exemple de  $\ln z$ . La contradiction avec le théorème d'unicité n'est qu'apparente. La fonction analytique a été définie de proche en proche sur des cercles qui s'enroulent autour de l'origine. Le plan complexe en est en réalité feuilleté pour éviter les coupures (voir surfaces de Riemann).*

□

Ce théorème peut être interprété comme une extension aux fonctions analytiques du théorème des polynômes : deux polynômes coïncidant en  $n+1$  points sont identiques. Ici, il faut que les fonctions coïncident en un nombre infini de points avec un point d'accumulation.

**Remarque 3.** *Ce théorème n'a de sens que pour les fonctions analytiques et il est en règle général faux pour des fonctions infiniment dérivables. Il suffit de prendre  $f(x) = 0$ , si  $x \leq 0$  et  $f(x) = e^{-1/x^2}$  si  $x > 0$  qui ne coïncide pas avec la fonction nulle.*

**Définition 10.** *Soit  $\Omega$  un domaine et  $\mathcal{V}$  un ouvert de  $U$ . Soit  $f(z)$  une fonction définie sur  $\mathcal{V}$ . On appelle prolongement analytique de  $f(z)$  sur  $U$  toute fonction définie sur  $\Omega$  et coïncidant avec  $f(z)$  sur  $\mathcal{V}$ .*

Conclusion : pour démontrer que deux fonctions analytiques sont identiques, il suffit de le démontrer sur l'axe réel ou sur un segment  $[0,1]$ .

**Remarque 4.** FEUILLETS DE RIEMANN : *L'énoncé de ce théorème cache en fait une très grande subtilité quant au domaine de définition de la fonction analytique.*

Considérons un prolongement analytique obtenu par la méthode des séries en définissant de proche en proche des disques de convergence (voir Fig. 3.3). Chaque disque de convergence  $D_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , a une intersection non-nulle avec le précédent. Il peut arriver que la valeur de la fonction analytique définie dans le dernier disque  $D_n$  ne coïncide pas avec celle qui a été définie dans le premier  $D_1$ . En apparence, nous pouvons donc avoir deux valeurs pour un même point, ce qui contredit notre conclusion sur l'unicité du prolongement unique. Dans ce cas, il faut assimiler le plan complexe à une surface construite de proche en proche suivant un processus géométrique inventé par Riemann.

Imaginons que nous empilions une série de feuillets  $1 \leq i \leq n$ . Chaque feuillet est coupé suivant une ligne que nous pouvons assimiler à l'axe des réels négatifs. En collant par les bords de la coupure,  $x < 0$ , deux feuillets successifs, nous construisons une surface qui s'enroule comme une spirale autour de l'origine (voir l'exemple du stationnement). Projetons cette surface spirale sur le plan et nous avons défini une fonction multi-valuée sur plan. L'apparente discontinuité de la fonction analytique est donc uniquement due au fait que nous avons oublié le feuilletage de la surface de Riemann. Ce sera le cas de la fonction logarithme étudiée plus bas.

### 3.3 Autres théorèmes

**Théorème 23.** *Si  $\Omega$  est un domaine ouvert et connexe (c'est-à-dire fait d'une seul tenant). Si  $f$  est holomorphe dans  $D$  et si  $|f(z)|$  atteint son maximum dans  $\Omega$ , et NON sur la frontière  $\partial\Omega$ , alors  $f(z)$  est une fonction constante. En particulier, une fonction holomorphe atteint sa borne supérieure quelque part sur le bord  $\delta\Omega$  si  $\Omega$  est fini*

$$\sup_{z \in \Omega} |f(z)| = \sup_{z \in \delta\Omega} |f(z)| \quad (3.4)$$

Supposons qu'il existe  $z_0 \in \Omega$  où  $|f(z)|$  atteint son maximum. Définissons

$$O = \{\zeta \in \Omega : f(\zeta) = f(z_0)\} \quad (3.5)$$

et, évidemment,  $z_0 \in O$ . La fonction  $f$  étant continue,  $O$  est fermé (toute suite de  $O$  converge dans  $O$ ). Considérons  $\zeta_0 \in O$ .

Rappelons la formule intégrale de Cauchy (Cf. Théorème 2.5). Nous avons :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) d\theta \quad (3.6)$$

car  $f$  est supposée holomorphe dans le disque de rayon  $\rho$  centré en  $z_0$ .

**Exercice 19.** *Démontrer cette formule à l'aide du théorème 2.5.*

Notons :

$$\iint_{D_\rho(z_0)} f(z) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^\rho f(z_0 + se^{i\theta}) s ds d\theta = \pi\rho^2 f(z_0) \quad (3.7)$$

qui revient à (c'est une autre forme du théorème de la moyenne):

$$f(\zeta_0) = \frac{1}{A_\rho} \iint f(z) dx dy \quad (3.8)$$

Comme  $|f(\zeta_0)| \geq |f(z)|$ , nous avons  $f(\zeta_0) = f(z), \forall z \in D_\rho(\zeta_0)$ . Tout point de  $O$  possède donc un voisinage dans  $O$ .  $O$  est donc ouvert. Mais il est aussi fermé. La seule possibilité est  $O = \Omega$  et  $f$  est donc constante.

**Définition 11.** Une fonction  $f(z)$  est dite *entière* si elle est définie et holomorphe sur  $\mathbb{C}$ . Par exemple,  $f(z) = \sin z, e^z$  etc. sont des fonctions entières. La fonction  $f(z) = 1/z$  n'est pas entière, car elle est singulière en  $z = 0$ .

**Théorème 24.** (Liouville) Si  $f$  est une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C}$  et si il existe une constante  $M$  telle que  $|f(z)| \leq M, \forall z \in \mathbb{C}$ , alors  $f(z)$  est une constante.

Introduisons la fonction auxiliaire  $g(z) = (f(z) - f(0))/z$ . Même si le dénominateur tend vers 0 quand  $z \rightarrow 0$ ,  $g$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}$ , car  $f$  est  $C^\infty$ . On a évidemment  $g(0) = f'(0)$ .

Posons  $|z| = R$ . Nous avons :

$$|g(z)| \leq \frac{|f(z)| + |f(0)|}{|z|} = \frac{2M}{R} \quad (3.9)$$

Soit  $w$  un point du plan et  $R$  un nombre réel choisi tel que  $|w| \leq R$ .

Utilisant la formule intégrale de Cauchy :

$$g(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{g(z)}{z-w} dz \quad (3.10)$$

Mais

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z|=R} \frac{g(z)}{z-w} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi R \frac{\sup|g(z)|}{\inf|z-w|} \quad (3.11)$$

Mais  $|g(z)| \leq 2M/R$  et, pour  $z$  sur le cercle, la distance minimale entre  $z$  et  $w$  est obtenue quand les deux vecteurs sont colinéaires. D'où  $\inf|z-w| = R - |w|$ , cf. Fig. 3.2. D'où

$$|g(w)| \leq \frac{2M}{R - |w|} \quad (3.12)$$

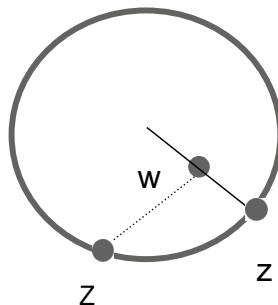


FIG. 3.2 –: La distance minimale entre  $z$  sur le cercle et  $w$  est obtenue quand  $z$  est colinéaire avec  $w$ .

Mais  $R$  peut être aussi grand que voulu. Faisant  $R \rightarrow \infty$ , nous avons  $g(w) = 0$ . Revenant à la définition de  $g$ , nous avons  $f(z) = f(0), \forall z \in \mathbb{C}$ . Donc,  $f$  est bien constante. □

**Remarque 5.** Ce théorème ne s'applique pas aux fonctions sur la droite réelle: heureusement! La fonction  $\sin(x)$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  et elle n'est pas constante.

Nous avons une autre démonstration: Pour  $z \in \mathbb{C}$ , nous avons pour tout  $R \in [0, \infty[$

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_R(z)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \quad (3.13)$$

Nous pouvons paramétriser  $\partial D_R(z)$  par  $\zeta(t) = z + Re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$ . L'intégrale précédente devient

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + Re^{it})}{R^2 e^{2it}} i R e^{it} dt \\ &= \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} f(z + Re^{it}) e^{-it} dt \end{aligned} \quad (3.14)$$

Donc si:  $\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leq M$ :

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{R} \quad (3.15)$$

Faisant  $R \rightarrow \infty$ , nous avons  $f'(z) = 0$  quelque soit  $z$  et donc  $f$  est constante. □

Ce théorème a pour conséquence:

**Théorème 25.** (dit théorème fondamental de l'algèbre) Si  $p(z)$  est un polynôme de degré  $n > 0$ , alors  $p(z)$  s'annule quelque part dans  $\mathbb{C}$ .



Supposons que  $p(z)$  ne s'annule pas. Alors  $g(z) = 1/p(z)$  est une fonction entière. Nous avons aussi  $|p(z)| \rightarrow \infty$  quand  $|z| \rightarrow \infty$ . Donc  $|g(z)| \rightarrow 0$  quand  $|z| \rightarrow \infty$  et  $g(z)$  est bornée. Donc  $g(z)$  est constante. D'où la contradiction.

**Définition 12.** *Lorsque qu'une fonction de classe  $C^2$  obéit à l'équation de Laplace*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad (3.16)$$

*on dit que  $f(x,y)$  est harmonique. On sait que si  $f = u + iv$  est holomorphe, alors les parties réelles et imaginaires  $u$  et  $v$  sont harmoniques.*

Nous avons :

**Théorème 26.** *Si  $u(x,y)$  est une fonction réelle et harmonique de classe  $C^2$  dans un domaine  $\Omega$ , alors il existe une fonction  $v(x,y)$  de classe  $C^2$  telle que la fonction  $f = u + iv$  soit holomorphe.*

**Exercice 20.** *Nous démontrons ce théorème.*

1. *Nous démontrons d'abord que si  $\Omega$  est simplement connexe, alors il existe une fonction analytique  $f$  sur  $\Omega$  telle que  $u = \operatorname{Re} f$ .*

a) *Considérer la fonction  $g(z) = \partial u / \partial x - i \partial u / \partial y$ . Démontrer que  $g(z)$  est analytique.*

b) *Nous désirons démontrer le théorème suivant :*

**Théorème 27.** *Soit  $g$  une fonction analytique sur un domaine simplement connexe  $\Omega$ . Alors il existe une fonction  $f$  analytique sur  $\Omega$  telle que  $f'(z) = g(z)$ . La fonction  $f$  est unique à une constante additive près.*

*Choisissons un point  $z_0$  arbitraire dans  $\Omega$  et définissons*

$$f(z) = \int_{z_0}^z g(z) dz \quad (3.17)$$

*où le chemin d'intégration est quelconque.*

i. *Démontrer que pour tous points  $z$  et  $z_0$*

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - g(z_0) = \frac{1}{z - z_0} \int_{z_0}^z (g(w) - g(z_0)) dw \quad (3.18)$$

ii. *la fonction  $f$  étant analytique, le chemin d'intégration est arbitraire. En choisissant comme chemin d'intégration la droite allant de  $z_0$  à  $z$ , et en utilisant que  $g$  est nécessairement continue, démontrer que*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = g(z) \quad (3.19)$$

iii. *Attention. La preuve suppose le domaine  $\Omega$  simplement connexe. À titre d'exemple, démontrer qu'il n'existe pas de fonction analytique définie sur  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  telle que  $f'(z) = 1/z$ . La fonction  $\ln z$  est effectivement une primitive, mais elle n'est analytique sur  $\mathbb{C}$  auquel on a retranché la droite  $\operatorname{Re} z \leq 0$ .*

2. *Utiliser ce résultat pour démontrer le théorème.*

Soit  $\Omega$  un ouvert connexe de  $\mathbb{C}$ . Si  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  est holomorphe, alors le théorème intégral de Cauchy s'applique: Finalement  $f \in C^\infty(\Omega)$  et  $f'(z)$  est holomorphe. Nous avons la réciproque:

**Théorème 28.** (Morera). *Si  $g(z)$  est continue dans un ouvert  $\mathcal{D}$  et si*

$$\int_{\partial\Gamma} g(z) dz = 0 \quad (3.20)$$

*pour tout rectangle contenu dans  $\Omega$ , alors  $g(z)$  est une fonction holomorphe.*

Soit  $z_0 \in \Omega$  donné. Définissons

$$f(z) = \int_{z_0}^z g(\zeta) d\zeta \quad (3.21)$$

où le chemin d'intégration est une suite de droites soit verticales soit horizontales. Nous pouvons approcher  $z_0$  suivant deux chemins et, d'après les hypothèses, le résultat sera le même.

Si nous approchons  $z$  par un chemin qui se termine par une droite horizontale

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g(z) \quad (3.22)$$

Par contre, si le chemin se termine par une droite verticale

$$\frac{\partial f}{\partial y} = ig(z) \quad (3.23)$$

Donc  $f$  est  $C^1$  et satisfait aux conditions de Cauchy-Riemann. Par conséquent,  $f(z)$  est holomorphe. Comme  $g(z) = f'(z)$ ,  $g$  est aussi holomorphe.  $\square$

**Théorème 29.** *Soit  $f(z)$  la continuation analytique de  $f(x)$  où  $f(x)$  est une fonction réelle définie sur l'axe réel ou sur un segment, disons  $[a, b]$ . On a ( $b^*$  désigne le conjugué complexe comme le symbole  $\bar{b}$ ). Nous avons le principe de réflexion de Schwarz*

$$f(z^*) = [f(z)]^* \quad (3.24)$$

Supposons  $f = u + iv$ . Alors  $g = \bar{f} = u - iv$ . Donc si  $f$  satisfait aux conditions de Cauchy-Riemann,  $g$  aussi. Donc,  $g$  est analytique dans le demi-plan inférieur. Reste à démontrer que  $g$  est analytique sur le segment  $[a, b]$ !

Nous allons le faire en utilisant le théorème de Morera (cf. Théorème 28): à faire!

**Théorème 30.** *Soit  $f$  une fonction holomorphe sur un ouvert  $\Omega$ . Alors l'ensemble des points où  $f$  s'annule ne peut pas être quelconque. Ce théorème nous rappelle encore une fois que les fonctions holomorphes se comportent comme des polynômes. Plus précisément: Soit  $Z_0 = z \in \Omega : f(z) = 0$ . Si il existe  $z_0 \in \Omega$  et  $\{z_j\}_{j \geq 1} \subset \Omega \setminus z_0$  tel que  $z_j \rightarrow z_0$ , alors  $f = 0$  sur  $\Omega$ .*

**Théorème 31.** (Jordan) *Soit  $C_R$  une partie ou le tout d'un arc circulaire de contour  $Re^{i\theta}$  où  $0 < \theta \leq \pi$ . Supposons  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$ . Soit  $\lambda$  un nombre positif. Considérons l'intégrale:*

$$I(R) = \int_{C_R} f(z) e^{i\lambda z} dz \quad (3.25)$$

Nous avons:  $\lim_{R \rightarrow \infty} |I(R)| = 0$  qui sera constamment utilisé dans les application du théorème des résidus.

**Exercice 21.** *Nous allons démontrer ce théorème.*

1. Choisir  $R$  suffisamment grand pour que  $|f(z)| < \epsilon$ .
2. Utilisez

$$\frac{2}{\pi} \theta \leq \sin \theta \quad \theta \in [0, \pi/2] \quad (3.26)$$

*pour majorer cette intégrale (faire un dessin pour démontrer cette propriété).*

3. En déduire le résultat.

## 3.4 Exemples de fonctions analytiques

### Fonctions trigonométriques

Les fonctions trigonométriques et hyperboliques sont définies par leurs séries

$$\cos(z) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (3.27)$$

$$\sin(z) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (3.28)$$

$$\cosh(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (3.29)$$

$$\sinh(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (3.30)$$

et la plupart des égalités trigonométriques s'étendent à  $\mathbb{C}$  par prolongement analytique. Par exemple  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  sur la droite réelle, la fonction constante 1 étant analytique, cette égalité est vraie partout.

### Fonction logarithmique

Nous avons déjà démontré que la fonction

$$f(z) = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} \quad (3.31)$$

est une fonction holomorphe pour  $\operatorname{Re} z > 0$ . Comme le logarithme naturel peut être défini pour  $x \in \mathbb{R}^+ \setminus 0$  par

$$\ln x = \int_1^x \frac{d\zeta}{\zeta} \quad (3.32)$$

la fonction  $f(z)$  est l'unique prolongement analytique de  $\ln x$  dans le domaine complexe. Quel est alors le domaine de définition de  $f(z)$  et quelles sont ses valeurs?

Comme  $f(z)$  est toujours défini si le chemin d'intégration évite l'origine, la fonction  $f(z)$  est holomorphe dans  $\mathbb{C} \setminus 0$ . Cependant cette fonction n'est pas uni-valuée, car prenant comme chemin d'intégration soit le demi-cercle supérieur ou soit le demi-cercle inférieur, on obtient  $\pi i$  ou  $-\pi i$ . D'après le théorème de Cauchy, ces deux valeurs seront identiques pour n'importe quel chemin d'intégration contenu ou dans le demi-plan supérieur ou dans le demi-plan inférieur.

Choisissant un chemin d'intégration partant de  $+1$  et se terminant à  $-1$ , après avoir fait  $m$  tours dans le sens positif autour de l'origine, nous avons :

$$\ln(-1) = i + 2m\pi i \quad (3.33)$$

et

$$\ln(-1) = i - 2m\pi i \quad (3.34)$$

si le chemin tourne dans le sens négatif.

En conséquence, suivant le chemin, nous avons une infinité de valeur de  $\ln(-1)$ . La fonction est multi-valuée. Chaque valeur de  $\ln z$  pouvant être obtenue à partir de l'autre par l'addition d'un multiple de  $2\pi i$ . Chacune de ces déterminations constitue une branche de la fonction  $\ln$  et chaque branche est bien holomorphe dans n'importe quelle région qui ne contient pas l'origine.

**Théorème 32.** *On considère le plan complexe auquel on a retranché la partie négative de l'axe réel. En d'autres mots, on considère  $\mathbb{C} \setminus \{x + iy \mid x \leq 0 \text{ et } y = 0\}$ . La fonction*

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z \quad -\pi < \arg z < +\pi \quad (3.35)$$

*est appelée la branche principale du logarithme. Cette fonction est analytique sur  $\mathbb{C} \setminus \{x + iy \mid x \leq 0 \text{ et } y = 0\}$  et*

$$\frac{d}{dz} \ln z = \frac{1}{z} \quad (3.36)$$

## L'idée des coupures et des surfaces de Riemann

Lorsque la fonction  $f(z)$  est multi-valuée, il existe deux méthodes pour l'étudier :

1. Introduire des coupures dans le plan complexe.
2. Remplacer le plan complexe par une surface. À partir de fonction  $f$  originalement définie dans le plan complexe, on définit une nouvelle fonction  $\tilde{f}$  sur une surface où la fonction devient uni-valuée. Cette surface est généralement compliquée dans un espace de dimension 4.

Commençons par tracer un graphe. Considérons la fonction  $z = f(w) = e^w, w \in \mathbb{C}$ . Cette fonction est périodique, car

$$f(w + 2k\pi i) = f(w)$$

et  $f(w)$  ne peut donc être surjective. Par contre, si le domaine de variation est restreint au domaine

$$-\infty < \operatorname{Re} w < \infty \text{ et } -\pi < \operatorname{Im} w \leq \pi \quad (3.37)$$

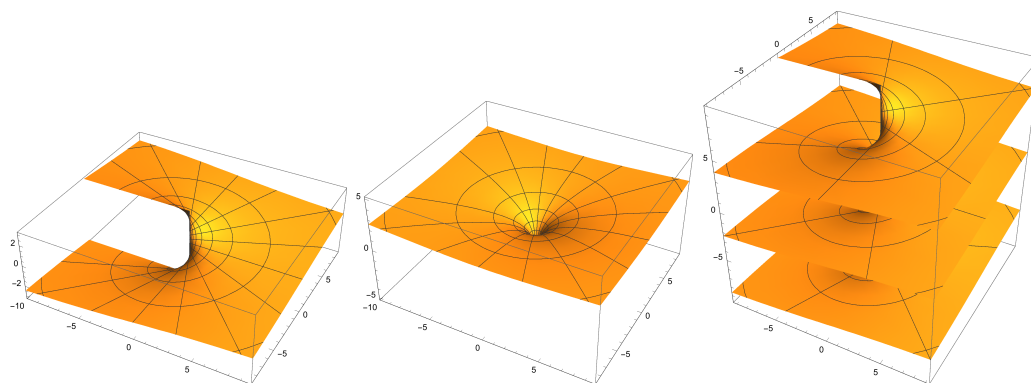


FIG. 3.3 — (a) Tracé de la partie imaginaire et réelle, (b), du  $\ln$ . En (c), la surface de Riemann du  $\ln$ .

la fonction est clairement surjective et on peut définir son inverse, le  $\ln$  ! D'où l'idée de la coupure qui est mieux visualisée en traçant les deux surfaces donnant les parties imaginaires et réelles du  $\ln$ , c.f. Fig. 3.3, sous forme paramétrée :

1.  $(\operatorname{Re} f(w), \operatorname{Im} f(w), \operatorname{Im} w)$ .
2.  $(\operatorname{Re} f(w), \operatorname{Im} f(w), \operatorname{Re} w)$ .

Prenant  $\operatorname{Im} w = 0$ , la deuxième surface revient à tracer la courbe  $(e^w, w)$  qui n'est autre que le graphe du logarithme donné sous forme paramétrée. Les deux surfaces correspondent donc aux parties imaginaires et réelles du  $\ln$  dans le plan complexe. La partie réelle, cas (b), est clairement univaluée et donne un comportement singulier au voisinage de l'origine comme d'habitude. Quant à elle, la partie imaginaire, cas (a), montre clairement qu'il n'existe pas de prolongement analytique continu de  $\ln$  dans le plan complexe. L'axe  $\mathbb{R}^-$  donne une discontinuité apparaissant comme une coupure. Celle-ci peut être éliminée en collant les différents feuillets correspondants à  $-\pi + 2k\pi < \operatorname{Im} w \leq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  par leur bord. On obtient ainsi une surface de Riemann qui est l'union de différents feuillets ou "clones" de  $\mathbb{C}$  où la fonction  $\ln$  est continue lorsqu'on se déplace sur la surface.

- Exercice 22.**
1. Calculer le logarithme complexe pour les cas suivants :  $3 - 3i$ ,  $-\sqrt{3} + i$ ,  $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$
  2. Expliquer pourquoi le logarithme complexe de 0 n'est pas bien défini.
  3. Calculer :  $(1 + i)^{1-i}$ ,  $i^{1-i}$ ,  $(-3)^{4-i}$ .

## 3.5 Fonction puissance

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres complexes. Nous avons  $a^b = e^{b \ln a}$  et cette fonction est multivaluée car  $\ln$  est multivaluée. Nous avons :

**Théorème 33.** 1. *Quelque soit le choix de la branche choisie pour la fonction  $\ln$ , la fonction  $z \rightarrow a^z$  est entière, c-à-d. analytique dans le plan complexe, et a pour dérivée  $z \rightarrow \ln a a^z$ .*

2. *Fixons la branche de la fonction  $\ln$ , par exemple, la branche principale. Alors la fonction  $z \rightarrow z^b$  est analytique dans le domaine de la branche du  $\ln$  qui a été choisie et sa dérivée est  $z \rightarrow bz^{b-1}$ .*

**Exercice 23.** *Donner la dérivée des fonctions suivantes en précisant les régions où ces fonctions sont analytiques :*

1.  $e^z$ .
2.  $\sin e^z$
3.  $e^z / (z^2 + 3)$ .
4.  $\sqrt{e^z + 1}$ .
5.  $\cos \bar{z}$ .
6.  $1 / (e^z - 1)$ .
7.  $\ln(e^z + 1)$ .

## 3.6 Singularités

### Classification des singularités

Il y a trois possibilités pour une fonction  $f$  au voisinage d'un point  $P$  :

1. Si la singularité est effaçable :  $|f(z)|$  est bornée dans un disque ayant  $P$  pour centre.
2. Si la fonction  $f$  a un pôle :  $\lim_{z \rightarrow P} |f(z)| = +\infty$ .
3. Si la singularité est essentielle : Aucune de ces possibilités.

### Théorème du prolongement de Riemann

**Théorème 34.** *Soit  $f : D(P,r) \setminus P \rightarrow \mathbb{C}$  un fonction holomorphe et bornée. Alors nous pouvons effacer la singularité. Celle-ci est dite effaçable :*

1.  $\lim_{z \rightarrow P} f(z)$  existe.

2. la fonction  $\hat{f}(z)$  définie par

$$\hat{f}(z) = f(z) \text{ si } z \neq P \text{ et } \lim_{z \rightarrow P} f(z) \text{ sinon} \quad (3.38)$$

est holomorphe. Autrement dit, nous pouvons prolonger de façon analytique  $f$  en  $P$ .

**Exercice 24.** Discuter les singularités en 0 dans les cas suivants :

1.  $z^2/(1 - \cos z)$ .
2.  $\sin z/z$ .
3.  $(\sec z - 1)/\sin^2 z$
4.  $\ln(1 + z)/z^2$ .
5.  $e^{1/z}$ .

**Exercice 25.** On constate qu'une solution numérique dans une simulation de mécanique des fluides possède une singularité effaçable. Quelle est votre interprétation physique ? Même question si cette singularité est essentielle.

**Théorème 35.** (Casorati-Weierstrass) Soit  $f : D(P, r_0) \setminus \{P\} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe et  $P$  une singularité essentielle de  $f$ , alors  $f(D(P, r) \setminus \{P\})$  est dense dans  $\mathbb{C}$  quel que soit  $0 < r < r_0$ .

La preuve est une application du théorème du prolongement de Riemann. Supposons que  $f(D(r, P) \setminus \{P\})$  ne soit pas dense dans  $\mathbb{C}$ . Il existe donc un disque de centre  $Q$  et de rayon  $s$ ,  $D(Q, s)$ , qui n'est pas couvert par  $f$ . Considérons la fonction

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - Q} \quad (3.39)$$

Le dénominateur ne peut pas s'annuler. Donc,  $g(z)$  est bornée dans un voisinage de  $P$ . Par conséquent,  $g(z)$  peut être prolongée analytiquement en  $P$  et, comme  $\lim_{z \rightarrow P} f(z) \neq \infty$ ,  $g(z)$  est prolongeable de façon analytique. Donc  $f(z) = 1/g(z) + Q$  est prolongeable, ce qui contredit nos hypothèses.

□.

## 3.7 Séries de Laurent

Les séries de Laurent généralisent le développement en série puissance pour des fonctions holomorphes sur un anneau et non sur un disque. Par exemple, le développement de Taylor ne s'applique pas à des fonctions comme  $1/z$  ou  $1/ze^{z^2}$ , car ces fonctions sont singulières en  $z = 0$ , mais nous verrons que nous pourrions faire leur



développement de Laurent -. Pour de telles fonctions, il existe une autre façon de faire des développements qui utilisent des puissances négatives de  $z$ .

Soit l'anneau de rayon intérieur  $r_0$  et de rayon extérieur  $r_1$  :

$$\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} : r_0 < |z - z_0| < r_1\} \quad (3.40)$$

Soient  $\gamma_j$  les cercles parcourus dans le sens antihoraire,  $|z - z_0| = r_j$  de telle sorte que

$$\partial\mathcal{A} = \gamma_1 - \gamma_0 \quad (3.41)$$

Si  $f \in C^1(\bar{\mathcal{A}})$ , le théorème de Cauchy donne

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \quad (3.42)$$

Le point  $z$  étant donné, nous avons sur chaque cercle :

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n \geq 0} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n, \zeta \in \gamma_1 \quad (3.43)$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z - z_0} \sum_{m \geq 0} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^m, \zeta \in \gamma_0 \quad (3.44)$$

qui peuvent être utilisées dans (3.42) pour donner

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n (z - z_0)^n, z \in \partial\mathcal{A} \quad (3.45)$$

avec

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n \geq 0 \quad (3.46)$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} f(\zeta) (\zeta - z_0)^m d\zeta, \quad n = -m - 1 < 0 \quad (3.47)$$

qui donne le développement de Laurent. Déformant les contours :

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) (\zeta - z_0)^{n+1} d\zeta, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (3.48)$$

où  $\gamma$  est n'importe quel cercle parcouru dans le sens anti-horaire et entourant  $z_0$ .

Un cas intéressant est  $r_0 = 0$ .

**Proposition 1.** *Supposons  $f(z)$  holomorphe sur le disque  $D_R(z_0) \setminus z_0$ . Si :*

1. *Si il existe un  $n$  fini et  $< 0$  tel que  $a_m = 0, \forall m < n$ , alors  $f(z)$  a un pôle en  $z_0$ .*

2. Dans le cas contraire, la singularité est essentielle.

**Théorème 36.** *Le  $j$ -ième coefficient de la série de Laurent d'une fonction  $f$  ayant un pôle d'ordre  $k$  en  $P$  est*

$$a_j = \frac{1}{(k+j)!} \frac{d^{k+j}}{dz^{k+j}} [(z-P)^k f(z)] \Big|_{z=P} \quad (3.49)$$

**Exercice 26.** À faire en classe:

1. Déterminer la série de Laurent de  $z/(z^2 + 1)$  au voisinage de  $z = i$ .
2. Déterminer l'ordre des pôles dans chacun des cas suivants:
  - a)  $\cos z/z^2$ .
  - b)  $(e^z - 1)/z^2$
3. Quelle est la série de Laurent de  $f(z) = 1/(z - 1)$  dans les domaines  $z : |z| < 1$  et  $z : |z| > 1$  ?
4. Même question pour  $g(z) = 1/(z - 2)$  dans les domaines  $z : |z| < 2$  et  $z : |z| > 2$ .
5. Considérer la série de Laurent:

$$e^{z+1/z} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n \quad (3.50)$$

- a) Quel est le domaine de convergence de cette série ?
- b) Démontrer:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{2 \cos t} \cos nt \, dt \quad (3.51)$$

- c) Démontrer:

$$a_k = a_{-k} = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!(m+k)!} \quad (3.52)$$

6. Considérer maintenant la fonction  $y_n(x)$  définie par:

$$e^{\frac{x}{2}(z-1/z)} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} y_n(x) z^n \quad (3.53)$$

Nous verrons plus tard que les fonctions  $y_n(x)$  sont des fonctions de Bessel  $J_n(x)$  et que la fonction du membre de gauche est appelée fonction génératrice.

- a) Exprimer  $y_n(x)$  comme une intégrale de Cauchy.
- b) Faire la substitution  $t = 2u/x$  et démontrer :

$$y_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(n+k)!k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \quad (3.54)$$

- c) Choisir le contour  $t = e^{i\phi}$  et démontrer

$$y_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \phi - n\phi) \, d\phi \quad (3.55)$$

d) La méthode du col est en général valable pour les intégrales du type:

$$I(\lambda) = \int_C e^{\lambda f(z)} dz \quad (3.56)$$

où  $\lambda$  est grand et positif.

i. Tracer le graphe de la fonction  $g(t) = t^x e^{-t}$ .

ii. Utiliser la méthode du col pour l'intégrale

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty g(t) dt \quad x \gg 1 \quad (3.57)$$

et montrer

$$\Gamma(x+1) \simeq \sqrt{2\pi x} x^x e^{-x} \quad (3.58)$$

e) La méthode de la phase stationnaire est en général valable pour les intégrales du type:

$$I(\lambda) = \int_C e^{i\lambda f(z)} dz \quad (3.59)$$

où  $\lambda$  est grand et positif et où  $f(z)$  est un nombre réel le long du contour.

i. Nous considérons l'intégrale d'Airy:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\frac{1}{3}s^3 + zs\right) ds \quad (3.60)$$

ii. Faire le changement de variable  $s = z^{1/2}t$  et  $x = z^{3/2}$ . Quelle est alors l'intégrale à évaluer?

iii. Montrer que le chemin d'intégration peut être déformé en n'importe quel chemin tel que:

– Le chemin part dans le secteur  $2\pi/3 < t < \pi$ .

– Le chemin se termine dans le secteur  $0 < t < \pi/3$ .

iv. Quels sont les points col?

v. Posant  $t = x + iy$ , montrer que le chemin de plus grand gradient est obtenu pour

$$x(x^2 - 3y^2 + 3) = 0 \quad (3.61)$$

vi. On trace sur la figure la cubique solution de cette équation. Les flèches indiquent les directions où  $\text{Re} h[t]$  décroît. Quelle branche choisissez-vous pour faire l'intégration?

vii. Pour information, le résultat final est

$$Ai(x) \simeq \frac{\Gamma(1/2)}{4\pi} \frac{1}{x^{1/4}} \exp\left[-2/3x^{3/2}\right] \quad (3.62)$$

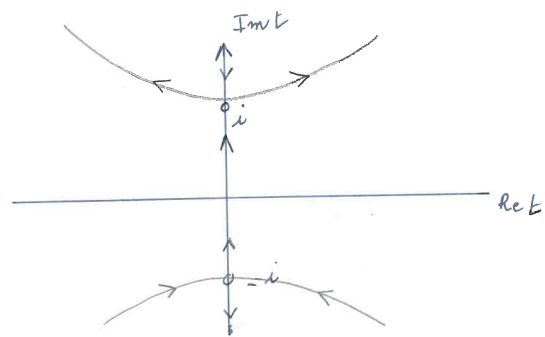


FIG. 3.4 —:



# Transformations intégrales

## 4.1 Séries de Fourier

Nous nous concentrons sur l'intervalle  $[0, 2\pi[$  en identifiant les point 0 et  $2\pi$ . Sur le plan géométrique, notre analyse portera donc sur un cercle. Si  $f(\theta)$  est une fonction intégrable sur  $[0, 2\pi[$ , nous définissons :

$$\tilde{f}_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \quad (4.1)$$

On appelle série de Fourier de  $f$  l'expression :

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}_n e^{int} \quad (4.2)$$

où le signe  $\sim$  signifie converge dans un sens qu'il reste à définir.

**Théorème 37.** *Si  $f$  est intégrable sur  $[0, 2\pi[$  et si  $f$  est différentiable en  $t$ , alors*

$$f(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^{n=+N} \tilde{f}_n e^{int} \quad (4.3)$$

*Si la dérivée de  $f$  est continue, la convergence est absolue et uniforme.*

**Exemple 8.** *Nous désirons calculer les coefficients de Fourier de la fonction  $f(t) = e^{2i \sin t}$ . Nous avons*

$$2i \sin t = e^{it} - \frac{1}{e^{it}} \quad (4.4)$$

*D'où l'idée de considérer la fonction de variable complexe :*

$$e^{z-1/z} = e^z \cdot e^{-1/z} \quad (4.5)$$

*Chaque fonction étant développable en série, nous pouvons développer :*

$$F(z) = e^z \cdot e^{-1/z} = \left[ \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k!} \right] \left[ \sum_{l \geq 0} \frac{(-1)^l z^{-l}}{l!} \right] \quad (4.6)$$

*soit :*

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} z^n \left[ \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m-n)!} \right] \quad (4.7)$$

et nous avons finalement les coefficients de Fourier de la fonction  $f$  :

$$\tilde{f}_n = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m-n)!} \quad (4.8)$$

**Exemple 9.** Nous considérons ici l'équation de Laplace en 2d sur un disque de rayon  $R$

$$\Delta u = 0 \quad (4.9)$$

avec les condition aux limites :

$$u|_{\partial D} = f \quad (4.10)$$

où la fonction  $f(\theta)$  est une donnée du problème. C'est ce qu'on appelle une condition de Dirichlet. Pour information, la condition de Neumann imposerait de trouver une solution ayant un flux nul, c'est-à-dire une dérivée nulle, à la frontière du disque.

En 2d le laplacien est (formule qu'il faut connaître) :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (4.11)$$

et nous cherchons une solution de (4.9) sous la forme :  $w(r, \theta) = u(r) \cdot v(\theta)$ . Nous avons :

$$u''(r)v(\theta) + \frac{1}{r}u'(r)v(\theta) + \frac{1}{r^2}u(r)v''(\theta) = 0 \quad (4.12)$$

D'où :

$$-\frac{v''(\theta)}{v(\theta)} = \frac{r^2u''(r) + ru'(r)}{u(r)} \quad (4.13)$$

Le membre de gauche ne dépend que de la variable  $\theta$ . Le membre de droite, quant à lui, ne dépend que de la variable  $r$ . Ces deux variables étant indépendantes, les deux membres sont constants. Soit  $\lambda$  cette constante :

$$v''(\theta) + \lambda v(\theta) = 0 \quad (4.14)$$

$$r^2u''(r) + ru'(r) - \lambda u(r) = 0 \quad (4.15)$$

On demande que  $v(\theta)$  soit continue et périodique : On a donc  $\lambda = n^2$  où  $n$  est un entier positif.

$$v_n(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta \quad (4.16)$$

où  $a_n$  et  $b_n$  sont deux constantes d'intégration. Supposons  $n > 0$ . Dans l'équation pour  $u(r)$ , on fait le changement de variable  $r = e^z$  qui transforme cette équation en une équation linéaire à coefficients constants :

$$u''(z) - n^2u(z) = 0 \quad (4.17)$$



avec la solution  $u(z) = e^{\pm nz}$  lorsque  $n \neq 0$ . D'où la solution générale :  $u_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-n}$  pour  $n > 0$ . Si  $n = 0$ , il faut revenir à l'équation originale, dont la solution est  $u_0(r) = A_0 + B_0 \ln r$ . On a donc la solution générale

$$w(r, \theta) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n>0} u_n(r) v_n(\theta) \quad (4.18)$$

Dans le cas qui nous intéresse, les solutions sont régulières à l'origine. Cela élimine le  $\ln$  et les puissances  $n < 0$ .

$$w(r, \theta) = A_0 + \sum_{n>0} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \quad (4.19)$$

Enfin, la fonction  $f(\theta)$  est supposée régulière. Elle est donc développable en série de Fourier :

$$f(\theta) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n>0} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad (4.20)$$

Ce qui permet d'identifier les coefficients entre (4.19) et (4.20).

## 4.2 Transformée de Fourier

Soit  $\mathcal{S}$  l'espace vectoriel des fonctions infiniment différentiables  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  telles que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x|^n f(x) \rightarrow 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . Nous définissons la transformée de Fourier par

$$\tilde{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} f(x) dx \quad (4.21)$$

lorsque l'intégrale converge pour  $y \in \mathbb{C}$ . Lorsque  $f(x)$  est intégrable, sa transformée de Fourier  $\tilde{f}(y)$  est continue.

**Exemple 10.** Si  $f(x) = e^{-x^2}$  alors  $\tilde{f}(y) = e^{-y^2}$ .

**Exercice 27.** Démontrer le résultat précédent en dérivant sous le signe somme donnant une équation pour  $\tilde{f}'(y)/\tilde{f}(y)$ .

**Théorème 38.** Nous avons la transformée inverse :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} \tilde{f}(y) dy \quad (4.22)$$

**Théorème 39.** Nous avons la formule de Poisson :

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(x + 2\pi n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \tilde{f}(n) e^{inx} \quad (4.23)$$

Définissons  $h(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+k)$ . La fonction  $h(x)$  est clairement périodique de période 1. Elle est donc développable en séries de Fourier. Ses coefficients de Fourier sont  $a_n = \tilde{f}(n)$ . D'où le résultat.

**Exemple 11.** Si  $f(x) = e^{-x^2/4t}$ , nous avons l'identité de Jacobi :

$$\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} e^{-\pi l^2 \tau} = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} e^{-\pi k^2 / \tau} \quad (4.24)$$

### 4.3 Transformée de Laplace

Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction intégrable sur  $[0, R]$ ,  $\forall R > 0$  telle que

$$\int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-at} dt < \infty, \quad \forall a > A \quad (4.25)$$

où  $A$  est un nombre réel quelconque.

**Définition 13.** On définit la transformée de Laplace de  $f$  par

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad \operatorname{Re} s > A \quad (4.26)$$

Cette intégrale est absolument convergente quelque soit  $s$  dans le demi-plan  $H_A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > A\}$  et elle définit une application continue  $\mathcal{L}f : H_A \rightarrow \mathbb{C}$ .

**Théorème 40.**  $\mathcal{L}f(s)$  est une fonction holomorphe.

Considérons l'intégrale de  $\mathcal{L}f(s)$  sur un contour fermé  $\gamma$ . Interchangeant les deux intégrales, nous avons :

$$\int_{\gamma} \mathcal{L}f(s) ds = \int_0^{\infty} \int_{\gamma} f(t) e^{-st} ds dt = 0 \quad (4.27)$$

Nous pouvons alors appliquer le théorème de Morera et en conclure le théorème.

La transformation de Laplace permet de trouver la solution de nombreuses équations différentielles. Nous nous intéressons ici à trouver sa transformée inverse.

**Théorème 41.** En fait, si  $B > A$ , nous avons :

$$\mathcal{L}f(B + i\zeta) = \sqrt{2\pi} \tilde{g}(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{R} \quad (4.28)$$

où  $g(x)$  est définie par

$$g(x) = f(x) e^{-Bx}, \quad x \geq 0 \text{ et } g(x) = 0 \text{ si } x < 0 \quad (4.29)$$

et où  $\tilde{g}$  désigne la transformée de Fourier de  $g$ .

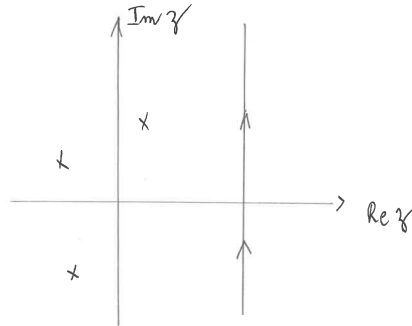


FIG. 4.1 —: Chemin pour la transformée de Laplace inverse.

Appliquant la transformée de Fourier inverse pour  $\tilde{g}$ , nous avons :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{e^{Bt}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}f(B + i\zeta) e^{i\zeta t} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \mathcal{L}f(s) e^{s\zeta} d\zeta \end{aligned} \quad (4.30)$$

où  $\gamma$  est la LIGNE VERTICALE  $\gamma(\zeta) = \{B + i\zeta, -\infty < \zeta < +\infty\}$  laissant tous les pôles de  $\mathcal{L}f(s)$  sur sa gauche.

On verra que les transformées inverses de Fourier et de Laplace se calculent par la méthode des résidus.

## 4.4 Application : Description hydrodynamique des phénomènes en matière condensée

Let us consider a magnetic system with spin variable  $\sigma(\mathbf{x})$ . The total magnetization is

$$\mathbf{M} = \sum_i \sigma(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) \quad (4.31)$$

where the spin on the particle  $i$  moves with the particle  $i$ . The spin variable is general and can thought as a density  $\rho(\mathbf{x}, t)$ . Typically, we have the equation of conservation

$$\partial_t \mathbf{M}(\mathbf{x}, t) = -\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \quad (4.32)$$

where  $\mathbf{j}(\mathbf{x},t)$  is the magnetic current.  $\mathbf{j}$  is simply the magnetic moment times the velocity:

$$\mathbf{j} = \sum_i \sigma_i \mathbf{v}_i \quad (4.33)$$

The equation of conservation (4.32) is equivalent to the condition:

$$\frac{d}{dt} \int d\mathbf{x} \mathbf{M}(\mathbf{x},t) = 0 \quad (4.34)$$

Eq. (4.32) does not give a complete description. We must know the relations between the current and the magnetization. The traditional way to solve the problem is to postulate a constitutive equation

$$\mathbf{j} = -D\nabla\mathbf{M}(\mathbf{x},t) \quad (4.35)$$

where, in general,  $D$  is a phenomenological transport coefficient. Here, it is a simple diffusion coefficient as for the classical diffusion problem for particles. Using the equation of conservation, we must solve:

$$\partial_t \mathbf{M} - D\nabla^2 \mathbf{M} = 0 \quad (4.36)$$

To solve this equation, we assume some initial magnetization modulation and Fourier transform the initial condition:

$$\mathbf{M}(\mathbf{k},0) = \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{k},0) \quad (4.37)$$

Without loss of generality, we take:

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{k} = \mathbf{0},0) = 0 \quad (4.38)$$

since, if  $M(\mathbf{x},t)$  solve (4.36),  $M(\mathbf{x},t) - Cste.$  is also a solution.

Fourier transform in space the last equation

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{k},t) = \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \mathbf{M}(\mathbf{x},t) \quad (4.39)$$

where we use the “bar” symbol for the spatial Fourier transform. We also Laplace transform the last equation in time.

$$\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{k},z) = \int_0^\infty dt \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{k},t) e^{izt} \quad (4.40)$$

where  $z$  is a  $\mathbb{C}$  number in the half plane  $\text{Im } z \geq 0$ .

Because

$$\int dz e^{izt} \partial_t \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{k}, t) = [e^{izt} \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{k}, t)]_{t=0}^{+\infty} - \int dt \partial_t [e^{izt}] \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{k}, t) \quad (4.41)$$

We get

$$\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{k}, z) = \frac{i}{z + iD\mathbf{k}^2} \mathbf{M}(\mathbf{k}, 0) \quad (4.42)$$

Since  $\mathbf{M}(\mathbf{k}, 0)$  is given by the initial conditions, the last equation tell us how the initial condition spreads with time through the system.

From (4.42), the solution  $\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{k}, z)$  is an analytic function in the  $\mathbb{C}$ -plane but at the the point  $z = iD\mathbf{k}^2$ . The pole for  $z = -iD\mathbf{k}^2$  is characteristic of an hydrodynamic mode. Taking the inverse Laplace transform, we get:

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{k}, t) = e^{-D\mathbf{k}^2 t} \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{k}, t = 0) \quad (4.43)$$

This equation is characteristic of an hydrodynamic mode. It is exponentially damped with a time scale  $1/D\mathbf{k}^2$  tending to infinity in the long wavelength limit  $\mathbf{k} \rightarrow 0$ .

Eq. (4.43) is special. The system has a priori many channels to relax a perturbation. We have, however, a conservation law. This conservation law tells us that for a fluctuation to relax, matter or spin must be transported in space via diffusion. In this way, the perturbation spreads and relaxes.

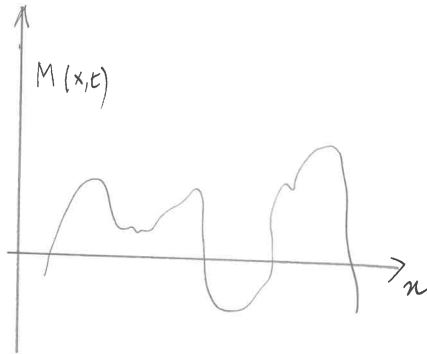


FIG. 4.2 –: An arbitrary initial condition can be decomposed into Fourier modes. Each mode will evolve independently from the other ones and will spread by diffusion.

Assuming the initial condition  $\mathbf{M}(\mathbf{x},0) = \mathbf{M}_0\delta(\mathbf{x})$ , we get the classical result (in 3 dimensions)

$$\langle \mathbf{M}(\mathbf{x},t) \rangle = \frac{\mathbf{M}_0}{(4\pi Dt)^{3/2}} \exp[-\mathbf{x}^2/6Dt] \quad (4.44)$$

## 4.5 Méthodes du col et de la phase stationnaire

### Développement asymptotique

Les développements asymptotiques permettent d'obtenir des expressions approchées. Par exemple, la formule de Stirling donne le développement asymptotique de  $(n-1)! = \Gamma(n)$

$$\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi} e^{-x} x^{x-1/2} \quad (4.45)$$

**Définition 14.** Une fonction  $\phi(z)$  est  $o(1/z^n)$  si et seulement si  $\lim_{z \rightarrow \infty} z^n \phi(z) = 0$ . Si  $z^n \phi(z)$  est simplement borné,  $\phi(z)$  est  $O(z^n)$ . On a :  $O(z^n) \Rightarrow o(z^{n+1})$ , mais pas l'inverse.

Considérons maintenant la série  $S = \sum_{l \geq 0} a_l/z^l$  et les sommes partielles

$$S_n = \sum_{0 \leq l \leq n} \frac{a_l}{z^l} \quad (4.46)$$

Si  $S_n$  est bien défini pour  $z \neq 0$ , nous n'exigeons pas que la série converge. En fait, dans la plus part des cas, elle diverge.

**Définition 15.** On dit que  $f$  admet  $S$  pour développement asymptotique, i.e.  $f \sim S$ , si

$$f - S_n = o(1/z^n) \quad (4.47)$$

Pour deux fonctions arbitraires, nous écrivons  $f(z) \sim g(z)$  lorsque nous avons :

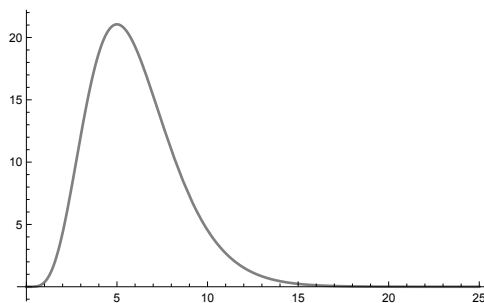
$$f(z) \sim g(z) \left( 1 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \right) \quad (4.48)$$

### Un exemple

Il est souvent important de pouvoir approximer des intégrales (même celles que l'on sait calculer de façon exacte!). Ces méthodes sont connues sous le nom de méthode du point de selle, ou méthode du col.

À titre d'exemple, considérons la fonction  $\Gamma(x)$  définie par

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt \quad (4.49)$$

FIG. 4.3 –: Graphe de  $t^x e^{-t}$  pour  $x = 5$ .

et cherchons une approximation pour  $x \rightarrow +\infty$ .

Le graphe de la fonction  $t^x e^{-t}$  est porté en Fig. 4.3 et fait clairement apparaître un maximum. La contribution dominante à l'intégrale (4.49) viendra donc du voisinage de ce maximum, car c'est dans cette partie que l'aire par "unité de courbe" est la plus concentrée.

Pour trouver le maximum à  $x$  donné, on calcule  $t$  qui annule la dérivée  $d(t^x e^{-t})/dt = 0$  et on trouve  $t = x$ . Pour faire l'approximation qui nous intéresse, on pose

$$e^{f(t)} = t^x e^{-t} = e^{-t+x \ln t} \quad (4.50)$$

avec  $f'(t=x) = 0$  et  $f''(t=x) = -x/t^2$ .

Développant  $f(t)$ <sup>1</sup> au deuxième ordre :

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &\approx \int_0^{+\infty} \exp \left[ x \ln x - x - \frac{1}{2x}(t-x)^2 \right] \\ &\approx e^{x \ln x - x} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ \frac{1}{2x}(t-x)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.51)$$

où, pour  $x$  suffisant grand, nous pouvons étendre l'intégrale jusqu'à  $-\infty$ . L'intégrale sur  $t$  est maintenant une gaussienne<sup>2</sup>. Cela donne :

$$\Gamma(x+1) \approx \sqrt{2\pi x} x^x e^{-x} \quad x \rightarrow \infty \quad (4.52)$$

---

1. Il faut développer la fonction apparaissant dans l'argument de l'exponentielle : le développement de la fonction  $\exp[f(t)]$  n'apporterait rien.

2. Pour calculer  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ , on fait :

$$\left[ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

qui est le premier terme de la formule de Stirling

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \dots\right) \quad (4.53)$$

### Méthode du col

Soit  $\gamma = ]-\infty, +\infty[ \rightarrow \mathbb{C}$  une courbe ( $\gamma$  peut aussi être définie sur un intervalle). Soit  $h(\zeta)$  une fonction analytique sur  $\gamma$ . On suppose que :

1.  $f(z) = \int_{\gamma} e^{zh(\zeta)} d\zeta$  converge absolument.
2.  $h'(\zeta_0) = 0$  et  $h''(\zeta_0) \neq 0$ .
3.  $\text{Im}(zh(\zeta))$  constant pour  $\zeta$  sur  $\gamma$  dans un voisinage de  $\zeta_0$ .
4.  $\text{Re}(zh(\zeta))$  possède un maximum absolu sur  $\gamma$  en entier.

Alors :

$$f(z) \sim \frac{\sqrt{2\pi} e^{zh(z)}}{\sqrt{-h''(\zeta_0)} z} \quad (4.54)$$

lorsque  $z \rightarrow \infty$ .

Sous les mêmes hypothèses, nous pouvons considérer :

$$f(z) = \int_{\gamma} e^{zh(\zeta)} g(\zeta) d\zeta \quad (4.55)$$

où  $g(\zeta)$  est continue. Alors :

$$f(z) \sim \frac{\sqrt{2\pi} e^{zh(z)} g(\zeta_0)}{\sqrt{-h''(\zeta_0)} z} \quad (4.56)$$

lorsque  $z \rightarrow \infty$ .

---

Passer en coordonnées polaires donne :

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} dr r e^{-r^2} = \pi$$

D'où le résultat :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$



### Méthode de la phase stationnaire

Nous avons la même approximation pour des intégrales complexes dans le cas où l'argument tend vers l'infini :

**Théorème 42.**

$$f(z) = \int_a^b e^{izh(t)} g(t) dt \quad (4.57)$$

$$f(z) \sim \frac{e^{izh(\zeta_0)} \sqrt{2\pi}}{\sqrt{z} \sqrt{-h''(\zeta_0)}} e^{-i\pi/4} g(\zeta_0) \quad (4.58)$$

lorsque  $z \rightarrow \infty$ . Si  $h(z)$  possède un minimum avec  $h''(\zeta_0) > 0$ , cette formule devient

$$f(z) \sim \frac{e^{izh(\zeta_0)} \sqrt{2\pi}}{\sqrt{z} \sqrt{h''(\zeta_0)}} e^{i\pi/4} g(\zeta_0) \quad (4.59)$$



## Résidus

### 5.1 Calcul des résidus

Donnons-nous  $f$  supposée holomorphe dans un domaine ouvert  $\Omega$  à l'exception des points  $p_j \in \Omega$  supposés en nombre fini. La fonction est alors dite méromorphe car holomorphe partout sauf en des points isolés où elle a des résidus. Au voisinage de chaque pôle sur un disque  $D_j$ ,  $f$  est développable en série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - p_j)^n \quad (5.1)$$

**Définition 16.** Le coefficient  $a_{-1}$  est appelé résidu et noté  $Res_{p_j}(f)$ .

Par définition

$$Res_{p_j}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_j D} f(z) dz \quad (5.2)$$

Le théorème de Cauchy donne donc une formule très simple pour évaluer l'intégrale de  $f$  sur le bord  $\partial\Omega$

$$\int_{\partial\Omega} f(z) dz = \sum_j \int_{\partial D_j} f(z) dz = 2\pi i \sum_j Res_{p_j}(f) \quad (5.3)$$

qui permet de calculer de très nombreuses intégrales.

La justification de cette propriété est la suivante. Soit  $\gamma(\theta)$  un lacet encerclant  $P$ . Le théorème intégrale de Cauchy permet de déformer le parcours en un cercle de rayon  $r$  qui peut être paramétré par  $\mu(\theta) = P + re^{i\theta}$ . Ce cercle est à l'intérieur du disque de convergence de la série de Laurent de  $f$ . On rappelle que  $dz = ire^{i\theta} d\theta$ . Le coefficient  $-1$  de la série de Laurent donne bien

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{a_{-1}}{z - P} dz = a_{-1} \quad (5.4)$$

alors que pour  $n \neq -1$

$$\int_{\gamma} (z - P)^n dz = r^{n+1} i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta = 0 \quad (5.5)$$

**Théorème 43.** On appelle ordre du pôle, le dernier entier  $k$  tel que  $(z - P)^k f(z)$  est borné en  $P$ . Autrement dit,

$$\text{Ordre du pôle} = \lim_{z \rightarrow P} \left| \frac{\ln |f(z)|}{\ln |z - P|} \right| \quad (5.6)$$

Le résidu d'une fonction  $f$  ayant un pôle d'ordre  $k$  en  $P$  est calculé à partir de la formule

$$\operatorname{Res}_f(P) = \frac{1}{(k-1)!} \left( \frac{\partial}{\partial z} \right)^{k-1} [(z-P)^k f(z)] \Big|_{z=P} \quad (5.7)$$

**Exemple 12.** Calculons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \quad (5.8)$$

qui peut être calculée directement ( $= \pi!$ ). Les pôles sont simples, car les zéros sont simples, et ils sont localisés en  $z = \pm i$ . Si les pôles sont simples, le calcul des résidus est immédiat

$$\operatorname{Res}_p(f) = \lim_{z \rightarrow p} (z-p)f(z) \quad (5.9)$$

D'où

$$\operatorname{Res}_i(f) = \frac{1}{2i} \quad (5.10)$$

Soit  $\gamma_R$  le chemin allant de  $-R$  à  $+R > 1$  sur l'axe réel et complété par le demi-arc-de-cercle de rayon  $R$  dans le demi-plan supérieur. Ce chemin encercle le pôle  $+i$  et par conséquent

$$\int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i \operatorname{Res}_i(f) = \pi \quad (5.11)$$

D'un autre côté, sur le demi-cercle  $\beta_R$  de rayon  $R$ , nous avons en majorant l'intégrale

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\beta_R} \frac{dz}{1+z^2} = 0 \quad (5.12)$$

car

$$\left| \int_{\beta_R} \frac{dz}{1+z^2} \right| = \left| \int_0^{+\pi} \frac{Re^{i\theta}}{1+R^2 e^{2i\theta}} d\theta \right| \quad (5.13)$$

d'où le résultat, car  $|1+R^2 e^{2i\theta}| \geq |1-R^2|$ .

**Exercice 28.** Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad (5.14)$$

**Exemple 13.** Nous désirons calculer :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad (5.15)$$

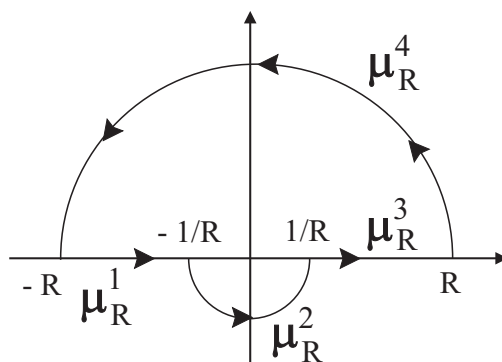


FIG. 5.1 –: Contour utilisé pour calculer l'intégrale (5.15).

Cette intégrale converge en 0, car  $\sin x \approx x, x \rightarrow 0$ . Nous considérons la fonction intermédiaire :

$$g(z) = \frac{e^{iz}}{z} \quad (5.16)$$

Le pôle de cette fonction est en  $x = 0$  et son résidu en 0 est 1. Pour appliquer le théorème des résidus, il faut choisir un contour. Mais le contour d'intégration doit être tel que ce pôle n'y réside pas ! Nous formons donc le contour  $\mu_R = \cup_{i=1,4} \mu_R^i(t)$  comme sur la Fig. 5.1 avec

$$\mu_R^1(t) = t, \quad -R \leq t \leq -1/R \quad (5.17)$$

$$\mu_R^2(t) = e^{it}/R, \quad \pi \leq t \leq 2\pi \quad (5.18)$$

$$\mu_R^3(t) = t, \quad 1/R \leq t \leq R \quad (5.19)$$

$$\mu_R^4(t) = Re^{it}, \quad 0 \leq t \leq \pi \quad (5.20)$$

et donc :

$$\oint g(z) dz = \sum_{j=1,4} \oint_{\mu_R^j} g(z) dz = 2\pi i \quad (5.21)$$

Nous avons

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \oint_{\mu_R^1} g(z) dz + \oint_{\mu_R^3} g(z) dz \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \quad (5.22)$$

Pour le contour  $\mu_R^4$ , nous coupons le parcours en deux suivant que  $\text{Im } z > \sqrt{R}$  (A) ou  $\text{Im } z < \sqrt{R}$  (B).

1. Sur (A),  $g(z) \leq \frac{e^{-\sqrt{R}}}{R}$ .

2. Sur  $(B)$ , l'arc de cercle parcourt les domaines  $0 \leq \theta \leq \arcsin \frac{\sqrt{R}}{R}$  et  $\pi - \arcsin \frac{\sqrt{R}}{R} \leq \theta \leq \pi$ .

Comme

$$\int_{\mu_R^4} g(z) dz = \int_{A \cup B} g(z) dz \quad (5.23)$$

alors

$$\left| \int_{\mu_R^4} g(z) dz \right| \leq \int_{\mu_R^4} |g(z)| dz = \int_A |g(z)| dz + \int_B |g(z)| dz \quad (5.24)$$

avec

$$\int_A |g(z)| dz \leq (\text{Longueur de } A) \times \frac{e^{-\sqrt{R}}}{R} \leq \pi e^{-\sqrt{R}} \quad (5.25)$$

$$\int_B |g(z)| dz \leq 2 \times \arcsin \frac{\sqrt{R}}{R} \quad (5.26)$$

de telle sorte que les deux intégrales tendent vers 0 quand  $R \rightarrow +\infty$ . Enfin

$$\begin{aligned} \oint_{\mu_R^2} g(z) dz &= \int_{\pi}^{2\pi} \frac{e^{ie^{it}/R}}{e^{it}/R} \left( \frac{i}{R} e^{it} \right) dt \\ &= i \int_{\pi}^{2\pi} e^{ie^{it}/R} dt \rightarrow \pi i, \text{ quand } R \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (5.27)$$

Nous avons donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx + \pi i = 2\pi i \quad (5.28)$$

D'où en prenant la partie imaginaire

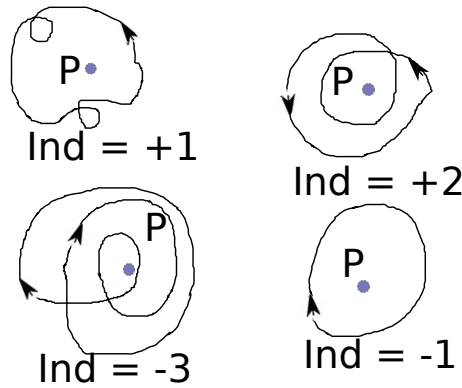
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi \quad (5.29)$$

## 5.2 Évaluation d'intégrales définies

### 5.3 Intégrale du type $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$

**Théorème 44.** Si  $|f(z)| \leq M/|z|^\alpha$  où  $\alpha > 1$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= 2\pi i \sum (\text{residus dans le plan supérieur}) \\ &= -2\pi i \sum (\text{residus dans le plan inférieur}) \end{aligned} \quad (5.30)$$

FIG. 5.2 –: Différents index d'une courbe encerclant un point  $P$ .

### Index d'une courbe

Considérons un arc fermé  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  supposé de classe  $C^1$  encerclant un point  $P$  (pas nécessairement une fois). On suppose que  $P$  n'appartient pas à  $\gamma$ . La quantité

$$Ind_{\gamma}(P) = \oint_{\gamma} \frac{1}{z - P} dz \quad (5.31)$$

ne prend que des valeurs entières et mesure le nombre de fois que l'arc entoure le point  $P$ , Cf. Fig. 5.2. Elle donne aussi le sens. Si l'arc  $\gamma$  entoure  $k$ -fois  $P$  dans le sens anti-horaire, son index vaut  $+k$ . Si le sens est horaire, son index est  $-k$ . Ce nombre est l'index d'une courbe ou son "winding number" (indice d'un point autour d'un cycle).

## 5.4 Produits infinis

Considérons le produit :

$$\prod_{k=0}^{k=N} (1 + a_k) \quad (5.32)$$

où pour des raisons techniques aucun des  $a_k$  n'est supposé égal à  $-1$ . Que peut-on dire sur la limite  $n \rightarrow \infty$ ?

**Théorème 45.** *Si :*

$$\sum_k |a_k| < \infty \quad (5.33)$$

alors

$$\prod_k (1 + |a_k|) \text{ et } \prod_k (1 + a_k) \text{ convergent} \quad (5.34)$$

D'où le résultat :

**Théorème 46.** Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe telle que

$$\sum_k |f_k(z)|^k \text{ converge } \forall z \in \Omega \quad (5.35)$$

alors

$$g(z) = \prod_k (1 + f_k(z)) \quad (5.36)$$

est holomorphe sur  $\Omega$ .

## 5.5 Fonction Gamma

La fonction  $\Gamma(z)$  intervient dans la transformée de Laplace de  $f(t) = t^{z-1}$  en raison de définition :

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0 \quad (5.37)$$

Intégrant par parties

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \\ &= - \int_0^\infty \frac{d}{dt} e^{-t} t^{z-1} dt \\ &= z\Gamma(z) \end{aligned} \quad (5.38)$$

La définition de la fonction  $\Gamma(z)$  montre que  $\Gamma(1) = 1$  et nous en déduisons

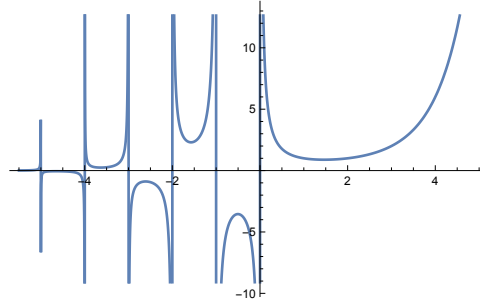
$$\Gamma(k) = (k-1)\Gamma(k-1) = (k-1)! \quad (5.39)$$

Si la définition de la fonction *Gamma* n'est valable que pour  $\operatorname{Re} z > 0$ , l'identité (5.38) montre que  $\Gamma(z)$  est aussi méromorphe dans le domaine  $\{z \in \mathbb{C} : z > -1\}$  avec un pôle simple en  $-1$ . Itérant la même identité, on démontre que  $\Gamma(z)$  est en fait définie dans tout le plan complexe sauf aux entiers négatifs où elle a un pôle simple.

**Proposition 2.** Pour  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  :

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi z}{\sin \pi z} \quad (5.40)$$



FIG. 5.3 — . Fonction  $\Gamma(x)$ .

Il suffit d'établir cette identité pour  $0 < \operatorname{Re} z < 1$  pour qu'elle soit vraie dans le plan complexe. Dans ce cas

$$\begin{aligned}
 \Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(s+t)} s^{-z} t^{z-1} ds dt \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u} v^{z-1} (1+v)^{-1} du dv \\
 &= \int_0^\infty (1+v)^{-1} v^{z-1} dv
 \end{aligned} \tag{5.41}$$

après le changement de variable  $u = s + t$  et  $v = t/s$ . La dernière intégrale est égale à

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + e^x)^{-1} e^{xz} dx \tag{5.42}$$

qui est une fonction holomorphe dans le domaine  $0 < \operatorname{Re} z < 1$ . Pour démontrer la dernière égalité, il suffit de se concentrer sur la ligne  $z = 1/2 + i\xi$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(2 \cosh \frac{x}{2}\right)^{-1} e^{ix\xi} dx = \frac{\pi}{\cosh(\pi\xi)} \tag{5.43}$$

Or

$$\frac{\pi}{\sin \pi(\frac{1}{2} + i\xi)} = \frac{\pi}{\cosh \pi\xi} \tag{5.44}$$

Ce qui achève la démonstration.

## 5.6 Fonction Zeta de Riemann

La fonction zeta de Riemann est définie par :

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s}, \operatorname{Re} s > 1 \quad (5.45)$$

En particulier

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \quad (5.46)$$

Cette fonction intervient dans de nombreux calculs de physique statistique, voir en particulier la condensation de Bose-Einstein. Elle intervient aussi en théorie des nombres dû au théorème suivant :

**Théorème 47.** *Soit  $\{p_j : j \geq 1\} = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$  l'ensemble des nombres premiers. Alors, pour  $\operatorname{Re} s > 1$*

$$\zeta(s) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - p_j^{-s})^{-1} \quad (5.47)$$

De façon surprenante, la démonstration est très simple. Nous pouvons développer le membre de droite de (5.47)

$$1 + \sum_j p_j^s + \sum_{j_1 < j_2} (p_{j_1} p_{j_2})^s + \sum_{j_1 < j_2 < j_3} (p_{j_1} p_{j_2} p_{j_3})^s + \dots \quad (5.48)$$

qui est équivalente à la définition (5.46), car chaque nombre peut être décomposé de façon unique en produit de facteurs premiers.

**Théorème 48.** *La fonction de Riemann définit une fonction méromorphe dans  $\mathbb{C}$  avec un pôle simple en 1.*

Définissons la fonction

$$g(t) = \sum_{n \geq 1} e^{-n^2 \pi t} \quad (5.49)$$

Cette fonction est reliée à la fonction  $\zeta$ . Nous avons en effet :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} g(t) t^{s-1} dt &= \sum_{n \geq 1} n^{-2s} \pi^{-s} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt \\ &= \zeta(2s) \pi^{-s} \Gamma(s) \end{aligned} \quad (5.50)$$

Rappelons l'identité de Jacobi, cf. (4.24), qui implique

$$g(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} t^{-1/2} + t^{-1/2} g(1/t) \quad (5.51)$$

Nous avons :

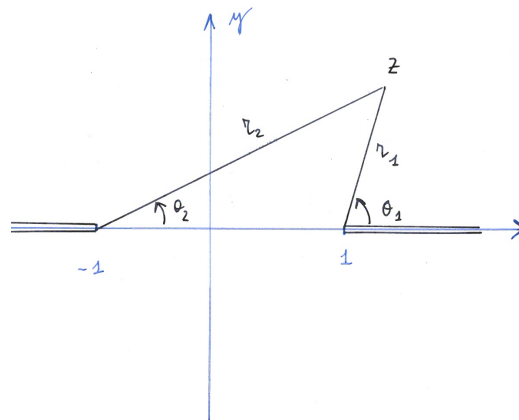
$$\int_0^{\infty} g(t)t^{s-1}dt = \int_0^1 g(t)t^{s-1} dt + \int_1^{\infty} g(t)t^{s-1} dt \quad (5.52)$$

## 5.7 Problèmes

1. Appliquer le théorème intégral de Cauchy (en le justifiant) pour calculer ( $\gamma$  est un cercle entourant l'origine)

$$\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z} dz \text{ et } \int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2} dz \quad (5.53)$$

2. On rappelle qu'une coupure dans le plan complexe est une « barrière » qui empêche un chemin quelconque d'être déformé lorsque les fonctions sont multivaluées.
  - a) Démontrer que  $f(z) = \ln(z^2)$  est analytique sur  $A = \{z | z \neq 0 \text{ et } \arg z \neq \pm\pi/2\}$ .
  - b) On cherche à déterminer la région du plan complexe où la fonction  $z \rightarrow \sqrt{e^z + 1}$  est analytique. On choisira la coupure de la fonction  $w \rightarrow \sqrt{w}$  telle que  $\sqrt{w}$  soit analytique dans le domaine  $\mathbb{C} \setminus \{x + iy | y = 0, x \leq 0\}$ . Quelle est sa dérivée?
3. Démontrer que la branche de la fonction  $w \rightarrow \sqrt{w}$  peut être choisie de telle sorte que la fonction  $z \rightarrow \sqrt{z^2 - 1}$  soit analytique dans la région schématisée dans la figure.



4. Démontrer que :

a)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad (5.54)$$

b)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix\zeta}}{1+x^2} dx = \pi e^{-|\zeta|} \quad (5.55)$$

5. Nous désirons calculer l'intégrale de Fourier

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix\zeta}}{2 \cosh(x/2)} dx \quad (5.56)$$

a) Quels sont les pôles de l'intégrant ? Pourquoi ne peut-on pas appliquer le théorème des résidus directement ?

b) Pour calculer cette intégrale, nous allons la comparer avec celle prise sur le chemin  $\gamma(x) = x - 2\pi i$ . Démontrer que :

$$A + e^{2\pi\zeta} A = 2\pi i \operatorname{Res}_{-i\pi} \left[ \frac{e^{i\pi\zeta}}{2 \cosh(z/2)} \right] \quad (5.57)$$

En déduire  $A$ .

6. Nous désirons calculer :

$$B = \int_0^{\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^2} dx \quad \alpha \in [0,1] \quad (5.58)$$

a) On pose  $z^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha\theta}$   $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ . Quelle est la coupure introduite dans le plan complexe par cette définition ?

b) Soit  $\gamma_R$  le chemin défini par 1)  $0 < r < R, \theta = 0$  2)  $r = R, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ , 3)  $R > r > 0, \theta = 2\pi$ . Démontrer

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{z^\alpha}{1+z^2} dz = B - e^{2\pi i \alpha} B \quad (5.59)$$

c) Calculer l'intégrale par le théorème des résidus. En déduire  $B$ .

7. Soit  $z \in \mathbb{C}$  donné. On considère la fonction (appelée fonction génératrice)

$$f(\zeta) = e^{z(\zeta-1/\zeta)/2} \quad (5.60)$$

Démontrer que  $f(\zeta)$  peut être écrit comme une série

$$f(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n(z)\zeta^n \quad (5.61)$$

où la fonction de Bessel  $J_n(z)$  est définie par

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \zeta^{-n-1} e^{z(\zeta-1/\zeta)/2} d\zeta \quad (5.62)$$

$\gamma$  étant un cercle de rayon quelconque centré sur l'origine.

8. En se plaçant sur le cercle unité, déduire de l'expression précédente :

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\pi} \cos(n\theta - z \sin \theta) d\theta \quad (5.63)$$

En déduire que  $J_n(z)$  est bornée quelque soit  $z \in \mathbb{R}$ .

9. Dans l'intégrale (5.62), on fait le changement de variable  $\zeta \rightarrow 2\zeta/z$ . En déduire en justifiant l'inversion des signes  $\sum$  et  $\int$

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k} \int_{\gamma} \frac{e^{\zeta}}{\zeta^{n+k+1}} d\zeta \quad (5.64)$$

Utilisant le théorème des résidus, démontrer le développement suivant

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k} \quad n \geq 0 \quad (5.65)$$

et

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(k-n)}}{k!} \frac{1}{(k-n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} \quad n \leq 0 \quad (5.66)$$

10. En déduire une relation entre  $J_n(z)$  et  $J_{-n}(z)$ .

11. Démontrer que  $J_n(z)$  satisfait à l'équation différentielle :

$$\frac{d^2\phi}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\phi}{dz} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) \phi(z) = 0 \quad (5.67)$$

12. Utilisant le théorème de la phase stationnaire, démontrer le comportement asymptotique

$$J_n(z) \sim_{z \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (5.68)$$

Deuxième partie  
Fonctions de Green





# Introduction

## 1.1 Introduction

Nous sommes intéressés à trouver la solution générale des équations aux dérivées partielles linéaires. À titre d'exemple, considérons l'équation de la chaleur en une dimension ( $D$  est le coefficient de diffusion) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 0 < x < L \quad (1.1)$$

avec les conditions :

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad (\text{conditions aux frontières}) \quad (1.2)$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad (\text{condition initiale}) \quad (1.3)$$

où  $f(x,t)$  et  $u_0(x)$  sont des données du problème. La méthode générale est celle de la séparation des variables. On cherche  $u(x,t)$  sous la forme :

$$u(x,t) = \sum_{n \geq 1} a_n(t) \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right) \quad (1.4)$$

avec :

$$f(x,t) = \sum_{n \geq 1} f_n(t) \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right) \quad \text{et} \quad f_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x,t) \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right) dx \quad (1.5)$$

$$u_0(x) = \sum_{n \geq 1} g_n \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right) \quad \text{et} \quad g_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right) dx \quad (1.6)$$

d'où

$$a'_n(t) + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} a_n(t) = f'_n(t) \quad \text{et} \quad a_n(0) = g_n \quad (1.7)$$

La méthode de la variation de la constante permet d'intégrer cette dernière équation :

$$a_n(t) = e^{-n^2 \pi^2 t / L^2} \left[ g_n + \int_0^t ds e^{+n^2 \pi^2 s / L^2} f_n(s) \right] \quad (1.8)$$

La solution générale est donc :

$$u(x,t) = \frac{2}{L} \sum_{n \geq 1} e^{-n^2 \pi^2 t / L^2} \left[ \frac{2}{L} \int_0^L u_0(y) \sin\left(n \frac{\pi y}{L}\right) dy + \int_0^t ds e^{+n^2 \pi^2 s / L^2} \int_0^L f(y,t) \sin\left(n \frac{\pi y}{L}\right) dy \right] \quad (1.9)$$

qui peut être mis sous la forme en intervertissant les signes  $\sum$  et  $\int$  :

$$u(x,t) = \int_0^L G(x,t;y,0)u_0(y) dy + \int_0^t \int_0^L G(x,t;y,s)f(y,s) dy ds \quad (1.10)$$

où la fonction de Green est définie par :

$$G(x,t;y,s) = \frac{2}{L} \sum_{n \geq 1} e^{-n^2 \pi^2 / L^2 (t-s)} \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (1.11)$$

Par conséquent :

- Si nous connaissons  $G(\dots)$ , nous pouvons trouver la solution quelques soient  $u_0$  et  $f$ .
- $G(\dots)$  est une “fonction” de deux paires  $(x,t)$  et  $(y,s)$ .
- $G(\dots)$  s’exprime en fonction des fonctions propres du Laplacien avec les mêmes conditions aux limites.

## 1.2 L’espace $\mathcal{L}^2$

Pour toutes fonctions à valeurs complexes et continues sur  $[a,b]$ , nous pouvons définir le produit scalaire

$$\forall f,g \in C([a,b]) \quad (f,g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)} dx \quad (1.12)$$

ainsi que la norme

$$\|f\| = \sqrt{(f,f)} \quad (1.13)$$

Mais cet espace  $C([a,b])$  n’est pas nécessairement un espace approprié pour la « suite des opérations », car il n’est pas fermé : une suite de fonctions continues peut ne pas converger dans  $C([a,b])$ , alors qu’elle converge dans un sens que nous définirons plus bas. Là encore, il y a d’autres difficultés. Si deux fonctions  $f, g$  sont intégrables au sens de Riemann, leur produit  $f \times g$  ne l’est pas nécessairement. Cette propriété n’est vraie que si l’intégrale est prise dans un sens plus large (intégrale de Lebesgue). Comme les fonctions qui nous intéresseront seront toutes intégrables au sens de Riemann, nous oublierons ce problème<sup>1</sup>.

**Définition 17.** On appelle  $\mathcal{L}^2(a,b)$  l’espace vectoriel des fonctions telles que

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty \quad (1.14)$$

---

1. «La plus grande jouissance dans l’existence, c’est de vivre dangereusement ...», F. Nietzsche.

Comme

$$\|\alpha f + \beta g\| \leq \|\alpha f\| + \|\beta g\| = |\alpha| \|f\| + |\beta| \|g\| \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall f, g \in \mathcal{L}^2(a, b) \quad (1.15)$$

$\alpha f + \beta g$  est dans  $\mathcal{L}^2(a, b)$  si  $f$  et  $g$  sont toutes les deux dans  $\mathcal{L}^2(a, b)$ .

**Remarque 6.** Dans  $\mathcal{L}^2(a, b)$ , l'égalité  $\|f\| = 0$  n'implique pas  $f(x) = 0$  sur tous les points de l'intervalle  $[a, b]$ . La fonction nulle sauf en un nombre fini de points a une norme nulle. La fonction nulle sur  $\mathcal{L}^2(a, b)$  définit donc une classe d'équivalence dont la fonction strictement nulle est la seule représentante qui soit continue. De même, nous dirons que  $f$  et  $g$  sont égales dans  $\mathcal{L}^2(a, b)$  si  $\|f - g\| = 0$ . Cela ne veut pas dire que  $f$  et  $g$  sont partout identiques, mais qu'elles sont simplement égales presque partout.

**Définition 18.** Une suite  $f_n$  de fonction dans  $\mathcal{L}^2(a, b)$  converge si il existe une fonction  $f$  de  $\mathcal{L}^2(a, b)$  telle

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0 \quad (1.16)$$

**Définition 19.** Une suite  $f_n$  de fonctions de  $\mathcal{L}^2(a, b)$  est une suite de Cauchy si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall m, n > N \quad \|f_n - f_m\| < \epsilon \quad (1.17)$$

**Théorème 49.**  $\mathcal{L}^2(a, b)$  est complet. Autrement dit, toute suite de Cauchy converge dans  $\mathcal{L}^2(a, b)$ .

**Exercice 29.** 1. Considérons la suite de fonctions  $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$f_n(x) = x^n \quad x \in [0, 1] \quad (1.18)$$

- a) Étudier la convergence presque partout sur  $[0, 1]$ .
- b) Démontrer que  $x^n \rightarrow \mathcal{L}^2 0$ .

2. Considérer la suite de fonctions

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ n, & 0 < x < 1/n \\ 0, & 1/n < x \leq 1 \end{cases} \quad (1.19)$$

- a) Déterminer si cette suite converge presque partout sur  $[0, 1]$ .
- b) Démontrer que cette suite ne converge pas dans  $\mathcal{L}^2$ .

Conclusion : il n'y a pas équivalence entre les deux types de convergence.

Un théorème utile est le suivant (test de Weierstrass)

**Théorème 50.** *Soit  $f_n$  une séquence de fonctions sur un intervalle  $I$ . On suppose qu'il existe une séquence de nombre réels positifs tels que*

$$|f_n(x)| < M_n \quad (1.20)$$

*Si*

$$\sum M_n \quad (1.21)$$

*converge, alors*

$$\sum f_n(x) \quad (1.22)$$

*converge de façon uniforme et absolument sur  $I$ .*

## Distributions

**Définition 20.** Une distribution est une fonctionnelle continue sur l'espace des fonctions test noté  $C_0^\infty(\mathbb{R})$ . Les fonctions test sont des fonctions infiniment différentiables sur  $\mathbb{R}$  et nulles en-dehors d'un intervalle  $[-a, a]$ , où  $a$  n'est pas précisé. Autrement dit, une distribution associe un nombre réel à toutes fonctions test.

**Exemple 14.** Un exemple de fonction de test est :

$$\phi(x) = e^{-1/(a^2-x^2)} \text{ si } -a < x < a \text{ et } 0 \text{ sinon} \quad (2.1)$$

Pour une distribution  $f$ , on note généralement

$$f(\phi) = \langle f, \phi \rangle = \int f(x)\phi(x) dx \quad (2.2)$$

bien que l'intégrale ne soit pas une "vraie" intégrale, car  $f$  n'est pas une fonction !  $f$  est en fait l'abstraction mathématique d'une densité.

D'autre part, cette application doit être linéaire

$$f(a\phi + b\psi) = af(\phi) + bf(\psi) \quad (2.3)$$

pour tous nombres réels  $(a, b)$ .

**Exemple 15.** Un premier exemple de distribution est donné par n'importe quelle fonction  $f(x)$  qui peut être intégrée. L'opération

$$f(\phi) = \int f(x)\phi(x) dx \quad (2.4)$$

est effectivement une opération linéaire. Les distributions incluent donc toutes les fonctions intégrables, d'où le nom de fonctions généralisées.

**Exemple 16.** La distribution Delta de Dirac notée  $\delta(z)$  ou  $\delta(z - x)$  (distribution centrée en  $z = x$ ) n'est pas une fonction. Son action sur l'espace des fonctions est

$$\begin{aligned} \delta(\phi) &= \phi(0) = \int \delta(z)\phi(z) dz \\ \delta_x(\phi) &= \phi(x) = \int \delta(z - x)\phi(z) dz \end{aligned} \quad (2.5)$$

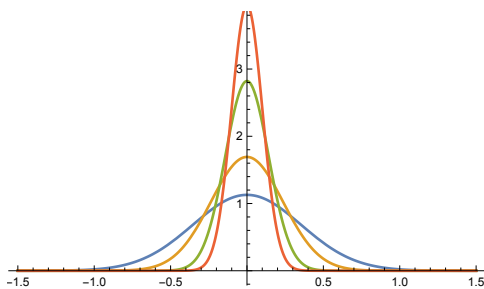


FIG. 2.1 –: Graphes de  $G(j, x) = j/\sqrt{\pi}e^{-jx^2}$  pour  $j = 2, 3, 5, 7$ .

Il est possible de généraliser aux distributions les opérations que l'on fait d'habitude sur des fonctions :

### 1. DIFFÉRENTIATION

Si  $f$  est une fonction usuelle, une intégration par parties montre que

$$\langle f', \phi \rangle = \int f'(x)\phi(x)dx = - \int f(x)\phi'(x) dx = - \langle f, \phi' \rangle \quad (2.6)$$

Pour une distribution, l'accroissement relatif  $f'(x) = \Delta f/\Delta x$  n'a aucun sens, mais on peut définir une dérivée par

$$\langle f', \phi \rangle = - \langle f, \phi' \rangle \quad (2.7)$$

et

$$\langle f^{(n)}, \phi \rangle = (-1)^n \langle f, \phi^{(n)} \rangle \quad (2.8)$$

À titre d'exemple, considérons la distribution de Heavyside définie par

$$H(x) = 1 \text{ si } x > 0 \text{ et } 0 \text{ sinon} \quad (2.9)$$

$H(x)$  est une fonction usuelle, mais elle n'est pas dérivable au sens usuel. Mais sa dérivée au sens des distributions est connue

$$\langle H', \phi \rangle = \langle H, -\phi' \rangle = - \int_0^{+\infty} \phi'(x) dx = \phi(0) \quad (2.10)$$

car  $\phi$  est nulle en-dehors de l'intervalle. On a donc

$$\frac{d}{dx}H(x) = \delta(x) \quad (2.11)$$

2. MULTIPLICATION PAR DES FONCTIONS SUFFISAMMENT RÉGULIÈRES ET AYANT UNE INVERSE :

Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable et bijective, avec  $g'(x) > 0$ . Nous avons en faisant le changement de variable  $y = g(x)$

$$f \circ g, \phi = \int f(g(x))\phi(x)dx = \int f(y)\phi(g^{-1}(y))\frac{dy}{g'(g^{-1}(y))} \quad (2.12)$$

**Exercice 30.** Démontrer :  $\delta(cx) = \frac{1}{c}\delta(x)$ .

**Exercice 31.** Que devient la fonction  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \delta(x - x')\delta(y - y')$  en coordonnées polaires? Rép.  $1/r'\delta(r - r')\delta(\theta - \theta')$ .

3. CONVERGENCE DES DISTRIBUTIONS :

Soit  $\{f_j\}_{j \geq 0}$  une suite de distributions. Nous dirons que  $f_j$  tend vers  $f$  si et seulement si pour toutes fonctions test

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (f_j, \phi) = (f, \phi) \quad (2.13)$$

Ce type de convergence est appelée convergence au sens faible.

**Exercice 32.** Soit  $\psi(x)$  une fonction suffisamment régulière telle  $\int \psi(x) dx = 1$ . On définit la suite  $\psi_j(x) = j\psi(jx)$ .

a) Démontrer  $\int \psi_j(x) dx = 1$ .

b) Démontrer  $\lim_{j \rightarrow \infty} \psi_j(x) = \delta(x)$  au sens faible.

4. TRANSFORMÉE DE FOURIER DES DISTRIBUTIONS On définit la transformée de Fourier des distributions régulières à condition de prendre des précautions. En effet, la définition naturelle de la transformée de Fourier d'une distribution  $T$  devrait être

$$\forall \phi, \quad (\mathcal{F}T, \phi) = (T, \mathcal{F}(\phi)) \quad (2.14)$$

Mais il y a un problème. Il existe en effet des fonctions à support borné, c'est-à-dire nulle en dehors d'un intervalle, dont la TF n'est pas à support borné. D'où la nécessité de réduire les contraintes imposées aux fonctions test.

On considère donc un nouvel ensemble de fonctions test : l'ensemble  $\mathcal{S}$  des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide à l'infini.

**Définition 21.** Une fonction est dite à décroissance rapide si et seulement si

$$\forall i, k \in \mathbb{N}^2 \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} x^k \phi^{(i)}(x) = 0 \quad (2.15)$$

Ainsi  $e^{-x^2}$  fait partie de cet ensemble, alors que  $1/(1+x^2)$  n'en fait pas partie. On appelle distribution tempérée toute application linéaire définie sur  $\mathcal{S}$  et à valeur dans  $\mathbb{C}$ .

## 2.1 Solutions élémentaires

Commençons par un exemple. On cherche à déterminer la solution de l'équation suivante:

$$D\Delta u - bu = \delta(\mathbf{x}) \quad (2.16)$$

où  $D$  et  $b$  sont des constantes. On traite le problème en  $d = 2$ . Cette équation est une équation de diffusion. L'espèce  $u$  diffuse dans le plan avec un coefficient de diffusion  $D$ . Elle est irréversiblement détruite avec un taux  $b$ . Le delta de Dirac agit comme un terme source: l'espèce  $u$  est créée avec un taux 1 en  $x = 0$ .

On résoud l'équation (2.16) en passant dans l'espace de Fourier.

$$-D\mathbf{k}^2 \tilde{u}(\mathbf{k}) - b\tilde{u} = 1 \quad (2.17)$$

d'où

$$\tilde{u}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{D\mathbf{k}^2 + b} \quad (2.18)$$

La transformée de Fourier inverse est alors:

$$u(x) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} k dk \int_0^{2\pi} d\theta \frac{e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}}}{D\mathbf{k}^2 + b} \quad (2.19)$$

La définition du produit scalaire donne  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{k} = |\mathbf{x}||\mathbf{k}| \cos \theta$ .

Définissons les fonctions

$$I_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} \cos(n\theta) \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.20)$$

(attention,  $n \in \mathbb{N}$ ). Ce sont des fonctions de Bessel modifiées.

## 2.2 Equations aux dérivées partielles du 1er ordre: Méthode des caractéristiques



## Le problème de Sturm-Liouville

Dans cette section, nous allons étudier un cadre général qui permet de montrer que certaines fonctions sont orthogonales entre elles. Nous allons obtenir ces fonctions comme les solutions d'une équation différentielle qui appartient à une classe très générale[1].

**Définition 22.** *L'équation de Sturm-Liouville est l'équation différentielle ordinaire*

$$\frac{d}{dx} \left( r(x) \frac{dy}{dx} \right) + (q(x) + \lambda p(x))y = 0 \text{ où } x \in [a,b] \quad (3.1)$$

Ici  $p(x), r(x), q(x)$  sont des fonctions à valeurs réelles sur  $[a,b]$  et où  $y(x)$  et la constante  $\lambda \in \mathbb{C}$  sont toutes les deux à DÉTERMINER. L'équation de Schrödinger est une équation de type Sturm-Liouville, où la fonction  $q(x)$  joue le rôle de potentiel (avec  $r(x) = p(x) = 1$ ).

**Exemple 17.** 1. L'équation de Bessel:  $x^2 y''(x) + cy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0$

2. L'équation d'Hermite:  $\frac{d}{dx} \left[ e^{-x^2} y'(x) \right] + \lambda e^{-x^2} y = 0$

3. L'équation de Chebyshev:  $\frac{d}{dx} \left[ \sqrt{1-x^2} y'(x) \right] + \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}} y = 0$

**Exemple 18.** *Considérons l'équation différentielle*

$$y'' + q(x)y = \lambda y(x) \quad x \in [a,b] \quad (3.2)$$

avec les conditions aux limites

$$u(a) \cos \alpha + u'(a) \sin \alpha = 0 \quad (3.3)$$

$$u(b) \cos \beta + u'(b) \sin \beta = 0 \quad (3.4)$$

Cette équation est du type (3.1) et elle peut être mise sous la forme

$$\mathcal{L}y = \lambda y \quad (3.5)$$

où  $\mathcal{L}$  est un opérateur. Le paramètre  $\lambda$  suggère que le problème soit apparenté à une sorte de problème à valeurs propres. Ce type de problème est un problème spectral de type Sturm-Liouville où  $\lambda$  joue le rôle des niveaux d'énergie dans l'équation de Schrödinger.

La raison principale qui nous conduit à considérer le problème des valeurs propres est le résultat suivant :

**Théorème 51.** *Soit  $A$  une matrice  $n \times n$  dans un espace vectoriel  $\mathcal{E}$  de dimension finie  $n$  muni d'un produit scalaire. Supposons*

$$\forall (x,y) \in \mathcal{E}^2 \quad (x, Ay) = (Ax, y) \quad (3.6)$$

Alors

1.  $\mathcal{E}$  possède une base orthonormale de vecteurs propres associés aux valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .
2.  $A$  peut être décomposé comme

$$A = \sum_i \lambda_i P_i \quad (3.7)$$

où les  $P_i$  sont des projections orthogonales.

Procédant par analogies, nous chercherons à :

1. Déterminer les vecteurs propres correspondants à l'opérateur  $\mathcal{L}$  et décrire le développement de  $y$  sur cette base.
2. Déterminer comment  $\mathcal{L}$  peut être écrit dans cette base.

Bien que l'équation de Sturm-Liouville ait une forme spéciale, beaucoup d'équations d'ordre 2 se ramènent à cette équations. En particulier :

**Théorème 52.** *Supposons que la fonction  $\alpha_1(x)$  ne s'annule jamais. La définition*

$$r(x) = \exp \left[ \int_0^x \frac{\alpha_2(t)}{\alpha_1(t)} dt \right] \quad (3.8)$$

$$q(x) = \frac{\alpha_3(x)}{\alpha_1(x)} r(x) \quad (3.9)$$

$$p(x) = \frac{r(x)}{\alpha_1(x)} \quad (3.10)$$

montre que l'équation de Sturm-Liouville est équivalente à l'équation :

$$\alpha_1(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + \alpha_2(x) \frac{dy}{dx} + (\alpha_3(x) + \lambda)y(x) = 0 \quad (3.11)$$

**Définition 23.** *On appelle problème de Sturm-Liouville (SLP) le problème qui consiste à déterminer la solution de l'équation :*

$$\frac{d}{dx} \left( r(x) \frac{dy}{dx} \right) + (q(x) + \lambda p(x))y = 0 \text{ où } x \in [a, b] \quad (3.12)$$

avec les conditions aux limites

$$k_1 y(a) + k_2 y'(a) = 0 \quad (3.13)$$

$$l_1 y(b) + l_2 y'(b) = 0 \quad (3.14)$$

où  $(k_1, k_2) \neq (0, 0)$  et  $(l_1, l_2) \neq (0, 0)$  sont donnés et où  $\lambda$  est un paramètre quelconque qui est déterminé par la condition que le problème ait une solution autre que la solution nulle. C'est donc la solution du problème qui détermine  $\lambda$ . On appelle  $\lambda$  la valeur propre et la solution associée  $y(x, \lambda)$  la fonction propre associée.

**Exercice 33.** Trouver la solution du problème de Sturm-Liouville pour les problèmes suivants:

1.  $y'' + \lambda y = 0, y(0) = y'(\pi) = 0$
2.  $y'' + \lambda y = 0, y(0) - y'(\pi) = 0$

**Définition 24.** Il y a 3 types de problèmes de SLP :

1. Régulier si  $p(x) > 0$  et  $r(x) > 0$  sur  $[a, b]$ .
2. Singulier si  $p(x) > 0$  et  $r(x) \geq 0$  sur  $]a, b[$  avec  $p(a) = p(b) = 0$ .
3. Périodique  $y(a) = y(b) = 0$ .

Dans la suite, nous nous intéresserons principalement aux problèmes réguliers ou périodiques.

**Remarque 7.** L'une des propriétés remarquables est qu'une matrice symétrique possède des valeurs propres réelles et que ses vecteurs propres forment une base orthonormée. Nous verrons que le problème de Sturm-Liouville a des propriétés similaires et que l'on peut définir l'adjoint d'un opérateur comme on définit l'adjoint d'une matrice et que ceux-ci possèdent une base propre orthogonale.

**Remarque 8.** Le spectre des valeurs propres de l'équation de Schrödinger sur l'axe réel est toujours continu. Il existe des valeurs de  $\lambda$  pour lesquelles les solutions sont à la fois non bornées et ne décroissent pas à l'infini.

Anderson (1958) a démontré qu'un potentiel aléatoire stationnaire pour les milieux désordonnés peut avoir un spectre dense de fonctions propres associées à des fonctions ayant une décroissance exponentielle. Ce phénomène est appelé localisation d'Anderson.

Comme exemple, considérons l'équation de Schrödinger sous la forme :

$$u''(x) + \left[ \sum_{n \in \mathbb{Z}} Q_n f(x - n) \right] u(x) = \lambda u(x) \quad (3.15)$$

où  $f(x)$  est un potentiel donné et où les  $Q_n$  sont des variables aléatoires indépendantes distribuées suivant la même loi de probabilité. Le spectre de cette équation est dense et dénombrable dans  $\lambda \in [0, \infty[$  avec des solutions exponentiellement décroissantes.

**Théorème 53.** Pour un problème RÉGULIER :

1. Les valeurs propres sont réelles.

2. Les fonctions propres correspondantes à des valeurs propres distinctes sont orthogonales avec le poids  $p(x)$  :

$$\int_a^b dx p(x)u_i(x)u_j(x) = 0 \text{ si } i \neq j$$

3. Les valeurs propres sont simples : l'espace associé à une valeur propre est de dimension 1.  
 4. L'opérateur associé est auto-adjoint.  
 5. Le spectre de l'opérateur  $-L$  défini plus loin est borné inférieurement.  
 6. L'ensemble des vecteurs propre constitue une base complète sur laquelle toute fonction suffisamment régulière et ayant les bonnes conditions aux limites peut être développée.

POINT 1 :

Nous avons en notant  $\bar{y}$  le conjugué complexe de  $y$  :

$$\bar{y} \frac{d}{dx} \left[ r \frac{dy}{dx} \right] + \bar{y}(q + \lambda p)y = 0 + \text{Conditions aux limites} \quad (3.16)$$

$$y \frac{d}{dx} \left[ r \frac{d\bar{y}}{dx} \right] + y(q + \bar{\lambda}p)\bar{y} = 0 + \text{Conditions aux limites} \quad (3.17)$$

d'où

$$[r(y'\bar{y} - y\bar{y}')]' + (\lambda - \bar{\lambda})p|y|^2 = 0 \quad (3.18)$$

Soit en intégrant

$$[r(y'\bar{y} - y\bar{y}')]'_a^b = -(\lambda - \bar{\lambda}) \int_a^b dx p(x)|y(x)|^2 \quad (3.19)$$

En raison des conditions aux limites, le membre de gauche est nul. La fonction  $p(x)$  est supposée strictement positive et l'intégrale est nécessairement non nulle si la fonction  $y(x)$  n'est pas la fonction nulle. D'où  $\lambda = \bar{\lambda}$ .  $\square$

POINT 2 :

Soient  $u_{i,j}$  deux fonctions propres associées à deux valeurs propres  $\lambda_i \neq \lambda_j$ . En procédant comme au point 1 :

$$[r(u'_i u_j - u_i u'_j)]_a^b = -(\lambda_i - \lambda_j) \int_a^b dx p(x)u_i(x)u_j(x) = 0 \quad (3.20)$$

Comme auparavant, le membre de gauche est nul en raison des conditions aux limites. D'où le résultat.  $\square$

POINT 3 :

Ce point est le plus délicat. Rappelons le théorème d'algèbre :

**Théorème 54.** Soit  $A$  une matrice  $n \times n$  définie dans un espace vectoriel  $V$  avec un produit scalaire  $(x, y)$ . Si  $(Ax, y) = (x, Ay)$  alors

1.  $V$  possède une base orthonormale  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  de vecteurs propres correspondants à des valeurs propres distinctes  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ .
2. La matrice  $A$  peut être décomposée comme  $\sum_{i=1, n} \lambda_i P_i$  où les  $P_i$  sont les projecteurs sur la base  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ .

Pour définir l'équivalent d'une matrice symétrique, il faut définir ce qu'est un opérateur auto-adjoint.

Considérons l'opérateur  $L$  défini par :

$$Lu = a_0(x) \frac{d^2 u}{dx^2} + a_1(x) \frac{du}{dx} + a_2(x) u(x) \quad (3.21)$$

sur l'espace des fonction définies sur  $[x_0, x_1]$  avec les conditions aux limites  $u(x_0) = u(x_1) = 0$ . On peut prendre d'autres conditions aux limites mais celles-ci simplifieront l'écriture. Nous désirons trouver la solution de

$$Lu = f(x) \quad (3.22)$$

sous la forme

$$u(x) = \int_{x_0}^{x_1} G(x; z) f(z) dz = (G_x, f) \quad (3.23)$$

où  $G_x(z) = G(x; z)$  est une fonction de  $x$  quand  $z$  est donné. On a

$$u(x) = (G_x, f) = (G_x, Lu) \quad (3.24)$$

**Définition 25.** On définit l'adjoint de  $L$ , l'opérateur  $L^*$  tel que

$$\forall (u, v), \quad (v, Lu) = (L^* v, u) + BT \quad (3.25)$$

où  $BT$  désigne l'ensemble des termes qui ne dépendent que des extrémités de l'intervalle  $[x_0, x_1]$ .

**Exemple 19.** Ici

$$\begin{aligned} (v, Lu) &= \int_{x_0}^{x_1} dx v [a_0 u'' + a_1 u' + a_2 u] \\ &= (a_0 v'' + (2a_0' - a_1) v' + (a_2 + a_0'' - a_1') v, u) + [a_0 (v u' - v' u) + (a_1 - a_0') uv]_{x_0}^{x_1} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Le dernier terme est un terme qui ne dépend que des points  $x_0$  et  $x_1$ . Il est nul en raison des conditions aux limites. Le premier terme, quant à lui, donne la définition de l'adjoint de  $L$

$$L^*v = a_0v'' + (2a'_0 - a_1)v' + (a_2 + a''_0 - a'_1)v \quad (3.27)$$

**Définition 26.** Un opérateur est auto-adjoint si  $L = L^*$ . En particulier, si  $a'_0 = a_1$ , il est de type Sturm-Liouville (et nécessairement auto-adjoint).

**Théorème 55.** On a :

$$L^*G_x = \delta(x - z) \quad (3.28)$$

au sens des distributions. En effet :

$$u(x) = (G_x, Lu) = (L^*G_x, u) + BT \quad (3.29)$$

Mais  $BT = 0$  si  $G_x(x_0) = G_x(x_1) = 0$ . Donc

$$u(x) = \int_{x_0}^{x_1} G_x(z)u(z) dz \quad (3.30)$$

D'où la propriété.

**Remarque 9.** Un opérateur de type Sturm-Liouville peut être mis sous la forme

$$Lu = (p(x)u')' + q(x)u \quad (3.31)$$

avec les conditions aux limites

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0 \quad (3.32)$$

$$\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0 \quad (3.33)$$

**Théorème 56.** Les valeurs propres de l'opérateur  $-L$  possèdent une borne inférieure.

Nous démontrons le théorème lorsque  $\alpha_2 = \beta_2 = 0$  (dans le cas contraire, la démonstration est moins évidente). Nous avons :

$$\begin{aligned} (-Lu, u) &= \int_a^b [-(pu')'\bar{u} - r|u|^2] dx \\ &= \int_a^b [p|u'|^2 - r|u|^2] dx + p(a)u'(a)u(a) - p(b)u'(b)u(b) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Mais  $u(a) = u(b) = 0$  en raison des conditions aux frontières. Si  $u$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$  alors :

$$\lambda \|u\|^2 = \int_a^b p(x)|u'|^2 dx - \int_a^b r(x)|u(x)|^2 dx \geq \|u\|^2 \max\{|r(x)| : a \leq x \leq b\} \quad (3.35)$$

Ce qui achève la démonstration.  $\square$

## 3.1 Existence des fonctions propres (vecteurs propres)

### Fonctions de Green

Considérons l'opérateur auto-adjoint :

$$L = p \frac{d^2}{dx^2} + p' \frac{d}{dx} + r \quad (3.36)$$

avec les conditions aux limites

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0, \quad |\alpha_1| + |\alpha_2| > 0 \quad (3.37)$$

$$\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0, \quad |\beta_1| + |\beta_2| > 0 \quad (3.38)$$

**Définition 27.** Une fonction de Green pour cette opérateur est une fonction :

1. De  $[a,b] \times [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ .
2.  $G(x,\xi)$  satisfait les conditions aux limites (3.37) pour les DEUX variables  $x$  et  $\xi$ .  $G(x,\xi) = G(\xi,x)$ .
3.  $G(x,\xi)$  est continue sur  $[a,b] \times [a,b]$  est de classe  $C^2$  sur  $[a,b] \times [a,b]$  sauf sur la droite  $x = \xi$ . En dehors de cette droite,  $G$  satisfait à  $L_x G(x,\xi) = 0$ .
4. Enfin, la dérivée (par rapport à  $x$ ) de  $G(x,\xi)$  subit un saut au voisinage de  $x = \xi$ , voir Fig. 3.1

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x = \xi^+, \xi) - \frac{\partial G}{\partial x}(x = \xi^-, \xi) = \frac{1}{p(\xi)} \quad (3.39)$$

**Exercice 34.** Démontrer que la dernière propriété revient à exiger :

$$L_x G(x,\xi) = \delta(x - \xi) \quad (3.40)$$

### Construction de la fonction de Green

Nous considérons à nouveau les conditions aux limites (3.37). L'équation différentielle étant une équation du deuxième ordre, nous savons que si nous pouvons trouver deux solutions indépendantes  $v_1$  et  $v_2$  telles que :

$$v_1(a) = \alpha_2 \quad v_1'(a) = -\alpha_1 \quad (3.41)$$

$$v_2(b) = \beta_2 \quad v_2'(b) = -\beta_1 \quad (3.42)$$

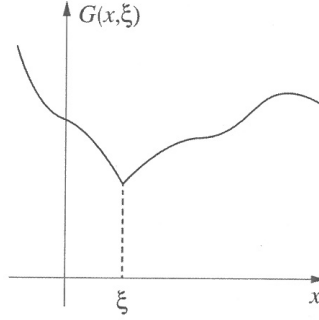


FIG. 3.1 – : Saut de la dérivée des fonctions de Green.

alors ce couple est unique. Nous supposons que ces deux solutions sont linéairement indépendantes, c'est-à-dire que le Wronskien  $W(v_1, v_2)(x)$ <sup>1</sup>

$$W(v_1, v_2) = v_1(x)v_2'(x) - v_1'(x)v_2(x) \quad (3.44)$$

ne s'annule jamais. Définissons  $G(x, \xi)$  comme :

$$G(x, \xi) = \begin{cases} c^{-1}v_1(\xi)v_2(x) & a \leq \xi \leq x \leq b \\ c^{-1}v_1(x)v_2(\xi) & a \leq x \leq \xi \leq b \end{cases} \quad (3.45)$$

où

$$c = p(x) [v_1(x)v_2'(x) - v_1'(x)v_2(x)] = p(x)W(v_1, v_2) \quad (3.46)$$

est une constante non-nulle.  $c$  est une constante, car

$$[p(v_1v_2' - v_1'v_2)] = v_1Lv_2 - v_2Lv_1 = 0 \quad (3.47)$$

$G(x, \xi)$  défini par (3.45) possède toutes les propriétés des fonctions de Green. Nous avons en particulier

$$\frac{\partial G}{\partial \xi}(x, x + \epsilon) - \frac{\partial G}{\partial \xi}(x, x - \epsilon) = \frac{1}{c} [v_1(x)v_2'(x + \epsilon) - v_1'(x - \epsilon)v_2(x)] \quad (3.48)$$

tend vers  $1/p(x)$  quand  $\epsilon \rightarrow 0$ .

---

1. Soient  $f, g$  deux fonctions. Le déterminant

$$W(f, g)(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} \quad (3.43)$$

est appelé le Wronskien de  $f$  et  $g$ .

Si  $y_1(x)$  et  $y_2(x)$  sont deux solutions différentes d'une équation homogène sur un intervalle, alors leur wronskien est strictement non-nul sur cet intervalle.



### Un problème équivalent

**Définition 28.** Pour toutes fonctions  $f$  de  $C([a,b])$ , on construit l'opérateur  $T$  agissant sur  $f$  :

$$(Tf)(x) = \int_a^b G(x,\xi)f(\xi) d\xi \quad (3.49)$$

**Théorème 57.** L'opérateur  $T$  joue le rôle de "l'inverse" de  $L$

$$L(Tf)(x) = u(x) \quad (3.50)$$

$$T(Lu)(x) = u(x) \quad (3.51)$$

**Théorème 58.** Si  $u$  est une vecteur propre du problème de Sturm-Liouville avec la valeur propre  $\lambda$ , c'est-à-dire

$$Lu = \lambda u \quad (3.52)$$

Alors  $u$  est valeur propre de  $T$  avec la valeur propre  $1/\lambda$  et  $\lambda \neq 0$ .

## 3.2 Fonctions de Green et développement sur une base propre

Considérons à nouveau le problème de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx} \left( r(x) \frac{dy}{dx} \right) + (q(x) + \lambda p(x))y = f(x) \text{ où } x \in [a,b] \quad (3.53)$$

avec les conditions aux limites:

$$k_1 y(a) + k_2 y'(a) = 0 \quad (3.54)$$

$$l_1 y(b) + l_2 y'(b) = 0 \quad (3.55)$$

où  $(k_1, k_2) \neq (0,0)$  et  $(l_1, l_2) \neq (0,0)$  Ce problème possède une séquence ordonnée de valeurs propres:

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \dots$$

avec des fonctions propres

$$\begin{cases} L\phi_j = \lambda_j \phi_j \\ \phi_j \text{ satisfaisant aux conditions aux limites} \end{cases} \quad (3.56)$$

qui peuvent orthonormales au sens du produit scalaire:

$$(\phi_i, \phi_j) = \delta_{i,j} \quad (3.57)$$

Comme cette base est complète, toute fonction peut être décomposée comme (faire l'analogie avec des coefficients de Fourier)

$$g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \phi_j(x) \text{ avec } c_j = (\phi_j, g) \quad (3.58)$$

Cette série converge au sens de  $L^2$  avec

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b |g(x) - \sum_{j=0, N} c_j \phi_j(x)|^2 dx = 0 \quad (3.59)$$

**Théorème 59.** *Nous pouvons exprimer la fonction de Green  $G(x; z) = G_x(z)$  comme une série:*

$$G(x; z) = G_x(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(x) \phi_j(z) \quad (3.60)$$

où

$$c_j(x) = \frac{1}{\lambda_j} \phi_j(x) \quad (3.61)$$

**Remarque 10.** 1. *La formule*

$$G(x; z) = \sum_j \frac{1}{\lambda_j} \phi_j(x) \phi_j(z) \quad (3.62)$$

*est clairement symétrique en  $x$  et  $z$  comme attendu.*

2. *Si l'une des valeurs propres  $\lambda_j$  est nulle, cette expression n'a pas de sens. Il n'y a pas de fonction de Green au sens usuel dans ce cas.*

3. *La solution de (3.53) est écrite comme*

$$u(x) = (G_x, f) = \int_a^b \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} \phi_j(x) \phi_j(z) f(z) dz = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} \phi_j(x) (\phi_j, f) \quad (3.63)$$

*et si  $\lambda_j = 0$  alors nous exigeons la condition  $(\phi_j, f) = 0$ .*

La démonstration du théorème est simple. Nous avons :

$$\delta_x = LG_x = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(x) (L\phi_j)(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(x) \lambda_j \phi_j(z) \quad (3.64)$$

d'où le résultat. □

# Applications des fonctions de Green

## 4.1 Fonctions de Green pour le problème de Poisson

Il s'agit d'un problème elliptique. Trouver la solution du potentiel  $u(x)$  défini par une distribution de charges  $f(x)$  dans une région  $D$  avec une frontière  $\partial D$  où  $u(x)$  est donné par  $g(x)$ .

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x) & x \in D \\ u = g(x) & x \in \partial D \end{cases} \quad (4.1)$$

Nous allons trouver la solution de ce problème en utilisant les fonctions de Green.

Cherchons à trouver la solution élémentaire du problème suivant:

$$\begin{cases} \Delta G_x(y) = \delta_x(y) & y \in D \\ G_x(y) = 0 & y \in \partial D \end{cases} \quad (4.2)$$

où  $\delta_x(y)$  est la fonction delta bi ou tridimensionnelle

$$\delta(y - x) = \delta(y_1 - x_1)\delta(y_2 - x_2)\delta(y_3 - x_3)$$

Pour la suite, il sera utile d'employer une notation. Nous définissons la dérivée normale de  $u$  à la frontière  $\partial D$  de  $D$  à partir de la normale  $\hat{n}$  ORIENTÉE DE L'INTÉRIEUR VERS L'EXTÉRIEUR. Baptisons :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \hat{n} \cdot \nabla u \quad (4.3)$$

Nous aurons besoin du résultat suivant:

**Lemme 2.** *Lemme de Green: Si  $u_1$  et  $u_2$  sont deux fois continûment différentiables*

$$\int_D (u_1 \Delta u_2 - u_2 \Delta u_1) dV = \int_{\partial D} \left( u_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial n} \right) dS \quad (4.4)$$

Preuve : Nous pouvons soustraire les deux égalités :

$$\nabla \cdot (u_1 \nabla u_2) = \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 + u_1 \Delta u_2 \quad (4.5)$$

$$\nabla \cdot (u_2 \nabla u_1) = \nabla u_2 \cdot \nabla u_1 + u_2 \Delta u_1 \quad (4.6)$$

et utiliser le théorème de la divergence pour arriver à

$$\int_D (u_1 \Delta u_2 - u_2 \Delta u_1) dV = \int_{\partial D} \hat{n} \cdot (u_1 \cdot \nabla u_2 - u_2 \Delta u_1) = \int_{\partial D} \left( u_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial n} \right) dS \quad (4.7)$$

□

Prenons maintenant  $u_1 = u$  comme la solution du problème de Poisson (4.1) et  $u_2$  al fonction de Green. Nous avons :

$$\int_D (u(y) \delta_x(y) - G_x(y) f(y)) dy = \int_{\partial D} g(y) \frac{\partial G_x}{\partial x} dS(y) \quad (4.8)$$

Soit enfin

$$u(x) = \int_D G(x; y) f(y) dy + \int_{\partial D} \frac{\partial G(x; y)}{\partial n(y)} g(y) dS(y) \quad (4.9)$$

## 4.2 Fonctions de Green sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

En règle générale, il n'y a aucun espoir de trouver une formule explicite des fonctions de Green pour un domaine arbitraire. Lorsque  $D = \mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ , les choses sont simples.

**Si  $D = \mathbb{R}^2$**

Si  $y \neq x$

$$\Delta G = 0 = \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] h(r) = \frac{1}{r} (r h'(r))' \quad (4.10)$$

D'où  $h' = c_1/r$  soit  $h = c_1 \ln r + c_2$ . La constante  $c_2$  est une simple constante additive, donc nous pouvons pose  $c_2 = 0$ . La constante  $c_1$ , quant à elle, est évaluée en appliquant le théorème de la divergence

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{|y-x| \leq \epsilon} \delta_x(y) dy = \int_{|y-x|} \nabla \cdot \nabla G_x(y) = \\ &= \int_{|y-x|=\epsilon} \nabla G_x(y) \cdot \hat{n} dS(y) = \int_{|y-x|=\epsilon} c_1 \frac{y-x}{|y-x|^2} \cdot \frac{y-x}{|y-x|} dS(y) = 2\pi c_1 \end{aligned} \quad (4.11)$$

D'où  $c_1 = 1/2\pi$  et

$$G_{\mathbb{R}^2}(x; y) = \frac{1}{2\pi} \ln|y-x| \quad (4.12)$$

Si  $D = \mathbb{R}^3$

Nous avons

$$G_{\mathbb{R}^3}(x; y) = -\frac{1}{4\pi|y - x|} \quad (4.13)$$

**Exercice 35.** *Utiliser*

$$\Delta G = 0 = \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] h(r) = \frac{1}{r^2} (r^2 h'(r))' \quad (4.14)$$

*et démontrer cette égalité.*

### 4.3 Fonctions de Green pour des problèmes dépendants du temps

Nous nous intéressons au problème de la chaleur qui décrit l'évolution de la température  $u(x, t)$ . Le problème est de trouver la solution de l'équation aux dérivées partielles (dérivée première par rapport au temps, dérivée seconde par rapport aux variables d'espace) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = f(x, t) \quad x \in V, t > 0 \quad (4.15)$$

avec les conditions aux limites et les conditions initiales (2 conditions)

$$u(x, t) = g(x, t), t > 0, x \in \partial V \quad (4.16)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad x \in V \quad (4.17)$$

Nous désirons représenter la solution à l'aide des fonctions de Green. L'opérateur  $L$  n'est pas auto-adjoint dans ce cas.



## Polynômes orthogonaux et fonctions de Bessel

Nous considérons d'abord 3 exemples de problème de type Sturm-Liouville IRRÉGULIERS où les vecteurs propres sont des polynômes. Chaque exemple revient à choisir des coefficients particuliers pour le problème

$$(pu')' + ru + \lambda\rho u = 0 \quad (5.1)$$

où toutes les paires de fonctions propres doivent satisfaire à l'équation :

$$p(u'v - uv')|_a^b = 0 \quad (5.2)$$

Supposant qu'il existe une base propre orthogonale  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , nous pouvons développer n'importe quelle fonction  $f \in \mathcal{L}^2[a,b]$  sur cette base

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(f, \phi_n)}{\|\phi_n\|^2} \phi_n(x) \quad (5.3)$$

qui est l'analogie d'un développement en série de Fourier.

### 5.1 Généralité sur les polynômes orthogonaux

Soit  $\rho(x)$  une fonction intégrable de signe constant ( $\rho(x)$  peut être discontinue). Rappelons que nous pouvons définir un produit scalaire

$$(P, Q) = \int_a^b P(x)Q(x)\rho(x) dx \quad (5.4)$$

La famille de polynôme  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  de DEGRÉ  $n$  constitue une famille de polynômes orthogonaux si et seulement si

$$(P_n, P_m) = \delta_{n,m} \quad (5.5)$$

**Théorème 60.** *Il est possible de construire une suite de polynôme orthogonaux  $P_n(x)$  sur un intervalle  $[a,b]$  relativement à une densité arbitraire  $\rho(x)$ , définie sur cet intervalle.*

La preuve de ce théorème s'appuie sur l'algorithme de Gram-Schmidt qui donne constructivement l'existence d'une base orthonormée. Soit  $\{\mathbf{v}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un ensemble de vecteurs indépendants. La base orthogonale est obtenue en retranchant les projections successives :

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 \tag{5.6}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - Proj_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_2) \tag{5.7}$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - Proj_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_3) - Proj_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{v}_3) \tag{5.8}$$

$$\dots \tag{5.9}$$

$$\tag{5.10}$$

où le projecteur sur le vecteur  $\mathbf{u}$  s'obtient en prenant le produit scalaire avec  $\mathbf{u}$ .

$$Proj_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \mathbf{u} \tag{5.11}$$

**Théorème 61.** *Nous avons*

$$\int_a^b \rho(x) x^k P_n(x) dx = 0 \tag{5.12}$$

pour  $0 \leq k < n$ .

**Théorème 62.** *Si  $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une famille de polynômes orthogonaux, il existe trois nombres  $A_n, B_n, C_n$  tels que :*

$$xP_n(x) = A_n P_{n+1}(x) + B_n P_n(x) + C_n P_{n-1}(x) \tag{5.13}$$

Le polynôme  $xP_n(x)$  est un polynôme de degré  $n + 1$ . On peut donc le développer sur la base des polynômes  $P_n(x)$  comme suit :

$$xP_n = \sum_{k=0}^{k=n+1} c_k P_k(x) \tag{5.14}$$

Or  $(P_k, xP_n) = (P_n, xP_k) = 0$  si

$$k > n + 1 \text{ et } n > k + 1 \tag{5.15}$$

Ce qui veut dire que seuls les termes  $k < n - 1$  et  $k > n + 1$  sont non nuls dans (5.14).  
□

**Théorème 63.** *Les zéros des polynômes  $P_n(x)$  sont réels, simples et contenus dans l'intervalle ouvert  $]a, b[$*



Comme pour  $n > 0$ ,

$$\int_a^b \rho(x)P_n(x) dx = 0 \quad (5.16)$$

$P_n(x)$  doit changer de signe au moins une fois sur  $]a,b[$ . Soient  $x_i, 1 \leq i \leq p$  la suite des points où  $P_n(x)$  s'annule. Nous avons  $1 \leq p \leq n$ . Formons le polynôme

$$Q(x) = \prod_{i=1, \dots, p} (x - x_i) \quad (5.17)$$

Le produit  $P(x)Q(x)$  garde un signe constant sur l'intervalle et donc

$$\int_a^b \rho(x)P(x)Q(x) dx \neq 0 \quad (5.18)$$

si  $p > n$ , ce n'est pas possible, car  $Q(x)$  est un polynôme de degré strictement inférieur à  $n$  et qui est donc nécessairement orthogonal à  $P(x)$  (par définition de l'algorithme de Schmidt). Donc  $p = n$ .  $\square$

**Définition 29.** Soit une fonction  $G(x,t)$  développable en série entière de  $t$  dans un certain intervalle

$$G(x,t) = \sum_{n \geq 0} \phi_n(x)t^n \quad (5.19)$$

$G(x,t)$  est appelée la fonction génératrice des  $\phi_n(x)$ .

Rappelons enfin la définition :

**Définition 30.** Un problème de type SL est dit régulier si et seulement si :

1.  $[a,b]$  est un intervalle fini.
2.  $p, p', q$  sont continues sur  $[a,b]$ .
3.  $p(x)$  garde un signe constant.

En règle pratique, les problèmes SL deviennent des problèmes singuliers dans les cas suivants :

1.  $p(x) > 0$  pour  $x \in ]a,b[$  mais  $p(a) = 0$  et/ou  $p(b) = 0$ .
2. L'intervalle est infini.

Les points  $a$  ou  $b$  sont alors singuliers si  $a = -\infty$  ou  $p(a) = 0$  (respectivement pour  $b$ ). Lorsque  $p(a) = p(b) = 0$ , toutes les conditions aux limites disparaissent. Les conclusions du chapitre précédent restent valables (bien que nous ne l'ayons pas démontré). Lorsque l'intervalle est infini, il faut invoquer des conditions supplémentaires.

## 5.2 Polynômes de Legendre

Les polynômes de Legendre ont été introduits dans le cadre du potentiel newtonien. Un corps situé au point  $A(0,0,1)$  crée au point  $P$  de coordonnées  $(r, \theta)$  un potentiel inversement proportionnel à la distance  $\|AP\|$ :

$$\frac{1}{\|AP\|} = \frac{1}{(1 - 2r \cos \theta + r^2)^{1/2}} \quad (5.20)$$

qu'il est intéressant de développer en puissance de  $r$ . Nous aurons :

$$\frac{1}{\|AP\|} = \frac{1}{(1 - 2r \cos \theta + r^2)^{1/2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) r^l \quad (5.21)$$

**Exercice 36.** Les polynômes de Legendre sont solutions de l'équation différentielle

$$(1 - x^2)u'' - 2xu' + \lambda u = 0 \quad (5.22)$$

qui est donc un SL singulier,  $x \in [-1, +1]$ .

1. En supposant

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad (5.23)$$

Démontrer que

$$c_{k+2} = \frac{k(k+1) - \lambda}{(k+1)(k+2)} c_k \quad (5.24)$$

En déduire que si  $\lambda = n(n+1)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , alors l'une des solutions est un polynôme: On choisira les constantes  $c_0$  et  $c_1$  et on écrira la solution générale sous la forme

$$u(x) = c_0 u_0(x) + c_1 u_1(x)$$

où  $u_0(x)$  et  $u_1(x)$  sont des fonctions linéairement indépendantes.

2. L'autre solution est la fonction de Legendre  $Q_n(x)$ . Démontrer que

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) \quad (5.25)$$

3. On considère la fonction génératrice

$$f(t, x) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2}$$

Cette fonction génératrice est une fonction analytique de la variable  $t \in [-1, 1]$ .

Nous pouvons poser

$$f(t, x) = \sum_{n \geq 0} a_n(x) t^n \quad (5.26)$$

4. Démontrer que cette fonction satisfait à l'équation différentielle

$$(1 - 2xt + t^2) \frac{\partial f}{\partial t} = (x - t)f \quad (5.27)$$

En déduire l'équation de récurrence

$$(n + 1)a_{n+1}(x) + na_{n-1}(x) = (2n + 1)xa_n(x) \quad (5.28)$$

En déduire une relation de récurrence pour les polynômes de Legendre.

5. En étudiant  $f(t, x)$  en  $x = 1$  et  $x = -1$ , démontrer  $P_n(1) = 1$  et  $P_n(-1) = (-1)^n$ .
6. Tracer à main levée le graphe des premiers polynômes de Legendre.
7. Une autre définition des polynômes de Legendre est la formule de Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (5.29)$$

Utilisez cette formule pour démontrer la relation

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n + 1)P_n(x) \quad (5.30)$$

8. En utilisant la même formule, démontrer que les polynômes de Legendre sont orthogonaux aux  $x^k$ , i.e.

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)x^m dx = 0 \quad (5.31)$$

9. En déduire que les polynômes de Legendre sont orthogonaux entre eux.
10. Démontrer que

$$\frac{1}{\|1 - re^{i\theta}\|} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta)r^n \quad r < 1 \quad (5.32)$$

11. En déduire que si  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont deux vecteurs tous les deux non nuls et si  $\theta$  est l'angle entre eux:

$$\frac{1}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|} = \frac{1}{\|\mathbf{y}\|} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta)r^n \quad r = \|\mathbf{x}\|/\|\mathbf{y}\| < 1 \quad (5.33)$$

## 5.3 Polynômes d'Hermite et de Laguerre

### Polynômes d'Hermite

Considérons la fonction génératrice

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} H_n(x) t^n \quad (5.34)$$

1. En utilisant un développement de Taylor, démontrer

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (5.35)$$

2. En déduire que  $H_n(x)$  est un polynôme de degré  $n$ .
3. En intégrant par parties, démontrer que (noter la définition du produit scalaire):

$$(H_n, H_m) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 0 \quad (5.36)$$

4. On montre que les polynômes  $H_n(x)$  sont solutions de l'équation :

$$u'' - 2xu' + 2\lambda u = 0 \quad (5.37)$$

où  $\lambda$  n'est pas nécessairement un entier.

- a) Supposant

$$u_r(x) = \sum_{k \geq 0} c_k x^{k+r}$$

où  $r \in \mathbb{N}$ , démontrer que

$$c_{k+2} = \frac{2(k+r-\lambda)}{(k+r-\lambda)} (k+r+2)(k+r+1)c_k \quad (5.38)$$

- b) En examinant la parité des solutions pour  $r = 0$  et  $r = 1$ , déduire que la solution générale est une combinaison linéaire  $c_0 u_0(x) + c_1 u_1(x)$ .

### Polynômes de Laguerre

## 5.4 Applications physiques

### Équation de Laplace en coordonnées sphériques

On cherche à résoudre l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (5.39)$$

et on se place en coordonnées polaires

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (5.40)$$

Supposant le système invariant par rotation autour de l'axe  $z$ , la solution ne peut dépendre de  $\varphi$ . Autrement dit,

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (5.41)$$

Comme d'habitude, nous utilisons la méthode de séparation des variables et nous cherchons une solution sous la forme

$$u(r, \theta) = v(r)w(\theta) \quad (5.42)$$

Après division par  $vw$ , nous avons :

$$\frac{1}{v(r)} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dv}{dr} \right) = - \frac{1}{w \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dw}{d\theta} \right) \quad (5.43)$$

Le membre de gauche ne dépend que de  $r$  alors que le membre de droite ne dépend que de  $\theta$ . Il existe donc une constante  $\lambda$  telle que

$$r^2 v'' / 2rv' - \lambda v = 0 \quad (5.44)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} (w' \sin \theta)' + \lambda w = 0 \quad (5.45)$$

Posant  $\xi = \cos \theta$ , la deuxième équation peut être mise sous la forme

$$\frac{d}{d\xi} \left[ (1 - \xi^2) \frac{dw}{d\xi} \right] + \lambda w = 0 \quad (5.46)$$

qui est une équation de Legendre. Lorsque  $\lambda = n(n+1)$ , la solution est donnée par les polynômes de Legendre  $P_n(\cos \theta)$ .

**Exercice 37.** Montrer que la solution pour  $r$  est alors

$$v_n(r) = a_n r^n + b_n r^{-(n+1)} \quad (5.47)$$

où  $a_n$  et  $b_n$  sont deux constantes.

## Oscillateur harmonique en mécanique quantique

En mécanique quantique, l'état d'une particule est représentée par une fonction d'onde

$$\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar} \quad (5.48)$$

où la fonction  $\psi(x)$  satisfait à l'équation

$$\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)] \psi(x) = 0 \quad (5.49)$$

qui est de la forme Sturm-Liouville. Ce problème est singulier, car l'intervalle est nécessairement infini,  $x \in ]-\infty, +\infty[$ . La condition de normalisation de la fonction d'onde

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1 \quad (5.50)$$

s'avère ici cruciale.

Supposons le potentiel harmonique  $V(x) = \hbar^2 x^2 / (2m)$ . Nous sommes alors ramenés à étudier :

$$\psi'' + (\lambda - x^2)\psi = 0 \quad (5.51)$$

Le changement de variable  $u(x) = e^{x^2/2}\psi(x)$  ramène cette équation à :

$$u'' - 2xu' + (\lambda - 1)u = 0. \quad (5.52)$$

qui est une équation de type Hermite si  $\lambda_n = 2n + 1, n \in \mathbb{N}$ . Les fonctions propres sont donc

$$\psi_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x) \quad (5.53)$$

Que se passe-t-il si  $\lambda$  n'est pas de la forme  $2n + 1$ ? La substitution  $u(x) = e^{x^2/2}(1 + \dots)$  montre que le terme du plus haute degré peut être annulé dans l'équation d'Hermite. On en conclut que cette solution se comporte comme  $e^{x^2}$  qui donnerait une fonction d'onde de se comportant comme  $e^{x^2/2}, |x| \rightarrow \infty$ . Cette fonction d'onde n'est pas de carré intégrable et doit donc être rejetée.

## 5.5 Fonctions de Bessel

### Introduction

Les fonctions de Bessel se rencontrent aussi fréquemment que les fonctions sinus ou cosinus. Elles interviennent chaque fois que le problème possède une symétrie cylindrique. Citons pêle-mêle :

1. La physique des membranes vibrantes et donc de tous les instruments acoustiques.

2. La physique de la diffraction par un trou circulaire en optique (tache d'Airy, cf. Fig 5.1).
3. La propagation des ondes dans les guides d'onde et dans les fibres optiques.
4. Tout phénomène où le Laplacien bi-dimensionnel intervient (équation de Schrödinger, physique de la diffusion etc.)

L'équation différentielle de Bessel est du type :

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0 \quad (5.54)$$

et on désigne habituellement la solution de (5.54) par  $Z_\nu(x)$ .

**Exemple 20.** On considère l'équation de Helmholtz en symétrie cylindrique:

$$\Delta\psi + k^2\psi = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} \right) + k^2\psi = 0 \quad (5.55)$$

Cette équation se ramène à la précédente, car

$$\psi'' + \frac{1}{r}\psi' + k^2\psi = 0 \quad (5.56)$$

et on cherchera la solution sous la forme  $\psi(r) = y(kr)$  où  $y$  est solution de (5.54).

De nombreuses équations se ramènent à cette équation par changement de variable et de fonction. Par exemple, l'équation différentielle

$$y'' + \frac{1-2\alpha}{x}y' + \left[ (K\beta x^{\beta-1})^2 + \frac{\alpha^2 - \nu^2\beta^2}{x^2} \right] y = 0 \quad (5.57)$$

a pour solution

$$y(x) = x^\alpha Z_\nu(Kx^\beta) \quad (5.58)$$

En particulier :

$$x(y + y'') + (2\nu + 1)y' = 0 \quad (5.59)$$

qui a pour solution

$$y(x) = x^{-\nu} Z_\nu(x) \quad (5.60)$$

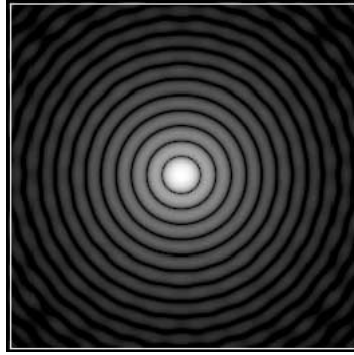


FIG. 5.1 –: Tache d’Airy par un trou circulaire

### Forme intégrale des solutions

Cherchons une solution de (5.58) en la représentant par une intégrale de Laplace très générale

$$v(x) = \int_l e^{xz} f(z) dz \quad (5.61)$$

où le chemin  $L$  et la fonction  $f$  sont tous les deux à déterminer. On a :

$$v'(x) = \int_l e^{xz} z f(z) dz \quad (5.62)$$

D’où

$$x(v + v'') = \int_L e^{xz} x(1 + z^2) f(z) dz \quad (5.63)$$

d’où en intégrant par parties :

$$x(v + v'') = |e^{xz}(1 + z^2)f(z)|_L - \int_L e^{xz} \frac{d}{dz} [(1 + z^2)f(z)] dz \quad (5.64)$$

Posons pour alléger l’écriture

$$g(z) = (1 + z^2)f(z) \quad (5.65)$$

Pour que  $v$  soit solution de (5.58), il suffit que :

$$|e^{xz}(1 + z^2)f(z)|_L + \int_L e^{xz} \left[ \frac{d}{dz} g(z) - (2\nu + 1) \frac{z}{z^2 + 1} g(z) \right] dz = 0 \quad (5.66)$$



qui est évidemment vérifié si les deux termes sont égaux à zéro

$$|e^{xz}(1+z^2)f(z)|_L = 0 \quad (5.67)$$

$$\frac{d}{dz}g(z) - (2\nu + 1)\frac{z}{z^2 + 1}g(z) = 0 \quad (5.68)$$

La première condition ne dépend que des points limite du parcours  $L$ . Celui-ci sera choisi une fois la fonction  $f$  déterminée par la seconde condition qui s'écrit aussi

$$\frac{dg}{dz} = \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{2z}{z^2 + 1} \quad (5.69)$$

d'où :

$$g(z) = \text{Cte} \cdot (z^2 + 1)^{\nu+1/2} dz \quad (5.70)$$

soit

$$Z_\nu(x) = \text{Cte} \cdot x^\nu \int_L e^{xz}(1+z^2)^{\nu-1/2} dz \quad (5.71)$$

Le parcours  $L$  sera déterminé dans la section suivante. L'équation différentielle étant du deuxième ordre, il existe aussi une autre famille de solutions. Celle-ci sera explicitée plus loin.

### La fonction $J_\nu(x)$

La fonction  $(z^2 + 1)^{\nu+1/2}$  s'annule pour  $z = \pm i$  à condition que  $\nu > -1/2$ . Les deux points limites de  $L$  sont donc  $\pm i$ . Il est donc simple de choisir pour  $L$  la droite qui interpole entre ces deux points. Faisons le changement de variable  $z = it$  et en multipliant par une constante appropriée, nous définissons la fonction de Bessel  $J_\nu(x)$  comme :

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\pi^{1/2}(\nu - 1/2)!} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_{-1}^{+1} dt e^{ixt}(1-t^2)^{\nu-1/2} dt \quad (5.72)$$

à condition que  $\nu > -1/2$ .

**Exercice 38.** *Utilisant :*

$$\left(\frac{1}{2}\right)! = \left(-\frac{1}{2}\right)! = \sqrt{\pi} \quad (5.73)$$

*Démontrer*

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \theta} d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin(\theta)) d\theta \quad (5.74)$$

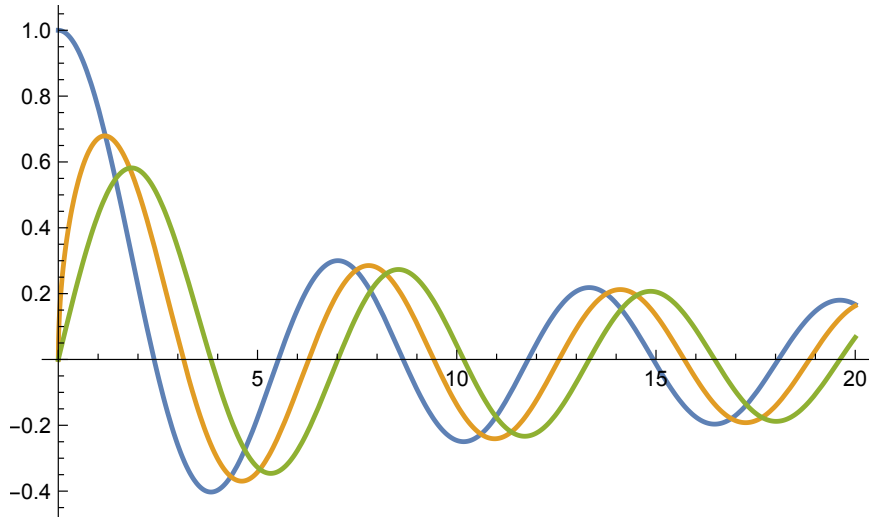


FIG. 5.2 —: Graphe des fonctions  $J_0(x)$ ,  $J_{1/2}(x)$  et  $J_1(x)$ . La seule fonction qui ne s'annule pas à l'origine est  $J_0(x)$ . Lorsque  $x$  est grand, on retrouve bien que  $J_\nu(x) \approx \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}(\nu + 1/2)\right)$ .

Pour s'affranchir de cette condition, constatons que  $x^{-\nu} J_\nu(x)$  est une fonction paire de  $x$ , analytique et donc développable en série entière. Écrivons pour l'intégrale:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} dt e^{ixt} (1-t^2)^{\nu-1/2} dt &= \int_0^{+1} dt \cos(xt) (1-t^2)^{\nu-1/2} dt \\ &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \int_0^{+1} dt t^k (1-t^2)^{\nu-1/2} \end{aligned} \quad (5.75)$$

qui devient après le changement de variable  $t = \sin \varphi$

$$2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \int_0^{+\pi} d\varphi (\sin \varphi)^{2k} (\cos \varphi)^{2\nu} \quad (5.76)$$

Cette intégrale est tabulée. Tout calcul fait, on trouve:

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!(\nu+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} \quad (5.77)$$

qui est définie quelque soit  $\nu$ , car la série converge quelque soit  $\nu$ . Lorsque  $\nu$  n'est pas entier, on constate aussi que

$$J_\nu(x) \approx_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\nu!} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \quad (5.78)$$

Comme l'une des deux fonction  $J_\nu(x)$  ou  $J_{-\nu}(x)$  diverge lorsque  $x \rightarrow 0$  lorsque  $\nu$  n'est PAS entier, les deux solutions sont linéairement indépendantes et nous obtenons la solution générale comme une combinaison linéaire de ces deux fonctions (voir épilogue quand  $\nu$  est un entier).

**Théorème 64.** *Lorsque  $n$  est entier :*

$$J_n(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (5.79)$$

## 5.6 Fonction génératrice des fonctions de Bessel

Comme les polynômes orthogonaux, les fonction de Bessel ont une fonction génératrice.

**Théorème 65.**

$$g(x,t) = e^{(x/2)(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n(x)t^n \quad (5.80)$$

En effet, nous pouvons faire le produit

$$e^{xt/2} e^{-x/(2t)} = \left[ \sum_{r \geq 0} \left(\frac{x}{2}\right)^r \frac{t^r}{r!} \right] \left[ \sum_{s \geq 0} (-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^s \frac{t^{-s}}{s!} \right] \quad (5.81)$$

Posons  $n = r - s$  et sommions sur les  $n$  et les  $s$  au lieu de sommer sur les  $r$  et les  $s$ :  $n$  varie donc de  $-\infty$  à  $+\infty$ . Nous avons

$$e^{xt/2} e^{-x/(2t)} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \sum_{s \geq 0} (-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s} \left(\frac{x}{2}\right)^n \frac{t^n}{(n+s)!s!} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} t^n J_n(x) \quad (5.82)$$

□

Comme d'habitude, la fonction génératrice permet d'obtenir les relations de récurrence pour les  $J_n(x)$ . On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t} &= \frac{1}{2}x \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) e^{(x/2)(t-1/t)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} n J_n(x) t^{n-1} \end{aligned} \quad (5.83)$$

En substituant la série pour  $e^{(x/2)(t-1/t)}$  et en identifiant les puissances de  $t$  (on rappelle que la représentation en série est unique), nous démontrons

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) \quad (5.84)$$

**Exercice 39.** Dériver la fonction génératrice  $g(x,t)$  par rapport à  $x$ . Démontrer :

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x) \quad (5.85)$$

avec en particulier:

$$J'_0(x) = -J_1(x) \quad (5.86)$$

## 5.7 Diffraction de Fraunhofer

Dans la théorie de la diffraction par une ouverture circulaire, nous avons à évaluer l'intégrale

$$\Phi \propto \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} e^{ibr \cos \theta} d\theta \quad (5.87)$$

où  $\Phi$  est l'amplitude de l'onde diffractée. L'angle  $\theta$  est l'angle azimutal dans le plan de l'ouverture circulaire de rayon  $a$  et l'angle  $\alpha$  est l'angle défini par le point sur l'écran avec la normale à l'ouverture. Le paramètre  $b$  est défini par:

$$b = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \alpha \quad (5.88)$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde incidente.

Nous avons donc:

$$\Phi \propto 2\pi \int_0^a r J_0(br) \quad (5.89)$$

soit en utilisant (refeq:bessel0),

$$\Phi \simeq \frac{2\pi ab}{b^2} J_1(ab) = \frac{\lambda a}{\sin \alpha} J_1\left(\frac{2\pi a}{\lambda} \sin \alpha\right) \quad (5.90)$$

D'où l'intensité :

$$\Phi^2 \simeq \left[ \frac{\lambda a}{\sin \alpha} J_1\left(\frac{2\pi a}{\lambda} \sin \alpha\right) \right]^2 \quad (5.91)$$

qui est tracée en Fig. 5.3.

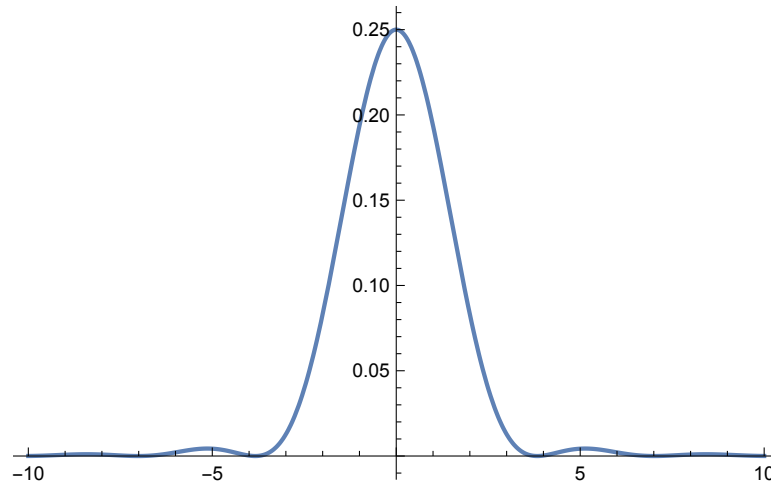


FIG. 5.3 –: Fonction  $(J_1(x)/x)^2$  utilisé pour calculer l'intensité diffractée par une ouverture circulaire. La fonction est maximale en 0 et est rapidement négligeable.

## 5.8 Épilogue 1

Nous avons démontré que les fonctions de Bessel  $J_\nu(x)$  donnaient une famille de fonctions solutions de (5.54). Lorsque  $\nu$  n'est pas un entier, les fonctions  $J_\nu(x)$  et  $J_{-\nu}(x)$  sont indépendantes. Que se passe-t-il lorsque  $\nu$  est entier ?

**Théorème 66.** *Les fonctions de Bessel modifiées définies par*

$$Y_\nu(x) = \begin{cases} (J_\nu(x) \cos(\nu x) - J_{-\nu}(x)) / \sin(\nu\pi) & \nu \neq 0, 1, 2, \dots \\ \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu & n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (5.92)$$

donnent la deuxième famille de solutions de cette équation différentielle. On remarque bien que  $\nu = n$  entier donne la forme indéterminée  $0/0$  dans la première équation.

La figure 5.4 donne le graphe des premières fonctions de Bessel modifiées qui sont singulières à l'origine.

En résumé, la solution générale de l'équation de Bessel est

$$y(x) = AJ_n(x) + BY_n(x) \text{ Lorsque } n \in \mathbb{N} \quad (5.93)$$

$$y(x) = AJ_n(x) + BJ_{-n}(x) \text{ si } n \notin \mathbb{N} \quad (5.94)$$

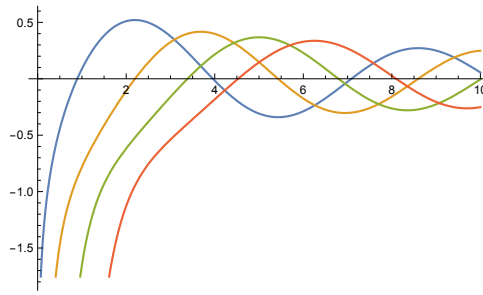


FIG. 5.4 – : Premières fonctions de Bessel modifiées  $Y_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, 3$ .

Nous avons près de l'origine

$$J_n(x) \propto x^n \quad (5.95)$$

$$Y_n(x) \propto 1/x^n \text{ si } n > 0 \text{ et } \ln(x) \text{ si } n = 0 \quad (5.96)$$

Mais rapidement pour  $x \gg 1$

$$J_n(x) \approx \sqrt{2/\pi x} \cos(x - m\pi/2 - \pi/4) \quad (5.97)$$

$$Y_n(x) \approx \sqrt{2/\pi x} \sin(x - m\pi/2 - \pi/4) \quad (5.98)$$

## 5.9 Peut-on entendre la forme d'un tambour (Kac, 1966)? La réponse est non! (Bérard, Gordon et al, 1992)

## 5.10 Fonctions de Bessel modifiées.

L'équation de Helmholtz

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0 \quad (5.99)$$

a pour solution une combinaison linéaire des fonctions de Bessel  $J_\nu$  et des fonctions de Neuman  $Y_\nu$  avec les conditions aux limites appropriées.

Nous désirons maintenant connaître les solutions d'une équation de type diffusion

$$\Delta\psi - k^2\psi = 0 \quad (5.100)$$

où nous supposons, là encore, une symétrie de révolution. L'analogie de l'équation (5.54) est ici :

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0 \quad (5.101)$$

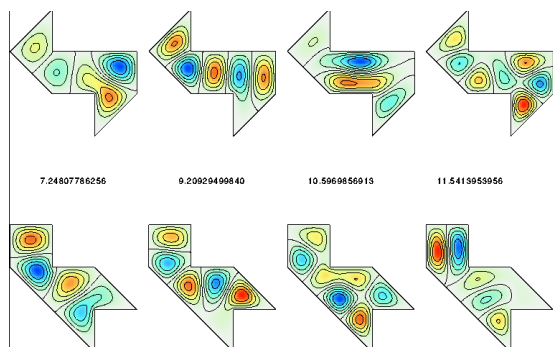


FIG. 5.5 —

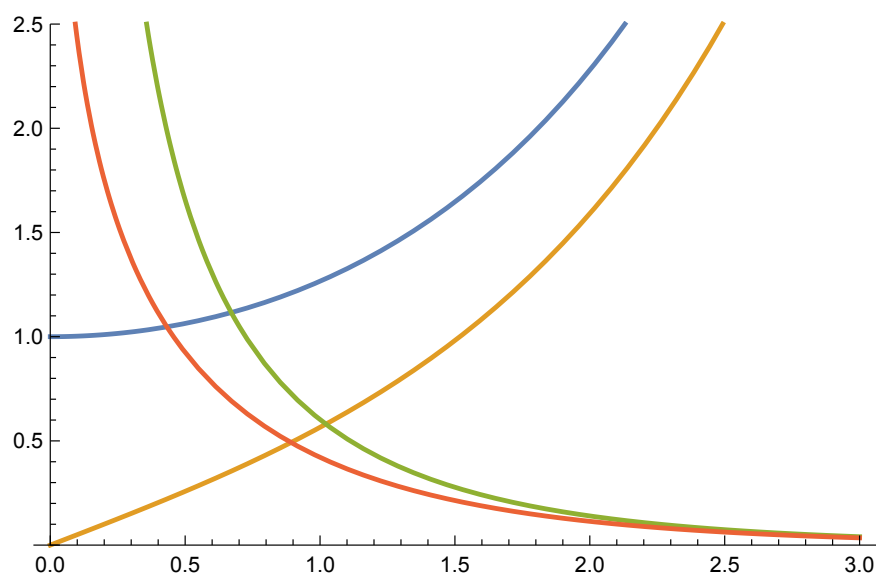


FIG. 5.6 — . Graphe des fonctions de Bessel  $I_\nu(x)$ ,  $\nu = 0, 1$  et  $K_\nu(x)$ . Les fonctions  $K_\nu(x)$  décroissent exponentiellement et divergent en  $x = 0$  y compris pour  $\nu = 0$ .

Pour passer de (5.99) à (5.100), il suffit de prendre  $k \rightarrow ik$  ( $i^2 = -1$ ). On pose donc :

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix) \quad (5.102)$$

où  $i^\nu$  est un facteur de normalisation. On pose généralement

$$I_\nu(x) = e^{-\nu i \pi / 2} J_\nu(e^{i \pi / 2} x) \quad (5.103)$$

L'autre famille de solutions est obtenue comme les solutions de Neuman. On pose :

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin \nu\pi} \quad (5.104)$$

La famille des  $K_\nu(x)$  (fonctions de Bessel modifiées) permet d'obtenir les fonctions de Green du problème de la diffusion. En particulier, la fonction de Green du problème

$$\Delta\psi - \psi = 0 \quad (5.105)$$

est  $-1/2\pi K_0(x)$ .

**Exercice 40.** *En utilisant l'identité*

$$\int_0^\infty r dr K_0(r) = 1 \quad (5.106)$$

démontrer que la fonction de Green est  $-1/2\pi K_0(r)$ .

Enfin, les fonctions  $K_\nu(x)$  décroissent exponentiellement pour  $x \rightarrow \infty$

$$K_\nu(x) \simeq_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} (1 + \dots) \quad (5.107)$$

Cette décroissance exponentielle est souvent utilisée pour définir des longueurs caractéristiques en physique statistique.

## 5.11 Épilogue 2



# Rappels de topologie sur un espace métrique



## A.1 Ouverts, fermés, compacts

### Espaces métriques

Soit  $E$  un ensemble. On dit que l'application  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  est une distance si elle vérifie les trois propriétés suivantes :

1. Séparation :  $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$ .
2. Symétrie :  $d(x,y) = d(y,x)$ .
3. Inégalité triangulaire :  $\forall x,y,z \in E, \quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ .

et on baptise le couple  $(E,d)$  espace métrique.  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$  sont des espaces métriques munis de la distance habituelle  $d(x,y) = |x - y|$ .

### Ouverts, fermés

**Définition 31.** Pour tout  $x_0 \in E$  et quelque soit  $r > 0$ , on appelle boule ouverte de centre  $x_0$  et de rayon  $r$  l'ensemble:

$$B(x_0; r) = \{x \in E, d(x, x_0) < r\} \quad (\text{A.1})$$

La boule fermée est par définition:

$$\bar{B}(x_0; r) = \{x \in E, d(x, x_0) \leq r\} \quad (\text{A.2})$$

- Définition 32.**
1. Une partie  $U$  de  $E$  est un ouvert de  $E$  si pour chaque  $x$  de  $U$  on peut trouver  $\epsilon > 0$  tel que  $B(x, \epsilon) \subset U$ .
  2. Une partie  $U$  de  $E$  est un fermé si son complémentaire dans  $E$  est un ouvert de  $E$ .

**Théorème 67.** Une partie  $F$  de  $E$  est un fermé si pour toute suite  $(x_n)_n$  d'éléments de  $F$  convergeant vers un élément  $x$  de  $E$ , alors  $x \in F$ .

**Remarque 11.** Pour les espaces "ressemblants" à  $\mathbb{R}^n$ , toutes les boules ouvertes sont des ouverts et toutes les boules fermées sont des fermés.

**Théorème 68.** Soit  $I$  un sous-ensemble de  $\mathbb{N}$ . Soient  $(U_i)_{i \in I}$  une famille éventuellement infinie d'ouverts et  $(F_i)_{i \in I}$  une famille de fermés.

1.  $\cup_{i \in I} U_i$  est un ouvert.
2. Si  $I$  est FINI,  $\cap_{i \in I} U_i$  est aussi un ouvert (penser à  $] - \frac{1}{n}, \frac{1}{n} [$ ).

3.  $\bigcap_{i \in I} F_i$  est un fermé.
4. Si  $I$  est FINI,  $\bigcup_{i \in I} F_i$  est un fermé (penser à  $\bigcup_{n > 0} [0, 1 - \frac{1}{n}] = [0, 1[$  qui n'est pas un fermé).

## Adhérence d'un ensemble

**Définition 33.** Soit  $P$  une partie de  $E$ . On dit que  $x$  est ADHÉRENT à  $P$  si

$$\forall \epsilon > 0, \quad B(x, \epsilon) \cap P \neq \emptyset \quad (\text{A.3})$$

On appelle adhérence de  $P$  l'ensemble noté  $\bar{P}$  des points adhérents à  $P$ .

**Théorème 69.** 1. Tout élément de  $\bar{P}$  est nécessairement la limite d'une suite de d'éléments de  $P$ .

2. Une partie est fermée si elle est sa propre adhérence.

3. L'adhérence de  $P$  est l'intersection de tous les fermés contenant  $P$ .

## Compacts

**Définition 34.** Si  $K$  est une partie de  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .  $K$  est un compact si et seulement si  $K$  est un fermé borné. Dans un compact  $K$ , toute suite d'éléments de  $K$  possède une sous-suite convergente.

## Oscillateur harmonique

L'équation de Schrödinger pour une particule dans un puits harmonique  $1 - d$  est la suivante:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + \frac{m}{2} \omega^2 x^2 \psi(x) = E \psi(x) \quad (\text{A.4})$$

où  $\psi(x)$  est de norme 1 (i.e., la particule est quelque part). On posera

$$k = \frac{2m}{\hbar^2} E \quad \lambda = \frac{m\omega}{\hbar} \quad y = \lambda x^2 \quad (\text{A.5})$$

1. Montrer que cette équation peut être réécrite comme :

$$y \frac{d^2 \psi}{dy^2} + \frac{1}{2} \frac{d\psi}{dy} + \left( \frac{\kappa}{2} - \frac{1}{4} y \right) \psi = 0 \quad (\text{A.6})$$

2. En faisant le changement de variable

$$\psi(y) = e^{-y/2} \phi(y) \quad (\text{A.7})$$

Montrer que cette équation se ramène à la forme canonique

$$y \frac{d^2 \phi}{dy^2} + \left( \frac{1}{2} - y \right) \frac{d\phi}{dy} + \left( \frac{\kappa}{2} - \frac{1}{4} \right) \phi = 0 \quad (\text{A.8})$$

3. Ce problème est du type S.L. singulier

$$x \frac{d^2 \phi}{dx^2} + (c - x) \frac{d\phi}{dx} - a\phi = 0 \quad (\text{A.9})$$

En cherchant la solution sous la forme d'une série

$$\phi(x) = \sum_{n \geq 0} c_n x^n \quad (\text{A.10})$$

Montrer que les  $c_n$  obéissent à la relation de récurrence

$$c_{n+1} = \frac{(n+a)}{(n+1)(n+c)} c_n \quad (\text{A.11})$$

On prendra  $c_0 = 1$  par la suite. Quel est le rayon de convergence de la série?

4. L'équation différentielle étant une équation différentielle du deuxième ordre, il existe une autre solution. Nous la cherchons sous la forme:

$$\phi(x) = x^\sigma \sum_{n \geq 0} c_n x^n \quad (\text{A.12})$$

Montrer que si  $\sigma$  est solution de

$$\sigma[\sigma - 1 + c] = 0 \quad (\text{A.13})$$

alors

$$c_{n+1} = \frac{(n + a')}{(n + 1)(n + c')} c_n \quad (\text{A.14})$$

où  $a'$  et  $c'$  sont des fonctions simples de  $a$  et  $c$ .

5. En déduire la forme de la solution générale.  
6. On suppose que  $c_n$  ne s'annule jamais quelque soit  $n$ . Pour  $n \gg 1$ , on a

$$c_n \approx \frac{1}{n} c_{n-1} \quad (\text{A.15})$$

En déduire le comportement asymptotique pour  $y \gg 1$  de  $\phi(y)$  puis celui de  $\psi(x)$ . Démontrer que cette solution n'est pas acceptable.

7. Montrer que les seules solutions acceptables sont obtenues pour

$$a = -n \quad n = 0, 1, \dots \text{ avec pour énergie } E_n = \hbar\omega \left( 2n + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{A.16})$$

$$a + \frac{1}{2} = -n \quad n = 0, 1, \dots \text{ avec pour énergie } E_n = \hbar\omega \left( (2n + 1) + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{A.17})$$

Les vecteurs propres associés sont alors (ne pas démontrer)

$$\psi_n(x) = N_n e^{(-\lambda/2)x^2} H_n(\sqrt{\lambda}x) \quad E_n = \hbar\omega \left( 2n + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{A.18})$$

où les  $H_n(x)$  sont les polynômes d'Hermite.

8. On sait que les polynômes d'Hermite obéissent à des relations de récurrence. Les voici :

$$xH_n = nH_{n-1} + \frac{1}{2}H_{n+1} \quad \frac{d}{dx}H_n = 2nH_{n-1} \quad (\text{A.19})$$

On définit les opérateurs:

$$\hat{a} = 1/\sqrt{2} \left( x + \frac{d}{dx} \right) \quad (\text{A.20})$$

$$\hat{a}^\dagger = 1/\sqrt{2} \left( x - \frac{d}{dx} \right) \quad (\text{A.21})$$

Quel est l'effet de  $\hat{a}$  et de  $\hat{a}^\dagger$  sur  $\psi_n$ ? Conclure sur le lien entre les opérateurs de création et d'annihilation et les relations de récurrence sur les polynômes d'Hermite.



## *Bibliographie*

- [1] M.A. Al-Gwaiz. *Sturm-Liouville Theory and its Applications*. Springer, 2008.
- [2] Arthur Erdélyi. *Asymptotic expansions*. Dover Publications, 1956.
- [3] Konrad Knopp. *Theory of functions*. Dover Publications, Mineola, N.Y., dover ed edition, 1996.
- [4] Konrad Knopp and Frederick Bagemihl. *Theory of functions*. Dover publications, New York, 1945.
- [5] Steven G. Krantz. *Complex variables: A physical Approach with Applications and MATLAB*. Chapman et Hall/CRC, 2008.
- [6] Jerrold E Marsden. *Basic complex analysis*. W. H. Freeman, San Francisco, 1973.