

Théorie des champs classiques

B. Fourcade

Bertrand.Fourcade@ujf-grenoble.fr

Théorie Classique des Champs

Références

NOTE : les ouvrages marqués d'un astérisque sont plus difficiles d'accès.

- Classical Mechanics, Herbert Goldstein ;
- Théorie Classique des Champs , L.D. Landau et E.M. Lifshitz ;
- Geometry, Particles, and Fields, Bjørn Felsager* ;
- Nonlinear Science, Emergence and Dynamics of Coherence Structures, Alwyn Scott* ;
- Mathematical Biology, J.D. Murray ;
- Introduction à la Théorie des Champs* - François Delduc (François.Delduc@ens-lyon.fr).
Cours donné au DEA de Physique Rhône-Alpin ;

Introduction

1. Prélude

La mécanique classique décrit les systèmes à un petit nombre de degrés de liberté (par exemple, le mouvement d'une particule dans une fosse de potentiel). La théorie des champs, quant à elle, est le langage naturel pour décrire les systèmes à un nombre INFINI de degrés de liberté.

Prenons l'exemple d'un solide où l'atome numéroté i a un déplacement u_i . Pour des déplacements de longueurs d'onde λ beaucoup plus grande que la distance inter-atomique a , $\lambda \gg a$, les déplacements u_i peuvent être considérés comme une FONCTION continue de x et du temps t avec $u(x,t)$, où x parcourt la droite réelle. On dira $u(x,t)$ est un champ.

Le but de la théorie des champs est d'établir les équations du mouvement du champ $u(x,t)$ à partir de quelques propriétés simples sur :

- (1) les symétries et les interactions ;
- (2) une manière simple d'établir les équations du mouvement à partir d'un principe d'extremum.

Dans ce cours, nous nous intéresserons aux champs classiques (par opposition à une situation quantique). Dans les cours suivants, vous quantifierez les champs en introduisant des opérateurs de création et d'annihilation. Cette quantification se fait suivant des règles strictes et il est nécessaire d'étudier d'abord les propriétés des situations classiques.

Voici quelques exemples tirés au hasard qui illustrent les situations physiques qui nous intéresserons ici (et cela nous servira de plan)

- (1) Élasticité : champ de déplacement $u(x,t)$;

EXEMPLE 1.1. On considère une chaîne de ressorts contigus où chaque masselotte est attaché à deux ressorts premier voisins. Le déplacement des masselottes est une variable u_i qui dépend du numéro i de la masselotte. Nous désirons passer à une description continue où la chaîne de masselottes et de ressorts représente un fil élastique qui peut être étiré. La notation discrète avec des indices i perd alors son sens. On préfère travailler avec un champ de déplacement $u(x)$ qui est le déplacement local du fil élastique en un point d'abscisse curviligne x . En écrivant $u(x)$, le déplacement est devenu un fonction continue de x . C'est un champ.

- (2) Physique statistique et transitions de phases : le champ est ici un paramètre d'ordre $\eta(x,t)$ qui indice la phase. C'est-à-dire que la valeur de $\eta(x,t)$ nous permet de connaître la phase que l'on décrit.

EXEMPLE 1.2. Dans un ferro-aimant, η n'est autre que l'aimantation, mais il existe beaucoup d'autres exemples de paramètre d'ordre. Lorsque $\eta(x) = 1$ partout, la phase est aimantée. Lorsque $\eta(x) = 0$, l'aimantation moyenne est nulle et la phase est paramagnétique. On travaillera sur une enthalpie libre qui est une fonction de ce paramètre d'ordre. Dans un ferro-aimant, le paramètre d'ordre $\eta(x)$, c'est-à-dire l'aimantation locale, varie d'un point à un autre. On travaillera avec une enthalpie libre de la forme :

$$G = \int_{\Omega} d^d x \left[a\eta(x)^2 + \frac{1}{2}c(\nabla\varphi)^2 + \frac{u}{4}\varphi(x)^4 \right] \quad (1)$$

- (3) Réactions chimiques : champ d'une espèce chimique de concentration $c(x,t)$ qui diffuse dans un milieu qui peut être excitable chimiquement.

EXEMPLE 1.3. On considère l'équation de diffusion (voir plus loin)

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\Delta c + c(1 - c) \quad (2)$$

où d est la constante de diffusion.

- (4) **Électromagnétisme**: nous montrerons que les équations de Maxwell sont les équations du mouvement des potentiels (ϕ, \mathbf{A}) . Les propriétés de ces champs et, en particulier, les propriétés liées à l'invariance de jauge sont déterminantes pour classifier les termes d'interaction particules-champs même au niveau classique.

2. Autre exemple : stabilité linéaire au voisinage d'un point fixe

Terminons en soulignant que l'approche « théorie des champs » est nécessaire dès que l'on veut étudier des phénomènes non-linéaires essentiels pour comprendre les changements d'état de la matière ou les changements de comportement. En fonction d'un paramètre contrôlé de l'extérieur du système, disons α , l'équation suivante

$$\partial_t \phi = \phi(\alpha - \phi) = f(\phi) \quad (3)$$

est souvent utilisée pour décrire la diffusion d'un gène dans une population. Elle possède deux points fixes (où $d\phi/dt = 0$) :

$$\phi = 0, \phi = \alpha \quad (4)$$

dont la stabilité peut être analysée en calculant la dérivée

$$f'(\phi) = \alpha - 2\phi \quad (5)$$

NOTE. Au voisinage des points $\phi_1 = 0$ et $\phi_2 = \alpha$, l'équation non-linéaire peut être rendue linéaire en faisant le développement limité $\phi = \phi_i + \epsilon(t)$. L'équation pour $\epsilon(t)$ est simple

$$\partial_t \epsilon = f'(\phi_i)\epsilon = \pm \alpha \epsilon \Rightarrow \epsilon(t) = \epsilon(t=0)e^{\pm \alpha t} \quad (6)$$

Suivant le signe de $f'(\phi_i)$ les solutions décroissent ou croissent exponentiellement. Dans le premier cas, on dira que le point fixe qui représente un solution stationnaire est stable, alors qu'il est instable dans le deuxième cas.

Lorsque $\alpha < 0$ la solution $\phi = 0$ est stable alors que la solution $\phi = -\alpha$ est instable. Pour $\alpha > 0$, la situation est inversée, la solution nulle devient instable, alors que l'autre est stable. Donc lorsque α passe par zéro, le système change de configuration et on dit qu'il y a BIFURCATION.

EXERCICE 2.1. Reprendre le même exercice mais avec l'équation de Nagumo

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \phi(1 - \phi)(\phi - \alpha) \text{ avec } 0 < \alpha < 1 \quad (7)$$

qui est utilisé pour décrire la transmission d'un pulse le long des axones.

On verra plus tard ce qui se passe lorsque ϕ devient un champ, c'est-à-dire que $\varphi(x)$ avec un effet lié à la diffusion de la concentration de $\phi(x)$.

3. Exemple d'une onde non-linéaire

L'exemple de la chaîne de pendules de torsion illustre ce que nous appellerons théorie des champs. La position angulaire de chaque pendule est repérée par un angle $\phi_i(t)$ où i indice la position du pendule et t est le temps ($\phi_i = 0$ lorsque le pendule pointe vers le bas). La gravité est dirigée vers le bas et chaque pendule de longueur l possède une masselotte m .

Nous imaginons que les pendules sont couplées et que le couplage fait intervenir l'écart relatif des angles de torsion $\phi_{i+1}(t) - \phi_i(t)$ entre les pendules. Autrement dit, il existe un potentiel sur la liaison $i, i+1$. Soit $V(\phi_{i+1} - \phi_i)$ ce potentiel. Le potentiel total de la chaîne est alors la somme sur les liaisons.

$$U = \sum_i V(\phi_{i+1} - \phi_i) \quad (8)$$

Outre l'énergie potentielle d'interaction, chaque pendule possède :

- (1) une énergie cinétique ;
- (2) une énergie potentielle due à la gravité.

EXERCICE 3.1. Montrer que

- (1) L'énergie cinétique de chaque pendule est $\frac{1}{2}m\dot{\phi}_i^2$ (dérivée par rapport au temps) ;
- (2) L'énergie potentielle de chaque pendule due à la gravité est $mg(1 - \cos \phi_i)$.

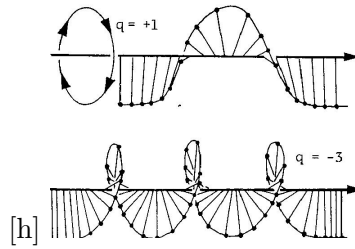


FIG. 1. Exemples d'ondes non-linéaires de type soliton.

BUT DE LA THÉORIE DES CHAMPS :

Nous désirons connaître les lois du mouvement et, en particulier, nous désirons savoir si il existe des ondes qui peuvent se propager (Cf. Figure). En théorie des champs, l'angle $\phi_i(t)$ devient une fonction de position d'espace $x = ia$ où a est la distance entre chaque point d'attache des pendules. Ce point de vue est utile si nous nous intéressons aux phénomènes dont la longueur d'onde caractéristique λ est plus grande que a , $\lambda \gg a$. La théorie des champs permet d'établir l'équation d'onde à laquelle satisfait $\phi(x,t)$. Les solutions de cette équation donnent les modes de propagation.

Nous montrerons que cette équation peut se mettre sous une forme (sans dimension)

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = V'(\phi) \quad (9)$$

EXERCICE 3.2. On cherche les solutions sous la forme $\phi(x,t) = f(x - vt)$ où v est la vitesse. Quelle est l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction $f(\xi = x - vt)$?

Plan du cours

- (1) Mécanique Lagrangienne. Équation d'Euler. Principe d'extremum.
- (2) Ondes non-linéaires en mécanique. Solitons.
- (3) Ondes propagatives liées à la diffusion : Transition de phase, ondes de réaction-diffusion dans les processus chimiques.
- (4) Exemples tirés de la mécanique des fluides et de la mécanique des solides.
- (5) Théorie du champ électromagnétique (classique et relativiste). Théorie de jauge.

EXERCICE 3.3. Soit un point matériel de masse m . Sa position est \mathbf{q} et son moment généralisé est p . On suppose que ce point matériel se déplace dans un potentiel $V(\mathbf{q})$. Quel est le lagrangien et le hamiltonien ? Quelles sont les équations du mouvement ?

EXERCICE 3.4. Supposer que le potentiel $V(\phi_{i+1} - \phi_i)$ du problème mécanique précédent soit

$$U(\phi_{i+1} - \phi_i) = \frac{1}{2} \sigma (\phi_{i+1} - \phi_i)^2 \quad (10)$$

Que devient ce potentiel si les angles ϕ_i sont approximés par un champ $\phi(x,t)$? Il sera utile de considérer le développement limité d'une fonction au voisinage d'un point en faisant

$$V(\phi_{i+1} - \phi_i) = V(\phi(i+a) - \phi(i)) \quad (11)$$

avec $a \rightarrow 0$

Extremum d'une fonctionnelle

1. Position du problème

Dans de nombreux problèmes de physique il est important de connaître quelle est la variation d'un champ $u(x)$ qui minimise une énergie. Pour fixer les idées, nous reprenons le problème de la corde pesante dans un champ de gravité g . Sachant que la corde de longueur L est attachée aux deux bouts, quelle forme prend-elle? Cette forme minimise une énergie. On voit donc qu'il faut minimiser une énergie qui dépend d'une fonction, c'est-à-dire la forme, pour trouver la solution. Le calcul est donc un peu compliqué que celui de la recherche d'un minimum d'une fonction d'une variable réelle car il s'agit ici de minimiser par rapport à une fonction.

2. Formulation du problème

Nous désirons ici généraliser la notion d'extremum d'une fonction $f(x)$. La fonction $f(x)$ est dite extrémale en x_0 si les variations de $f(x)$ au voisinage de x_0 sont d'ordre au moins ϵ^2 lorsque $x = x_0 + \epsilon$ (nous laissons de côté le cas important où $f(x)$ atteint un extrémum au bord d'un intervalle)

$$f(x) = f(x_0) + \epsilon f'(x_0) + \frac{1}{2}\epsilon^2 f''(x_0) + O(\epsilon^3) \quad (12)$$

d'où la condition : $f'(x_0) = 0$ pour que le terme linéaire de la variation de $f(x)$ au voisinage de x_0 soit nul. Nous retenons cette interprétation.

Soit maintenant $q(x)$ une fonction de la variable x . Nous notons $q_x(x)$ sa dérivée. Nous considérons l'intégrale

$$F[q] = \int_{x_0}^{x_1} dx \mathcal{F}(q(x), q_x(x)) \quad (13)$$

où $\mathcal{F}(u, v)$ est une fonction des deux variables (u, v) . Nous supposons les deux points x_0, x_1 donnés.

Nous désirons connaître l'équation à laquelle satisfait $q(x)$ pour que $F[q]$ soit extrémale en q . $F[q]$ étant définie à partir de l'intégrale d'une fonction, $F[q]$ n'est pas une fonction au sens usuel. Elle associe un nombre à une fonction suivant le schéma :

$$F : q \in \text{d'un espace de fonctions} \rightarrow F[q] \in \mathfrak{R} \quad (14)$$

Pour cette raison, $F[q]$ est une et nous emploierons la notation $F[q]$ (crochets) au lieu de $F(q)$ (parenthèses) pour souligner cette différence.

3. Équation d'Euler

Pour trouver la condition d'extremum, donnons-nous une fonction $h(x)$ arbitraire et considérons la variation

$$q(x) + \epsilon h(x) \quad (15)$$

où ϵ est un nombre réel arbitrairement petit.

Nous pouvons alors considérer la variation de $F[q]$ lorsque $q(x)$ varie $q(x) + \epsilon h(x)$. Pour éviter les confusions, il est utile de considérer $F(u, v)$ comme une fonction de deux variables indépendantes. Pour simplifier l'écriture, nous posons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} &= \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} \Big|_{q(x)} \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} &= \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} \Big|_{q_x(x)} \end{aligned} \quad (16)$$

d'où

$$\begin{aligned}
 F[q + \epsilon h] &= \int_{x_0}^{x_1} dx \mathcal{F}(q(x) + \epsilon h(x), q_x(x) + \epsilon h_x(x)) \\
 &= \int_{x_0}^{x_1} dx \left[\mathcal{F}(q(x), q_x(x)) + \epsilon h(x) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} + \epsilon h_x(x) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} + \dots \right] \\
 &= \int_{x_0}^{x_1} dx \mathcal{F}(q(x), q_x(x)) + \epsilon \int_{x_0}^{x_1} dx h(x) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} + \epsilon \int_{x_0}^{x_1} dx h_x(x) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} + \dots
 \end{aligned} \tag{17}$$

Le dernier terme est transformé par une intégration par parties :

$$\int_{x_0}^{x_1} dx h_x(x) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} = \left[h(x) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} \right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} dx h(x) \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} \right] \tag{18}$$

DEFINITION 3.1. Dire que $F[q]$ est extremum en q , c'est dire comme en (121) que le premier terme en ϵ est nul (définition analogue à la dérivée d'une fonction usuelle) et ce, quelque soit $h(x)$. $F[q]$ est alors extrémale vis à vis d'une variation $q(x) \rightarrow q(x) + \epsilon h(x)$.

PROPRIÉTÉ 3.1. Pour que $F[q]$ soit extrémale en $q(x)$, nous avons donc les deux conditions suivantes soient satisfaites :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} \right] &= 0 \text{ avec } u = q \text{ et } v = q_x \\
 \left[h(x) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} \right]_{x_0}^{x_1} &= 0
 \end{aligned} \tag{19}$$

REMARQUE. On pose généralement le problème de façon plus précise. On ne considère que des variations $q + \epsilon h(x)$ qui ne changent pas les conditions aux limites. On suppose donc $h(x_0) = h(x_1) = 0$. Le choix de l'ensemble des variations considérées dépend de la situation physique. On dira qu'une variation est admissible si elle appartient à cet ensemble. Ainsi, si les variations de $q(x)$ sont celles qui ne changent pas les valeurs aux bornes de l'intervalle, la variations admissibles $\delta q(x)$ sont celles pour lesquelles $\delta q(x_1) = \delta q(x_2) = 0$

DEFINITION 3.2. On appelle équation d'Euler du problème, l'équation différentielle du problème variationnel.

EXERCICE 3.1. Vérifiez que l'extrémale des longueurs sont des droites. On fera le calcul en 1d avec $x(t)$. Rép : $L = \sqrt{1 + \dot{x}^2}$. L'équation d'Euler est alors

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} = c \tag{20}$$

où c est une constante. La solution est $x = c_1 t + c_2$.

EXERCICE 3.2. Vérifier que cet extrémal ne dépend pas du système de coordonnées. On fera le calcul en coordonnées polaires. Démontrer avec $x = r \cos \phi$ et $y = r \sin \phi$:

$$F = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2} dt \tag{21}$$

et retrouver l'équation des droites dans le plan.

EXERCICE 3.3. Beltrami: Soit $q(x)$ une fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\dot{q} = \frac{d}{dx} q$, et $L = L(q, \dot{q}, x)$. Avec ces notations, les équations d'Euler prennent la forme

$$\frac{\partial}{\partial q} L - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}} L \right) = 0. \tag{22}$$

Supposons $\frac{\partial}{\partial x} L = 0$. Nous montrons dans cet exercice que (22) est équivalent à :

$$L - \dot{q} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} L = C \tag{23}$$

où C est une constante. Par définition, (23) est l'identité de Beltrami. Cette identité simplifie grandement la solution de certains calculs des variations, car on a souvent $\partial L / \partial x = 0$.

DÉMONSTRATION : On note que

$$\frac{d}{dx} \left(\dot{q} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} L \right) = \ddot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \dot{q} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}} L \right) \tag{24}$$

(1) En déduire

$$\dot{q} \frac{\partial}{\partial q} L - \dot{q} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}} L \right) = 0. \quad (25)$$

(2) Utiliser (24) et substituer le terme de droite de (25), pour obtenir :

$$\dot{q} \frac{\partial}{\partial q} L + \ddot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dx} \left(\dot{q} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} L \right) = 0 \quad (26)$$

(3) Considérer maintenant :

$$\frac{d}{dx} L(q, \dot{q}, t) = \dot{q} \frac{\partial L}{\partial q} + \ddot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial L}{\partial x}. \quad (27)$$

Si $\partial L / \partial x = 0$, utiliser (26) pour montrer :

$$\frac{d}{dx} L - \frac{d}{dx} \left(\dot{q} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} L \right) = 0. \quad (28)$$

(4) Démontrer :

$$L - \dot{q} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} L = C \quad (29)$$

qui est l'identité de Beltrami.

EXERCICE 3.4. N.B. Pour résoudre cet exercice, il est préférable d'utiliser l'identité de indexBeltrami. Quelle est la surface d'aire minimale reliant deux cercles concentriques de même rayon parallèle R et centrés sur le même axe? Nous choisissons de paramétrer la surface par la distance $r(z)$ à l'axe de révolution (z est l'altitude).

L'aire de la surface de révolution s'obtient à partir de l'élément $ds = \sqrt{1 + r'(z)^2} dz$ qui l'engendre

$$A[r] = 2\pi \int_{-h}^{+h} dz r(z) \sqrt{1 + r'(z)^2} \quad (30)$$

Montrer que la solution du problème est une d'équation :

$$r(z) = k \cosh \left(\frac{z}{k} \right) \quad (31)$$

Quelle est la condition qui permet de déterminer la constante k ? Cette équation a-t-elle toujours une solution? Pour répondre à cette question, on supposera que la surface s'appuie sur deux anneaux de rayon R situés à une distance $2d$ l'un de l'autre. On tracera la courbe $R = k \cosh(d/k)$ en fonction de k et on montrera que le problème a soit deux solutions, soit n'en a aucune. Quand le problème a deux solutions, seule la solution de petit k est stable. L'autre est physiquement instable vis à vis d'une petite perturbation. Elle n'est donc pas observable physiquement.

Dans le cas où les variations ne peuvent pas changer les conditions aux bornes de l'intervalle, la condition d'extremum est donnée par la première équation dont la (les) solution(s) donne la fonction $q(x)$.

EXERCICE 3.5. On considère la suivante :

$$F[q] = \int_{x_0}^{x_1} dx \mathcal{F}(q(x), q_x(x), q_{xx}(x)) \quad (32)$$

Démontrer que l'équation d'Euler du problème est :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_x} \right] + \frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_{xx}} \right] = 0 \quad (33)$$

NOTATION 1. Cet exercice justifie la notation suivante pour la dérivée (noter le δ) :

$$\frac{\delta F}{\delta q} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_x} \right] + \frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_{xx}} \right] + \dots \quad (34)$$

où les \dots dépendent du contexte (i.e. du type de la).

NOTE. Variation sous contrainte: l'exemple suivant permet de comprendre que la nature du problème change radicalement. On désire calculer la forme $y(x)$ d'une corde pesante sous l'effet de la gravité entre les deux points $x = \pm a$. Si la corde n'est pas attachée au deux points, le problème n'a pas de solution (la corde tombe!). Si la corde est attachée aux deux points, sa longueur est fixe. En supposant la corde non extensible, cette contrainte change radicalement la nature du problème.

Nous supposons $y(x = \pm a) = 0$. La longueur de la corde étant fixe, la forme de la corde $y(x)$ satisfait à :

$$l_0 = \int_{-a}^a dx \sqrt{1 + y_x^2} \quad (35)$$

L'énergie potentielle due à la gravité est :

$$\int_{-a}^a dx \rho g y(x) \sqrt{1 + y_x^2} \quad (36)$$

Pour trouver la forme de la corde nous introduisons un λ dont la dimension est celle d'une tension. Nous considérons alors la

$$F[y] = \int_{-a}^a dx \rho g y(x) \sqrt{1 + y_x^2} - \lambda \int_{-a}^a dx \sqrt{1 + y_x^2} \quad (37)$$

D'où l'équation d'Euler :

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial y_x} \right] = 0 \quad (38)$$

ou sous forme explicite

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{(y + \xi_0) y_x}{(1 + y_x^2)^{1/2}} \right] = [1 + y_x^2]^{1/2} \quad (39)$$

avec

$$\xi_0 = \frac{\lambda}{\rho g} \quad (40)$$

On vérifie que la solution de cette équation est

$$y(x) = -\frac{\lambda}{\rho g} + \alpha \cosh \left(\frac{x + \beta}{\alpha} \right) \quad (41)$$

où les deux constantes d'intégration α et β sont déterminées par les conditions aux limites. La symétrie $x \rightarrow -x$ donne $\beta = 0$ et la condition $y(x = \pm a) = 0$ donne α en fonction du λ . Enfin, on détermine λ à partir de la contrainte (35).

EXEMPLE 3.1. ÉLASTICITÉ: On considère une plaque solide encastree sur l'un des côtés. La position du point de raccordement ainsi que la tangente en ce point sont toutes les deux fixées par la liaison entre la plaque et son point d'encastrement. La position de ce point est fixée par une force dirigée suivant u_z et la tangente est fixée par un moment de (l'encastrement agit comme un pince). L'autre bout est soumis à une force F dirigée suivant u_z et nous supposons que l'énergie élastique de la plaque déformée est une énergie de .

Définissons ce qu'est une énergie de . Soit θ l'angle de la tangente avec l'axe u_x et l l'abscisse curviligne. Le du profil de la plaque est fonction des variations de θ lorsqu'on parcourt la plaque

$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dl} \quad (42)$$

Comme l'énergie est invariante sous le changement $R \rightarrow -R$ (plaque fléchie vers le haut ou vers le bas), l'énergie de est fonction du carré de l'inverse du (une plaque plane non déformée a un infini) :

$$E = \frac{1}{2} \kappa \int \left(\frac{d\theta}{dl} \right)^2 dl \quad (43)$$

par unité de ligne dans la direction perpendiculaire et où κ est une constante élastique caractéristique de la rigidité de la plaque. Les approximation suivantes sont utiles dans la limite de faibles déplacements

$$dl = \sqrt{dx^2 + dh^2} \approx dx \left(1 + \frac{1}{2} (h_x)^2 \right) \quad (44)$$

$$\theta \approx \frac{dh}{dx} = h_x \text{ d'où } \frac{d\theta}{dl} \approx h_{xx}$$

d'où

$$E = \frac{1}{2} \kappa \int \left(\frac{d\theta}{dl} \right)^2 dl \approx \frac{1}{2} \kappa \int dx (h_{xx})^2 \quad (45)$$

Lorsque la force F appliquée sur le bout non encastré déforme la plaque, elle effectue un travail proportionnel au déplacement du bout libre en x_1 , là où est appliquée la force. Ce travail est la force fois le déplacement :

$$Fh(x_1) = F \int_{l_0}^{l_1} dl u_z \cdot t(l) \quad (46)$$

où $t(l)$ est le vecteur tangent.

En effet

$$t(l) = \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}}(u_x + h_x u_z) \quad (47)$$

avec $dl = dx \sqrt{1+h_x^2}$. Prenant la projection suivant z donne l'intégrale

$$\int dx h_x = h(x_1) \quad (48)$$

Mais

$$u_z \cdot t(l) = \cos \theta \quad (49)$$

car le vecteur tangent t est de norme 1.

D'où la fonction à minimiser pour trouver la forme d'équilibre

$$E[\theta] = \frac{1}{2} \kappa \int dl \left(\frac{d\theta}{dl} \right)^2 - F \int dl \cos \theta \quad (50)$$

qui est fonction de l'angle $\theta(l)$.

Pour trouver l'équation d'équilibre, nous varions θ en $\theta + \delta\theta$ en respectant les variations admissibles physiquement

$$\delta\theta(l_0) = 0 \text{ car la plaque est encastrée}$$

$$\frac{d\theta}{dl} \Big|_{l=l_1} = 0 \text{ car aucun moment ne contraint la plaque en } l_1 \quad (51)$$

et son moment de en $l = l_1$ est nul. Nous obtenons les équations d'Euler du problème

$$-\partial_l \frac{\partial E}{\partial \theta_l} + \frac{\partial E}{\partial \theta} = 0 \quad (52)$$

$$\kappa \frac{d^2 \theta}{dl^2} - F \sin \theta = 0 \quad (53)$$

où les conditions $\theta(l_0) = 0$ et $d\theta/dl(l = l_1)$ déterminent la solution de façon unique.

Cette équation peut être intégrée une fois en introduisant la constante θ_1 :

$$\frac{1}{2} \kappa \left(\frac{d\theta}{dl} \right)^2 + F \cos \theta = F \cos \theta_1 \quad (54)$$

qui est telle que $\theta(l_1) = \theta_1$ (en raison de l'annulation du moment de en l_1).

Nous obtenons ainsi le profil de la plaque sous forme implicite

$$l = \sqrt{\frac{\kappa}{2F}} \int_{\theta}^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{\cos \theta_1 - \cos(u)}} \quad (55)$$

qui donne l en fonction de θ , c'est-à-dire $\theta(l)$.

EXERCICE 3.6. Nous considérons un film mince en adhésion sur un substrat solide. La tangente que fait le film est repérée par l'angle $\theta(l)$. Le film est en contact avec le substrat ($\theta = 0$) pour $-\infty < x \leq x_0$ et il est décollé du substrat pour $x > x_0$ (avec la côte $h(x)$). L'énergie d'adhésion de contact avec le substrat est W par unité de surface de contact. Nous supposons que l'énergie totale par unité de ligne dans le plan perpendiculaire est la somme :

(1) d'une énergie de contact $-W \int_{-\infty}^{x_0} dx$;

(2) d'une énergie de $K \int_{x_0}^{+\infty} dl \left(\frac{d\theta}{dl} \right)^2$ pour la partie fléchie.

Nous montrons dans ce problème que l'équilibre mécanique entre le moment de et l'énergie d'adhésion donne la valeur du au point de contact en x_0 (Cf. relation (59)).

(1) On appelle variation le changement $\theta(l) \rightarrow \theta(l) + \epsilon(l)$ avec $x_0 \rightarrow x_0 + \delta x_0$ où la condition de contact implique :

$$\theta(x_0) = \theta(x_0 + \delta x_0) + \epsilon(x_0) = 0 \quad (56)$$

Pourquoi est-il suffisant d'écrire $\epsilon(x_0)$ et non $\epsilon(x_0 + \delta x_0)$ dans l'équation précédente?

(2) En déduire que la variation $\epsilon(x)$ obéit à la condition :

$$\delta x_0 \frac{d\theta}{dl} \Big|_{x_0} = -\epsilon(x_0) \quad (57)$$

(3) Donner la variation de l'énergie de contact ΔW au premier ordre en δx_0 .

(4) Donner la variation de l'énergie de en fonction de $\epsilon(x_0)$ (attention aux intégrales par parties).

(5) Montrer que l'annulation de la somme de tous les termes linéaires en δx_0 conduit à l'équation suivante :

$$-W\delta x_0 + \kappa \left(\frac{d\theta}{dl} \right)^2 \delta x_0 = 0 \quad (58)$$

(6) En déduire la condition sur le

$$1/R = \sqrt{2W/\kappa} \quad (59)$$

(7) Nous supposons maintenant que l'énergie de la partie fléchie est la somme d'un terme de et d'un autre terme

$$K \int_{x_0}^{+\infty} dl \left(\frac{d\theta}{dl} \right)^2 + \sigma \int_{x_0}^{+\infty} dx \sqrt{1 + h_x^2} \quad (60)$$

Pouvez-vous donner une interprétation physique du terme proportionnel à σ ?

(8) En travaillant dans la limite des petites variations, $h_x^2 \ll 1$, montrer que le terme proportionnel à σ ne change pas la condition sur le .

(9) Toujours dans la même approximation, quel est est l'équation à laquelle doit satisfaire $\theta(x)$ pour que le profil soit à l'équilibre mécanique ?

(10) Donnez la solution du profil $h(x)$ qui satisfait à cette équation et à la condition sur le .

(11) Interpréter votre résultat en fonction de la valeur numérique du paramètre $\sqrt{\sigma/\kappa}$ qui dépend du système considéré.

CORRIGÉ 1. (1) Dans ce problème la variation est faite de façon simultanée sur l'angle et le point de contact. Ce sont deux infiniments petits du premier ordre. On devrait écrire

$$\epsilon(x_0 + \delta x_0) = \epsilon(x_0) + \delta x_0 \epsilon'(x_0) \quad (61)$$

mais le deuxième terme est un infiniment petit du deuxième ordre.

(2) immédiat en faisant le développement limité. La tangente est en effet parallèle au substrat et

$$\theta(x_0 + \delta x_0) + \epsilon(x_0 + \delta x_0) = 0 \quad (62)$$

D'où

$$\epsilon(x_0) + \frac{d\theta}{dl} \delta x_0 = 0 \quad (63)$$

(3)

$$\Delta W = -W \int_{x_0 + \delta x_0}^{x_0} \approx +W \delta x_0 \quad (64)$$

(4)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \kappa \int_{x_0 + \delta x_0}^{\infty} dx \left(\frac{d\theta + d\epsilon}{dl} \right)^2 &= \frac{1}{2} \kappa \left[\int_{x_0 + \delta x_0}^{x_0} dx \dots + \int_{x_0}^{\infty} dx \dots \right] \\ &= -\frac{1}{2} \kappa \left(\frac{d\theta}{dl} \right)^2 \delta x_0 + \frac{1}{2} \kappa \int_{x_0}^{\infty} dx \dots \end{aligned} \quad (65)$$

et

$$\frac{1}{2} \kappa \int_{x_0}^{\infty} dx \left(\frac{d\theta + d\epsilon}{dl} \right)^2 = \frac{1}{2} \kappa \int_{x_0}^{\infty} dx \left(\left(\frac{d\theta}{dl} \right)^2 + 2 \frac{d\theta}{dl} \frac{d\epsilon}{dl} \right) \quad (66)$$

avec

$$\kappa \int_{x_0}^{\infty} dx \frac{d\theta}{dl} \frac{d\epsilon}{dl} = \kappa \left[\epsilon \frac{d\theta}{dl} \right]_{x_0} - \int_{x_0}^{\infty} dx \epsilon \frac{d^2\theta}{dl^2} \quad (67)$$

Utilisant (64), (65) et (67), nous exigeons que la contribution total des termes de frontière soit nulle :

$$+W\delta x_0 - \kappa\epsilon(x_0)\frac{d\theta}{dl} - \frac{1}{2}\kappa\left(\frac{d\theta}{dl}\right)^2\delta x_0 = 0 \quad (68)$$

D'où le résultat en utilisant (63).

EXERCICE 3.7. Dans la pratique il arrive souvent que l'on désire rendre extrémale la :

$$F[h] = \int_{l_0}^{l_1} g\left(\theta, \frac{d\theta}{dl}, \dots\right) dl \quad (69)$$

où $g\left(\theta, \frac{d\theta}{dl}, \dots\right)$ est une fonction de l'angle θ et des ses dérivées. On remarque que la ne fait pas directement intervenir $h(x)$ mais l'angle θ ($dh/dl = \sin\theta$).

- (1) Nous désirons faire varier $\theta(l)$ et $h(l)$ de façon indépendante. Est-il possible de le faire avec la fonctionnelle précédente?
- (2) Nous introduisons un $\lambda(l)$ et nous considérons la fonctionnelle

$$G[h, \theta, \lambda] = \int_{l_0}^{l_1} g(\theta) dl + \int_{l_0}^{l_1} \lambda(l) \left(\frac{dh}{dl} - \sin\theta \right) \quad (70)$$

Nous supposons que nous pouvons maintenant faire varier h et θ de façon indépendante. Quelles sont les équations d'Euler du problème?

EXERCICE 3.8. On rappelle la définition de la dérivée fonctionnelle $\Gamma[f]$. Pour une fonction $f_0(x)$ arbitraire, nous pouvons développer

$$\Gamma[f_0 + \epsilon g] = \Gamma[f_0] + \epsilon \int \left. \frac{\delta\Gamma}{\delta f} \right|_{f_0} (x) g(x) + \dots \quad (71)$$

où

$$\left. \frac{\delta\Gamma}{\delta f} \right|_{f_0} (x) \quad (72)$$

est une fonction de x .

Calculer la dérivée fonctionnelle $\delta\Gamma[\phi]/\delta\phi(x)$ dans chacun des cas suivants :

- (1) $\Gamma[\phi] = \frac{1}{2} \int d^D x (\phi(x))^2$. (Rép. $\delta\Gamma[\phi]/\delta\phi(x) = \phi(x)$.)
- (2) $\Gamma[\phi] = \frac{1}{2} \int d^D x \eta^{i,j} \partial_i \phi(x) \partial_j \phi(x)$ avec $\eta^{i,j} = \eta^{j,i}$.
- (3) $\Gamma[\phi] = \phi(x_0)$. (Rép. $\delta\Gamma[\phi]/\delta\phi(x) = \delta(x - x_0)$.)
- (4) $\Gamma[\phi] = \int d^D x \int d^D y \phi(x) G(x,y) \phi(y)$ avec $G(x,y) = G(y,x)$.
(Rép. $\delta\Gamma[\phi]/\delta\phi(x) = 2 \int d^D y \phi(y) G(x,y)$.)

Rappels de mécanique analytique

1. Formalisme Lagrangien

Nous considérons le mouvement d'un point matériel sur un chemin 1d donné par la fonction $x(t)$. Dans le plan (x,t) , le chemin passe le point initial $A(x_1, t_1)$ et final $B(x_2, t_2)$.

Nous désirons retrouver le chemin $x_0(t)$ solution des équations de Newton: si nous fixons la valeur de $x(t)$ aux deux bornes de l'intervalle de variation, la solution des équations de Newton est unique. PRINCIPE DE HAMILTON. Ce chemin est celui qui rend extrémale l'action :

$$S[x] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(x, \dot{x}) \quad (73)$$

avec $x(t_1)$ et $x(t_2)$ donnés. Par définition, L est le du système

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - U(x) \quad (74)$$

où $U(x)$ est l'énergie potentielle. On remarque le signe $-$ devant l'énergie potentielle. Lorsque le système est décrit par un champ $\varphi(y)$, le lagrangien est l'intégrale sur tous l'espace de la densité Lagrangienne qui dépendent de la théorie considérée. Par exemple, pour une théorie dite en φ^4 (u est une constante).

$$\mathcal{L}[\dot{\varphi}, \varphi] = \frac{1}{2} c \dot{\varphi}^2 + \varphi^2 - \frac{u}{4} \varphi^4 \quad (75)$$

et

$$L[\varphi, t] = \int_{\Omega} dy \mathcal{L}[\dot{\varphi}, \varphi] \quad (76)$$

Comme auparavant, l'action est l'intégrale sur le temps du Lagrangien.

L'équation d'Euler (Euler-Lagrange dans le contexte de la mécanique) du problème détermine la solution de façon unique

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (77)$$

EXERCICE 1.1. Pourquoi?

Si le système est décrit à l'aide d'une champ, les équations d'Euler remplacent les équations de Newton:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = 0 \quad (78)$$

REMARQUE. Cette notion est facilement généralisée à un système de N coordonnées généralisées INDÉPENDANTES (un système de N points possède $3N$ coordonnées généralisées): $L(q_1, q_2, \dots, q_N)$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, i = 1, 2, \dots, N \quad (79)$$

REMARQUE. Le principe d'Hamilton est un principe d'extremum. Rien n'est dit sur le fait que l'action doit être un minimum ou un maximum.

REMARQUE. La définition de l'action est facilement généralisée au cas où le Lagrangien est une fonctionnelle d'un champ $\varphi(y)$ où y est une coordonnée spatiale (en d dimension). Prenons $d = 1$:

$$S[\varphi] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} dy \mathcal{L}(\varphi(y), \dot{\varphi}(y)) \quad (80)$$

2. Lagrangien d'une particule chargée dans un champ électromagnétique

Nous considérons une particule chargée (charge q) dans un \vec{E}, \vec{B} . La particule est donc soumise à une force de Lorentz :

$$m\ddot{\vec{x}} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B} \quad (81)$$

Nous cherchons un Lagrangien effectif tel que (81) correspondent aux équations d'Euler de l'action correspondante. Ce lagrangien n'est pas immédiat car la force de Lorentz dépend de la vitesse \vec{v} de la particule. Nous démontrons que ce est :

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}mv^2 - U(\vec{v}, \vec{B}) \quad (82)$$

avec un potentiel effectif :

$$U(\vec{v}, \vec{B}) = q \left(\Phi - \vec{v} \cdot \vec{A} \right) \quad (83)$$

On remarque que le potentiel effectif dépend des deux potentiels scalaires et vectoriels (Φ, \vec{A}) et non directement des champs (\vec{E}, \vec{B}) . Dans l'énergie potentielle, la particule interagit avec les par un terme qui multiplie le courant, proportionnel à la vitesse, aux potentiels.

DÉMONSTRATION. On introduit les potentiels de jauge

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \nabla \wedge \vec{A} \\ \vec{E} &= -\nabla\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{aligned} \quad (84)$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \vec{v} \wedge (\nabla \wedge \vec{A}) &= \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} \\ &= \frac{\partial}{\partial \vec{x}}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{x}} \\ &= \frac{\partial}{\partial \vec{x}}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{x}} \end{aligned} \quad (85)$$

Cette dernière égalité nous permet de transformer l'équation du mouvement

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{x}} &= q \left(-\frac{d\Phi}{d\vec{x}} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + q \frac{\partial}{\partial \vec{x}}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - q \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{x}} \\ &= q \left(-\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \left[\Phi - \vec{v} \cdot \vec{A} \right] - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{x}} \right) \\ &= q \left(-\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \left[\Phi - \vec{v} \cdot \vec{A} \right] - \frac{d\vec{A}}{dt} \right) \end{aligned} \quad (86)$$

Enfin :

$$\vec{A} = \frac{\partial}{\partial \vec{v}} (\vec{A} \cdot \vec{v}) = \frac{\partial}{\partial \vec{v}} (\vec{A} \cdot \vec{v} - \Phi) \quad (87)$$

car Φ ne dépend pas de \vec{v} . D'où :

$$m\ddot{\vec{x}} = q \left(-\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \left[\Phi - \vec{v} \cdot \vec{A} \right] - \frac{d}{dt} \left[\Phi - \vec{A} \cdot \vec{v} \right] \right) \quad (88)$$

qui sont les équations du mouvement obtenues à partir du Lagrangien où le potentiel \vec{A} interagit avec le courant $q\vec{v}$:

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}mv^2 - q\phi(t, \vec{x}) + q\vec{A}(t, \vec{x}) \cdot \vec{v} \quad (89)$$

NOTE. En électro-magnétisme, les équations de Maxwell sont invariantes sous le changement de jauge.

$$\begin{aligned} \Phi &\rightarrow \Phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \\ \vec{A} &\rightarrow \vec{A} + \nabla \chi \end{aligned} \quad (90)$$

Comme les champs restent inchangés sous cette transformation, la force de Lorentz, elle aussi, est nécessairement invariante de jauge. Qu'en est-il du principe de moindre action? Celui est-il aussi invariant de jauge?

Écrivons l'action en séparant le terme d'interaction S_I de la particule avec les potentiels de jauge.

$$S = S_0 + S_I = S_0 - q \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\Phi - \vec{A} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} \right] \quad (91)$$

Il sera utile de considérer la notation des quadrivecteurs empruntée à la relativité (0 est pour la partie scalaire et $i = 1,2,3$ pour la partie vectorielle) :

$$u_\alpha v^\alpha = u_0 v^0 + \sum_{i=1,3} u_i v^i \quad (92)$$

avec

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \quad (93)$$

Nous avons donc

$$S_I = -q \int_{t_1}^{t_2} dx^\alpha A_\alpha \quad (94)$$

avec

$$A_\alpha = (-\phi, \vec{A}) \text{ et } A^\alpha = (\phi, \vec{A}) \quad (95)$$

$$dx^\alpha = (dt, dx, dy, dz) \text{ et } dx_\alpha = (-dt, dx, dy, dz) \quad (96)$$

$$J^\alpha = (\rho, \vec{J}) \text{ pour le quadri-vecteur courant} \quad (97)$$

Avec ses notations, un changement de jauge prend une forme très simple

$$A_\alpha \rightarrow A_\alpha + \partial_\alpha \chi \quad (98)$$

et la partie d'interaction se transforme comme

$$S_I \rightarrow S_I + q \int \partial_\alpha \chi dx^\alpha = S_I + q(\chi(B) - \chi(A)) \quad (99)$$

Car la dernière intégrale n'est autre que l'intégrale d'une dérivée. Elle est donc immédiatement intégrée! En conclusion, sous transformation de jauge, S_I n'est modifié que par une constante. Or, une constante ne peut pas changer la condition d'extremum (rajouter une constante à la fonction $f(x)$ ne change pas la position de son extremum). On dira que le principe de moindre action est invariant de jauge car la condition d'extremum ne peut être modifié par l'ajout de cette constante.

3. Formalisme Hamiltonien

3.1. Fonction de Hamilton. Nous considérons un Lagrangien $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ avec n coordonnées généralisées. Pour chaque coordonnée q_i , nous associons un moment conjugué p_i

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (100)$$

On observe que p_i est une fonction de q_i et de ses dérivées :

$$p_i = p_i(\dots, q_i, \dot{q}_i, \dots, t) \quad (101)$$

DEFINITION 3.1. On définit le Hamiltonien en posant :

$$H(p_i, q_i, t) = \left[\sum_i p_i \dot{q}_i \right] - L(q_i, \dot{q}_i, t) \quad (102)$$

Nous pouvons réécrire les équations du mouvement en utilisant le Hamiltonien. La forme de ces équations peut être plus pratique que les équations d'Euler, tout dépend du contexte, mais elles contiennent la même information.

REMARQUE. Lorsque le potentiel ne dépend ni des vites, ni du temps, la transformée de Legendre est simple.

$$H = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U(x) \quad (103)$$

On remarque que le potentiel est affecté du signe + dans la fonction de Hamilton alors qu'il est affecté du signe - dans le Lagrangien. Pour un champ, la définition de la fonction de Hamilton est immédiate

$$H = \int_\Omega dy \left[\frac{1}{2} m \dot{\varphi}^2 + \frac{u}{4} \varphi^4 \right] \quad (104)$$

si la densité lagrangienne est une théorie en φ^4 .

NOTE. La fonction de Hamilton $H(p,q)$ définie ainsi est la transformée de Legendre de $L(q,\dot{q})$ par rapport à la variable \dot{q} . Du point de vue mathématique la transformée de Legendre est définie de la façon suivante (Cf. Arnold, « méthodes mathématiques de la mécanique classique ») :

CONSTRUCTION : Pour toute fonction $f(x)$ convexe, $f''(x) > 0$, on associe une nouvelle fonction $g(p)$ de la nouvelle variable p construite de la manière suivante. On trace le graphe de la fonction $f(x)$ et la droite $y = px$. Prenons le point $x(p)$ de la courbe $f(x)$ qui est le point le plus éloigné à la verticale de la droite $y = px$. Comme $f(x)$ est supposée convexe, la fonction $F(p,x) = px - f(x)$ admet un maximum pour p fixé au point $x(p)$. On pose $g(p) = F(p,x(p))$. par définition $g(p)$ est la TRANSFORMÉE DE LEGENDRE de $f(x)$. On montre que la transformée de Legendre est une INVOLUTION, c'est-à-dire que la transformée de Legendre de $g(p)$ redonne $f(x)$.

EXEMPLE 3.1. Quelques exemples :

- (1) Si $f(x) = \frac{1}{2}mx^2$ alors $g(p) = p^2/2m$;
- (2) Si $f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$ alors $g(p) = \frac{p^\beta}{\beta}$ où $1/\alpha + 1/\beta = 1$.

3.2. Équations de Hamilton. Considérons les dérivées partielles :

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} \text{ et } \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (105)$$

Par définition du Hamiltonien :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_i} &= \frac{\partial}{\partial p_i} [p_i \dot{q}_i - L] \\ &= \dot{q}_i + p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_i} = \dot{q}_i \end{aligned} \quad (106)$$

EXERCICE 3.1. Montrer :

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (107)$$

puis utiliser l'équation d'Euler pour simplifier.

DEFINITION 3.2. On appelle équation de Hamilton les équation du mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_i} &= \dot{q}_i \\ \frac{\partial H}{\partial q_i} &= -\dot{p}_i \end{aligned} \quad (108)$$

REMARQUE. Pour un potentiel qui ne dépend pas explicitement du temps, la fonction de Hamilton est l'énergie du système. Dans tous les autres cas, il est préférable de rester prudent ...

EXERCICE 3.2. Considérer une trajectoire solution des équations de Hamilton. Montrer que H est conservé au cours du temps (i.e. $dH/dt = 0$.)

EXERCICE 3.3. Considérez une particule dans un champ magnétique. Le Lagrangien est

$$L(\vec{x}, \vec{v}, t) = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - q\Phi(\vec{x}, t) + q\vec{A}\vec{v} \quad (109)$$

Montrer que le moment conjugué est :

$$\vec{p} = m\vec{v} + q\vec{A} \quad (110)$$

et que le Hamiltonien est

$$H(\vec{x}, \vec{p}, t) = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\Phi \quad (111)$$

EXERCICE 3.4. CROCHETS DE POISSON : Soient $A(q,p)$ et $B(q,p)$ deux fonctions des coordonnées généralisées et des moments conjugués. On définit le crochet de Poisson par

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial q} \frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial B}{\partial q} \quad (112)$$

Soit maintenant une fonction $F(q,p,t)$. Montrer que l'évolution temporelle de $F(q,p,t)$ sur une trajectoire solution des équations de Hamilton est donnée par :

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{H, F\} \quad (113)$$

NOTE. RÈGLE DU COUPLAGE MINIMUM : Nous avons vu qu'en présence d'un champ magnétique, la quantité de mouvement n'est plus égale à la partie cinétique $m\vec{v}$, mais qu'elle dépend du potentiel vecteur \vec{A} (Cf. (110)). Nous avons ainsi :

$$\vec{v} = \frac{1}{m}\vec{p} - \frac{q}{m}\vec{A} \quad (114)$$

Nous pouvons donc construire le Hamiltonien avec la règle usuelle :

$$H(\vec{x},\vec{p},t) = \vec{p}\cdot\vec{v} - L(\vec{x},\vec{v},t) = \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\Phi \quad (115)$$

Si E est la valeur de H , cette équation peut être réécrite comme :

$$E - q\Phi = \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 \quad (116)$$

Aussi : pour passer d'une particule libre à une particule plongée dans un champ magnétique, il suffit de faire la substitution :

$$\begin{aligned} E &\rightarrow E - q\Phi \\ \vec{p} &\rightarrow \vec{p} - q\vec{A} \end{aligned} \quad (117)$$

Cette règle de substitution est connue sous le nom de règle de COUPLAGE MINIMUM. Elle est particulièrement utile pour établir l'équation de Schrödinger en présence d'un champ magnétique. En effet, \vec{p} devient un opérateur en mécanique quantique :

$$\vec{p} \rightarrow i\hbar\vec{\nabla} \quad (118)$$

et on établit l'équation de Schrödinger comme :

$$E = \frac{p^2}{2m} \rightarrow E\psi(\vec{x},t) = \frac{1}{2m}(i\hbar\vec{\nabla})^2\psi \quad (119)$$

Utilisant maintenant la règle (117), nous avons en présence d'un champ magnétique :

$$(E - q\Phi)\psi(\vec{x},t) = \frac{1}{2m}(i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A})^2\psi(\vec{x},t) \quad (120)$$

Dynamique des champs classiques : passage au continuum

1. Introduction

Nous considérons une chaîne de masses m dont les positions sont équidistantes avec un pas du réseau a . Chaque masse indiquée par un entier n est reliée à ses proches voisines par un ressort. Enfin, la chaîne est supposée infinie. On note q_n le déplacement relatif de la masse n par rapport à sa position d'équilibre. Une fois la position d'une masse n perturbée, une onde se propage le long de la chaîne. On s'intéresse ici à la variation $q_n(t)$, $-\infty < n < +\infty$, le long de la chaîne et nous écrivons les équations du mouvement pour un indice n quelconque.

Dans la limite où la longueur d'onde caractéristique de cette onde est grande devant le pas du réseau, la position $q_n(t)$ peut être vue comme une fonction de la position x avec $q(x,t)$, où x parcourt la droite réelle. Du point de vue des équations du mouvement, nous sommes passés d'un système avec un Lagrangien ayant un nombre arbitrairement grand mais DISCRET de degrés de liberté $L(\dots, \dot{q}_n, \dots)$ à un Lagrangien qui est une fonctionnelle de la position et de ses dérivées $L[q(x,t), \dot{q}_x(x,t), \dot{q}_t(x,t)]$. Ce passage du cas discret au cas continu est l'objet de ce chapitre. Nous désirons établir les équations du mouvement à partir du principe d'extremum de l'action en utilisant les résultats du chapitre sur le calcul variationnel.

2. Chaîne de masses

Le milieu étant élastique, chaque atome i est connecté aux deux proches voisins $i - 1$ et $i + 1$ par un potentiel de Hooke, c'est-à-dire un ressort. L'énergie potentielle de l'atome i est donc :

$$\frac{1}{2}m\nu^2 (q_{i-1} - q_i)^2 + \frac{1}{2}m\nu^2 (q_{i+1} - q_i)^2 \quad (121)$$

qui définit une constant élastique de rigidité $m\nu^2$ (c'est le " k " dans $1/2kx^2$). Le Lagrangien total est donc la somme des énergies potentielles sur les LIAISONS et non sur les atomes. On vérifie que la lagrangien total est :

$$L = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left[\frac{1}{2}m\dot{q}_n^2 - \frac{1}{2}m\nu^2 (q_{n+1} - q_n)^2 \right] \quad (122)$$

Pour établir les équations du mouvement, on utilise les équations d'Euler. Chaque déplacement q_i étant un degré de liberté:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, i = -\infty, \dots, 1, 2, \dots, \infty \quad (123)$$

qui donne :

$$m\ddot{q}_i = m\nu^2 (q_{i+1} + q_{i-1} - 2q_i), i = -\infty, \dots, 1, 2, \dots, \infty \quad (124)$$

EXERCICE 2.1. Démontrer cette dernière égalité

Ces équations du mouvement admettent pour solution des ondes planes:

$$q_n(t) = A \cos(kx_n - \omega t) \quad (125)$$

si et seulement si le vecteur d'onde k et la pulsation ω sont liés par la relation de dispersion :

$$\omega^2 = 2\nu^2 (1 - \cos(ka)) \quad (126)$$

EXERCICE 2.2. À vérifier de façon explicite.

Il sera maintenant utile de considérer la limite des grandes longueurs d'onde, c'est-à-dire :

$$ka \ll 1 \quad (127)$$

Comme $\cos \epsilon \approx 1 - \frac{1}{2}\epsilon^2 + \dots$, la relation de dispersion devient :

$$\omega = \pm \nu a.k \quad (128)$$

qui est linéaire en k .

EXERCICE 2.3. Généraliser au cas où les déplacements peuvent avoir lieu dans le plan x, y (deux dimensions).

3. Chaîne continue

Pour passer à la limite du continuum, $a \rightarrow 0$, introduisons d'une part la densité de masse

$$\rho = \frac{m}{a} \quad (129)$$

D'autre part, nous supposons que la vitesse de propagation de l'onde approche une constante c

$$\omega = c.k \text{ avec } \nu a \rightarrow c \quad (130)$$

dont la signification physique est que le constante de raideur des ressorts de la chaîne discrète est inversement proportionnelle à a .

Pour obtenir l'énergie potentielle nous faisons le développement de Taylor à l'ordre 1:

$$q_{n+1}(t) - q_n(t) = q((n+1)a, t) - q(na, t) = a \left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{x_n=na} \quad (131)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{2} m \nu^2 [q_{i+1} - q_i]^2 &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{2} \rho c^2 a \left[\frac{\partial q}{\partial x} \right]^2 \\ &= \frac{1}{2} \rho c^2 \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} dx \left[\frac{\partial q}{\partial x} \right]^2 \end{aligned} \quad (132)$$

D'où la définition :

DEFINITION 3.1. Dans la limite du continuum, le lagrangien est une intégrale sur la variable d'espace x :

$$L \left[q, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial t} \right] = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} dx \left[\frac{1}{2} \rho \left[\frac{\partial q}{\partial t} \right]^2 - \frac{1}{2} \rho c^2 \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} dx \left[\frac{\partial q}{\partial x} \right]^2 \right] \quad (133)$$

DEFINITION 3.2. Dans la limite du continuum, les équations du mouvement sont obtenues en rendant l'action extrémale :

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt L \left[q, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial t} \right] \quad (134)$$

avec des conditions aux frontières $q(x, t_1)$ et $q(x, t_2)$ données (on remarque que c'est la valeur de la fonction $q(x, t)$ qui est donnée en $t_{1,2}$ quelque soit x). Nous pouvons ainsi réécrire le lagrangien dans cette limite. Pour l'énergie cinétique :

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left[\frac{1}{2} m \dot{q}_n^2 \right] &= \frac{m}{a} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left[\frac{1}{2} m \dot{q}_n^2 \right] a \\ &= \frac{m}{a} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left[\frac{1}{2} m \dot{q}_n^2 \right] \Delta x_n \rightarrow \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \rho [\dot{q}(x, t)]^2 \end{aligned} \quad (135)$$

D'où :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \quad (136)$$

dont la solution représentant une onde progressive :

$$q(x, t) = A \cos(kx - \omega t) \quad (137)$$

donne la relation de dispersion :

$$\omega = \pm ck \quad (138)$$

EXERCICE 3.1. Montrer que les équations du mouvement (124) se ramènent à (136). On fera le développement de Taylor de $q(x_n, t)$ pour $a \rightarrow 0$.

NOTE. On remarque que (134) a une allure relativiste. Introduisons la densité lagrangienne \mathcal{L} en trois dimensions pour l'espace physique

$$L = \int d^3 \vec{x} \mathcal{L} \quad (139)$$

L'action S est donc une intégrale à 4 dimensions (3 sur l'espace et 1 sur le temps) :

$$S = \int_{\Omega} d^4 x \mathcal{L} \quad (140)$$

On en déduit la règle relativiste : pour que les équations du mouvement ne dépendent pas de l'observateur, il suffit que la densité Lagrangienne \mathcal{L} soit un scalaire de Lorentz (invariant sous une transformation de Lorentz)

NOTE. Généralisation : il peut être intéressant de considérer des champs avec plusieurs composantes ϕ_a avec $a = 1, 2, \dots, n$ (l'aimantation dans un solide a trois composantes suivant les trois axes). Chaque composante évolue avec sa propre équation d'Euler :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi_a)} = 0 \quad (141)$$

EXERCICE 3.2. Expliciter toutes les dérivées intervenant dans (141) ainsi que leur signe.

EXERCICE 3.3. CHAÎNE DE PENDULES DE TORSION : Nous reprenons l'exemple d'une chaîne discrète mais, cette fois, un pendule pesant de masse m et de longueur l est articulé en $x_n = na$ (voir la figure 3 du chapitre 1). Le seul degré de liberté de chaque pendule est l'angle φ_n avec la verticale (voir Figure du chapitre 1). Le but de ce problème est d'établir le lagrangien et les équations du mouvement dans la limite où $\varphi(x, t)$ devient une fonction de la variable réelle x .

- (1) En supposant qu'il existe un couplage de TORSION entre les pendules, donner la forme de l'énergie potentielle liée au site i . On donnera l'expression la plus simple qui respecte les SYMÉTRIES. On appellera C la constante élastique de torsion.
- (2) En déduire la partie potentielle du Lagrangien.
- (3) Déterminer la partie cinétique du Lagrangien.
- (4) En déduire les équations du mouvement dans le cas discret.
- (5) En procédant par analogies avec le cours, déterminer la limite du continuum du Lagrangien. En déduire les équations du mouvement.
- (6) Montrer que ces équations sont les approximations des équations établies dans le cas discret et qu'il suffit de considérer la limite des grandes longueurs d'onde.
- (7) Rajouter la gravité au problème. Montrer que la gravité dans la limite des petites variations pour $\varphi(x, t)$ donne un terme en φ^2 .

4. Approche Hamiltonienne

Par analogies avec une particule, on définit le Hamiltonien en prenant la transformée de Legendre :

$$H = \frac{\partial L}{\partial (\partial_0 \varphi)} - L \quad (\text{l'indice 0 est pour le temps}) \quad (142)$$

En règle générale, H doit être défini positif.

EXERCICE 4.1. Champ de Klein-Gordon : considérer le Lagrangien :

$$L = -\frac{1}{2} (\partial_u \varphi) (\partial^u \varphi) - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \quad (143)$$

- (1) Expliciter L en fonction des dérivées.
- (2) Montrer que

$$H = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + (\vec{\nabla} \varphi)^2 + m^2 \varphi^2 \right] \quad (144)$$

qui est positif sauf si φ est identiquement nul.

5. Qu'est-ce qu'une symétrie?

DEFINITION 5.1. On appelle symétrie d'une théorie des champs, toute opération qui laisse invariante l'action. En particulier, si le jacobien de la transformation est égal à l'unité, cette opération de symétrie préserve le lagrangien

EXEMPLE 5.1. Nous verrons plus loin le cas des translations dans le temps et dans l'espace. Nous étudions ici le cas d'une transformation d'échelle sur les coordonnées

$$x \rightarrow D[x] = \lambda x \quad (145)$$

Pour trouver la loi de transformation sur les champs

$$\phi \rightarrow D[\phi] \quad (146)$$

nous exprimons que $D[\phi]$ et ϕ mesurent la même chose au même endroit :

$$D[\phi](D[x]) = \phi(x) \quad (147)$$

D'où

$$D[\phi](x) = \phi(x/\lambda) \quad (148)$$

EXERCICE 5.1. Soit un système abstrait possédant un Lagrangien $L(x, \dot{x})$ et donc une action

$$\int_{t_1}^{t_2} dt L(x, \dot{x})$$

On se donne une fonction $K(x, t)$. Démontrer que les équations d'Euler Lagrange pour le système possédant le Lagrangien $L(x, \dot{x})$ et pour le système ayant $L(x, \dot{x}) + dK/dt$ pour lagrangien sont les mêmes. Cette propriété montre qu'un lagrangien n'est défini qu'à une dérivée totale par rapport au temps près. C'est ce que nous avons déjà vu dans le cas de l'invariance de jauge pour le champ de Maxwell. On appelle ces symétries de symétries de jauge et elle joue un rôle fondamental en physique des hautes énergies. Nous n'aborderons pas ce point ici.

Donnons l'exemple d'un possédant une symétrie simple. Il sera utile de considérer un potentiel central $V(r = \|\vec{x}\|)$. La particule étant de masse m , l'action est donnée par :

$$S[\vec{x}] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) \text{ avec } L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x}) \quad (149)$$

Les équations d'Euler-Lagrange sont alors

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 \Leftrightarrow m \ddot{x}_i = -\frac{\partial}{\partial x_i} V(\vec{x}) \quad i = 1, 2 \quad (150)$$

Considérons maintenant la transformation :

$$\vec{x} \rightarrow \vec{u} = -\vec{x} \quad (151)$$

Les équations du mouvement écrites avec \vec{u} au lieu de \vec{x} ont la même forme que (150)

$$m \ddot{u}_i = -\frac{\partial}{\partial u_i} V(\vec{u}) \quad i = 1, 2 \quad (152)$$

car les dépendances fonctionnelles sont les mêmes (le potentiel est à force centrale, donc indépendant du signe), il n'y a pas de nouveau préfacteur etc. La substitution $x \rightarrow u$ est directe.

Si les équation du mouvement ont la même forme, leur solution sont identiques. On dit que l'opération $\vec{x} \rightarrow \vec{u}$ est une symétrie du système. Cette définition est générale. La transformation $\vec{x} \rightarrow u$ est a priori quelconque. Il s'agit ici d'une évidence mais qu'il peut être utile de formaliser en adoptant deux points de vue :

- POINT DE VUE PASSIF. On se donne un système et deux observateurs \mathcal{O} et \mathcal{O}' qui utilisent des règles différentes pour mesurer les positions. Si \mathcal{O} attribue \vec{x} , on supposera que \mathcal{O}' attribue au même point \vec{x}' . Chaque observateur calcule l'action dans son propre référentiel. Nous avons :
 - D'une part, $S_{\mathcal{O}} = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\vec{x}, \dot{\vec{x}})$;
 - Et, d'autre part, $S_{\mathcal{O}'} = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\vec{x}', \dot{\vec{x}}')$.

Une condition suffisante pour que la transformation $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}'$ réalise une opération de symétrie est que les lagrangiens ne diffèrent que d'une dérivée totale par rapport au temps (Cf. exercice plus haut)

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = L(\vec{x}', \dot{\vec{x}}') + \frac{dK(\vec{x}')}{dt} \quad (153)$$

EXEMPLE 5.2. Pour le potentiel à force centrale les deux lagrangiens dans le système x et dans le système $u = -x$ ont même dépendance fonctionnelle

$$L(\dot{x}, x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x) \quad (154)$$

$$L(\dot{u}, u) = \frac{1}{2}m\dot{u}^2 - V(u) \quad (155)$$

Mais il n'est pas évident dans le cas général que $V(x)$ ait la même forme fonctionnelle que $V(u)$.

Cette condition nous assure que les équations du mouvement sont effectivement invariées et qu'elles gardent la même forme sous la transformation.

NOTE. Évidemment, toute opération n'est pas une opération de symétrie. Pour une transformation quelconque les deux observateurs peuvent calculer une action propre à leur système de référence et en déduire les équations du mouvement. Nécessairement, les actions ont les mêmes dans les deux repères (le système est identique, seuls les observateurs changent).

$$S_{\mathcal{O}} = S_{\mathcal{O}'} \quad (156)$$

car la transformation $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}'$ ne revient qu'à un simple changement de variable $\vec{x} \rightarrow \vec{x}'$ pour calculer l'intégrale. Mais les deux lagrangiens sont en général différents.

- POINT DE VUE ACTIF. Ici nous n'avons qu'un SEUL OBSERVATEUR. La transformation $\vec{x} \rightarrow \vec{x}''$ est une transformation effectuée dans le même système de référence lié à l'observateur. Ce dernier point de vue est généralement mieux adapté aux symétries continues qui peuvent être variées continûment en fonction d'un paramètre.

Voici maintenant quelques transformations simples :

- (1) L'inversion $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$. Cette transformation n'est pas continue.
- (2) Une translation de vecteur $\epsilon \hat{c}$: $\vec{x} \rightarrow \vec{x} + \epsilon \hat{c}$. Cette transformation est continue car ϵ est aussi petit que l'on veut.
- (3) Une rotation d'angle $\delta\omega$ autour d'un axe de vecteur unitaire \hat{a} :

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x} + \delta\omega \vec{x} \wedge \hat{a} \quad (157)$$

Cette transformation est aussi continue, car elle dépend du paramètre $\delta\omega$.

On remarque que les deux dernières transformations peuvent être rendues infinitésimales (i.e. $\vec{x} \rightarrow \vec{x} + \delta\vec{x}$ par un choix convenable de ϵ ou de $\delta\omega$). On dit qu'il s'agit d'une TRANSFORMATION CONTINUE par opposition à une TRANSFORMATION DISCRÈTE comme l'inversion $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$ qui ne possède pas de petit paramètre pouvant être varié. Dans ce dernier cas, la transformation est discrète. Ces deux types de transformation peuvent être considérés du point de vue des symétries, mais les transformations continues permettent d'établir des propriétés importantes.

CONCLUSION. Dans le point de vue actif, l'observateur associe un point \vec{x} à un point \vec{x}'' du même système de référence. On utilise donc le même Lagrangien où les coordonnées et les vitesses sont exprimées dans le repère ''. Nous avons donc des équations du mouvement :

$$\frac{\partial L}{\partial x_i''} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i''} = 0 \quad (158)$$

Mais si x_i'' est solution de cette équation, il n'est pas toujours vrai que x_i le soit. Si il l'est, nous avons une symétrie. Autrement dit, pour que $\vec{x} \rightarrow \vec{x}''$ soit une symétrie, il faut que l'action soit égale dans les deux systèmes de coordonnées (à une dérivée totale par rapport au temps près) de telle manière que l'extremum de l'une soit aussi un extremum de l'autre :

$$S[\vec{x}] = S[\vec{x}''(\vec{x})] + \frac{dK}{dt} \quad (159)$$

EXEMPLE 5.3. EXEMPLE DES ROTATIONS

Considérons :

$$\vec{x}' = \vec{x} + \delta\vec{x} \text{ où } \delta\vec{x} = \delta\omega\vec{x} \wedge \hat{\mathbf{a}} \quad (160)$$

et calculons la variation infinitésimale du Lagrangien :

$$L(\vec{x}'', \dot{\vec{x}}'') = L(\vec{x} + \delta\vec{x}, \dot{\vec{x}} + \delta\dot{\vec{x}}) \quad (161)$$

D'où :

$$\delta L = \delta\vec{x} \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} + \delta\dot{\vec{x}} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} \quad (162)$$

avec

$$\delta\vec{x} \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = \sum_i \delta x_i \frac{\partial L}{\partial x_i} \quad (163)$$

Mais :

$$\frac{d}{dt} \left[\delta x_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right] = \delta \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + \delta x_i \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right] \quad (164)$$

avec sommation sur les indices i . D'où (162) s'écrit :

$$\sum \delta x_i \left[\frac{\partial L}{\partial x_i} - \sum \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right] \right] + \sum \frac{d}{dt} \left[\delta x_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right] \quad (165)$$

Supposons maintenant que la rotation soit une symétrie du système. Alors les Lagrangien sont les mêmes et x_i est solution des équations du mouvement. La fonction dans la dérivée totale dans (165) conduit en effet à une variation de l'action si les instants t_1 et t_2 sont arbitraires (Voir ci-dessus).

D'où :

$$\sum_i \frac{d}{dt} \left[\delta x_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right] = \frac{d}{dt} \left[\delta\vec{x} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} \right] = 0 \quad (166)$$

Mais

$$\begin{aligned} \delta\vec{x} &= \delta\omega\vec{x} \wedge \hat{\mathbf{a}} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} &= m\dot{\vec{x}} \end{aligned} \quad (167)$$

Mais (pour vérifier cette égalité, prendre $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$).

$$[\vec{x} \wedge \hat{\mathbf{a}}] \cdot \dot{\vec{x}} = -\hat{\mathbf{a}} \cdot \vec{x} \wedge \dot{\vec{x}} \quad (168)$$

et donc d'après (167)

$$\frac{d}{dt} [x \wedge \dot{x}] = 0 \quad (169)$$

La quantité qui est conservée n'est autre que le MOMENT CINÉTIQUE.

6. Théorème d'Émilie Noether

Ce théorème établi en 1918 par Émilie Noether exprime l'équivalence entre les lois de conservation et l'invariance des lois physiques due aux symétries. Il s'applique à la fois à des systèmes décrits par la mécanique lagrangienne (équations différentielles) et à des systèmes décrits par une théorie des champs (équations aux dérivées partielles). Ce théorème peut être énoncé de façon très simple. Auparavant, nous définissons :

DEFINITION 6.1. Un groupe de symétries continues est un groupe de symétries qui dépend d'un petit paramètre qui peut varier de façon infinitésimale. Par exemple, les rotations infinitésimales :

$$\vec{x}' = \vec{x} + \delta\vec{x} \text{ où } \delta\vec{x} = \delta\omega\vec{x} \wedge \hat{\mathbf{a}} \quad (170)$$

PROPRIÉTÉ 6.1. *Alors : À tout groupe de symétries CONTINUES, on peut trouver une quantité conservée (version mécanique). Quelques exemples : invariance du comportement sous rotation (moment cinétique), invariance du comportement sous translation dans l'espace (quantité de mouvement), invariance du comportement sous translation dans le temps (énergie totale). En théorie des champs, si il existe une symétrie continue, alors il existe un courant conservé. L'analogie est la conservation de la charge électrique*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \quad (171)$$

qui résulte elle aussi d'une symétrie (facteur de phase dans le champ complexe qui est l'analogie de la fonction d'onde de Schrödinger). Ce théorème permet de construire une théorie à partir des quantités qui sont conservées expérimentalement. Il est généralisable en mécanique quantique et en relativité.

EXERCICE 6.1. On considère une chaîne de masses m connectées à leurs plus proches voisins avec des ressorts anharmoniques dont la relation force, F , déplacement, x , est donnée par

$$F(x) = -kx - \alpha kx^2 \quad (172)$$

- (1) Écrire le Lagrangien du système.
- (2) Démontrer que l'équation du mouvement pour le ressort j est

$$m \frac{d^2 y_j}{dt^2} = k(y_{j+1} + y_{j-1} - 2y_j) + k\alpha [(y_{j+1} - y_j)^2 - (y_j - y_{j-1})^2] \quad (173)$$

- (3) Pour passer à la limite du continuum, on désigne par a la distance entre deux voisins. En développant $y_{j\pm 1}$ en série de Taylor au voisinage de y_j , démontrer que les équations du mouvement sont au troisième ordre en a données par

$$\omega_0^{-2} y_{tt} = y_{xx} + \epsilon y_x y_{xx} + \frac{a^2}{12} y_{xxxx} \quad (174)$$

où $\epsilon = 2\alpha a$. On donnera ω_0 .

- (4) Dans la suite, on posera $\omega_0 = 1$. On fait le changement de variable :

$$\xi = x - t; \quad \tau = \frac{1}{2} \epsilon t \quad (175)$$

et on cherche une solution sous la forme

$$y(x, t) = \psi(\xi, \tau) \quad (176)$$

On remarque que ϵ impose une échelle de temps et nous nous placerons dans la limite $\epsilon \rightarrow 0$. En négligeant les termes d'ordre le plus élevé en ϵ (justifier soigneusement votre calcul), démontrer que la fonction $u = \psi_x$ satisfait l'équation (de Korteweg et de Vries)

$$u_\tau + uu_\xi + \delta^2 u_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (177)$$

où $\delta^2 = a^2/12\epsilon$.

- (5) On cherche à trouver la solution à 1 soliton de l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (178)$$

qui est du type précédent. Nous cherchons une solution sous la forme $u(x, t) = z(\xi = x - vt)$. Démontrer qu'il existe alors deux constantes réelles A, B telles que :

$$-\frac{v}{2} z^2 + z^3 \frac{1}{2} \left(\frac{dz}{d\xi} \right)^2 - Az = B \quad (179)$$

- (6) La solution qui nous intéresse est telle que $z(\xi)$ et toutes ses dérivées s'annulent à l'infini. En déduire que la valeur de A et celle de B .
- (7) Montrer que pour ce choix particulier des conditions aux limites :

$$\left(\frac{dz}{d\xi} \right)^2 = z^2 (v - 2z) \quad (180)$$

- (8) L'équation différentielle précédente est donc ramenée à calculer l'intégrale :

$$\int_{z_0}^z \frac{ds}{s\sqrt{v-2s}} = \int_{\xi_0}^\xi ds \quad (181)$$

Pour intégrer, faire le changement de variable $s = v/(2 \cosh^2 w)$ et donner la solution.

Théorie de Ginsburg-Landau-Wilson

1. Introduction

L'approche de Landau, ou théorie de Landau (1937), a été développée dans le contexte des transitions de phase entre différents états de la matière. Citons, bien sûr, la transition entre l'état magnétique et paramagnétique, mais il existe des centaines d'autres transitions entre différents états (liquide-gaz, solide-liquide, supraconducteur - état normal, superfluidité, transition métal-isolant etc.) . Bien que cela ne soit pas évident pour toutes ces transitions, les états de part et d'autre de la ligne de transition se distinguent de part leur symétrie.

IDENTIFIER LES SYMÉTRIES : Entre deux phases les symétries sont différentes. L'une phase est plus symétrique que l'autre. Ceci est illustré en figure 1 (tirée du livre de J. Sethna) .

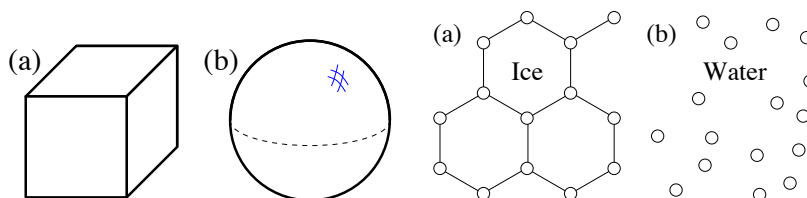


FIG. 1. *En (a) Le cube est moins symétrique que la sphère. En (b) l'eau est une phase plus symétrique (translation et rotation) que la glace.*

Un cube est un objet de symétrie élevée. Il est invariant sous des rotations de 90° , 120° , ou 180° . La sphère est invariante sous des rotations d'angle arbitraire. Nous dirons que la sphère est un objet de plus haute symétrie que le cube. L'encadré (b) montre la différence entre la glace et l'eau. Dans la phase « glace », les molécules d'eau sont aux noeuds d'un réseau de symétrie 6. L'eau, quant à elle, possède en moyenne une symétrie de translation et de rotation de paramètre arbitraire.

L'approche de Landau est basée sur deux concepts clefs. Le premier est l'existence d'un paramètre d'ordre dont la valeur nous renseigne sur la phase considérée. Le deuxième est l'existence d'une fonctionnelle de ce paramètre d'ordre qui joue le rôle d'une enthalpie libre en thermodynamique.

2. Paramètre d'ordre

Pour décrire l'état du système on introduit un paramètre d'ordre \mathbf{M} qui donne, par exemple, l'aimantation. Au cours de ce chapitre, \mathbf{M} deviendra un champ, c'est-à-dire que \mathbf{M} sera un vecteur dont la valeur dépendra de la position \mathbf{x} comme $\mathbf{M}(\mathbf{x})$. Pour l'instant, nous utiliserons \mathbf{M} en oubliant la dépendance sur \mathbf{x} (ce qui veut dire que nous travaillons avec la moyenne thermodynamique $\langle \mathbf{M}(\mathbf{x}) \rangle$). Enfin, \mathbf{M} est écrit comme un vecteur car l'aimantation a des composantes sur les axes \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} . Dans l'état magnétique, l'une des composantes de \mathbf{M} est non-nulle alors que toutes les composantes sont nulles dans l'état paramagnétique. Soit M_z cette composante. Pour une transition magnétique ordinaire, la composante M_z s'annule de façon continue à la transition. En-dessous de T_c , M_z est non nul avec

$$\lim_{T \rightarrow T_c^-} M_z(T) = 0 \tag{182}$$

En règle générale le comportement du paramètre au voisinage de la transition permet de classer les transitions en deux catégories :

- (1) Les transitions de phase du 1^{er} ordre (de loin les plus communes) pour lesquelles le paramètre d'ordre a un saut au voisinage de la transition. Il passe d'une valeur finie non-nulle à une

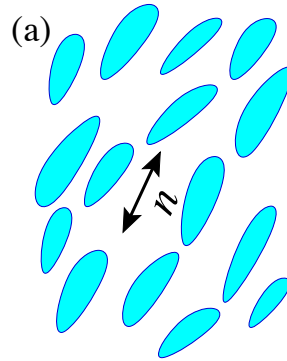
valeur strictement nulle. Pour cette raison, les transitions de phases du 1^{er} ordre sont appelées scshapediscontinues dans le langage contemporain des transitions de phase.

- (2) Les transitions de phase d'un ordre supérieur qui sont, quant à elles, continues. Comme dans l'exemple du magnétisme, le paramètre d'ordre s'annule de façon continue à la transition (ce qui ne veut pas dire que c'est un fonction analytique, i.e. développable en série de Taylor, de la température, voir la suite).

CONCLUSION : Le comportement des observables (suceptibilité, chaleur spécifique etc.) est très différent suivant le caractère de la transition. De façon surprenante, les transitions de phase continues (on dit aussi du 2^e ordre) sont les mieux comprises à ce jour.

EXEMPLE 2.1. Un exemple important de systèmes ayant de très nombreuses phases à une température voisine de la température ambiante est donné par les cristaux liquides. Ces critaux sont constiués de longue molécules oblongues dont l'axe porte un directeur \hat{n} . Pour les cristaux liquides, seule la direction de \hat{n} est importante et non sons sens, car la molécule peut être inversée par rotation de 180° sans rien changer aux effets physiques.

Une des transitions thermodynamiques des cristaux liquides est la transition isotrope - nématique. Dans l'état isotrope, les molécules ont une orientation arbitraire. Dans l'état nématique, elles ont une orientation préférentielle suivant un axe mais le système est toujours invariant sous translation. On peut donc briser la symétrie de rotation de façon indépendante de la symétrie de translation (cette transition est une transition discontinue).



EXEMPLE 2.2. Pour la chaîne harmonique du chapitre précédent qui simule la propagation d'ondes élastiques, le déplacement $u(x)$ est e paramètre d'ordre.

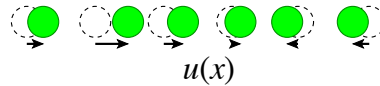


FIG. 2. *Champ de déplacement pour la chaîne d'atomes.*

3. Énergie libre de Landau et symétries

Dorénavant, nous nous limiterons aux transitions de phase continues (cf. ci-dessous). L'hypothèse suivante, elle aussi due à Landau, est que les potentiels thermodynamiques sont des fonctions analytiques de ce paramètre d'ordre. Si nous contrôlons la température et la pression, nous utiliserons l'enthalpie libre $G(T,p,\mathbf{M}) \rightarrow G(\mathbf{M})$. L'aimantation M étant supposée homogène, nous déterminons M à partir de la condition d'extremum :

$$\frac{1}{\Omega} \frac{dG}{dM} = 0 \quad (183)$$

où Ω est le volume du système. Lorsque M deviendra un champ, nous aurons :

$$\frac{\delta G}{\delta \mathbf{M}(\mathbf{x})} = 0 \quad (184)$$

car $G[\mathbf{M}(\mathbf{x})]$ sera une fonctionnelle du paramètre d'ordre.

Étudions d'abord $\mathbf{M} = \text{Cste}$. Considérons le cas où \mathbf{M} n'a qu'une composante. Comme le paramètre d'ordre M est petit, G peut être développée en puissance de ce paramètre d'ordre. Supposons :

- (1) que le développement de G ne contienne que des puissances paires de M :

$$G = G_0 + a(T,P)M^2 + u(T,P)M^4 \quad (185)$$

L'enthalpie est donc invariante sous le changement $M \rightarrow -M$. L'état qui minimise l'énergie libre est dégénéré et la symétrie de $G(M)$ reflète les symétries du système. Pour que le système possède un minimum, nous supposons $u > 0$ (sans cela, il faut inclure les termes d'ordre 6).

- (2) que le développement de G contient une puissance impaire. Nous prendrons un terme cubique :

$$G = G_0 + aM^2 + bM^3 + uM^4 \quad (186)$$

où a , b , et u sont des fonctions de la température T et de pression P . L'enthalpie libre n'a plus la symétrie $M \rightarrow -M$. Le terme cubique n'est possible que si les symétries du système ne l'interdisent pas.

Le cas (185) est caractéristique d'une transition de phase continue. Le cas (186) est, quant à lui, caractéristique d'une transition de phase du premier ordre.

4. Minimisation de l'enthalpie libre

Nous considérons ici le cas d'une transition de phase continue (2^e ordre). Il suffira ici de prendre $u > 0$ et u indépendant de (T,p) (on montre en physique statistique que cela ne change rien).

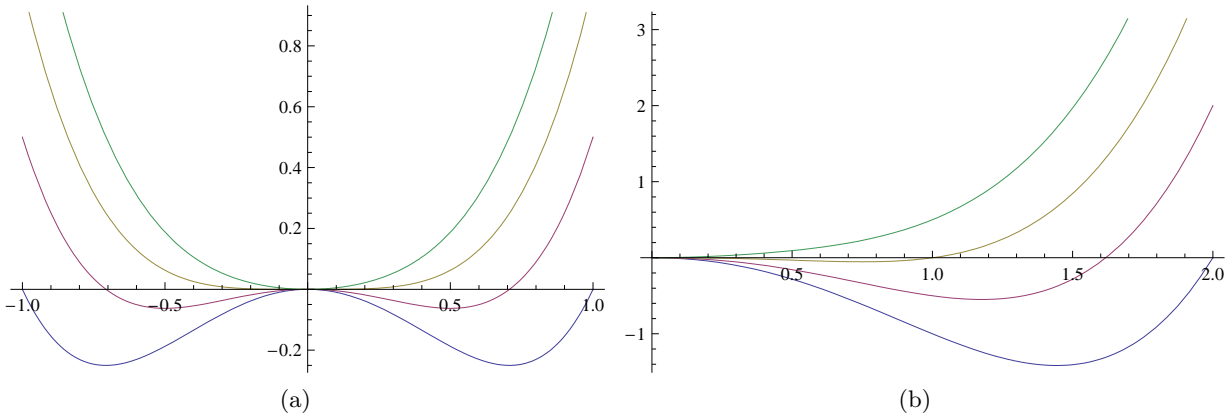


FIG. 3. Énergie libre de Landau suivant le cas $a < 0$ ou $a > 0$ (un minimum en 0 ou deux minima). En (b), schéma d'une énergie libre pour une transition de 1^{er} ordre obtenue avec $b < 0$ dans l'Éq. (186).

Éq (185) possède un ou deux minima suivant le signe de a .

- (1) Si $a > 0$ le seul minimum est obtenu pour $M = 0$. L'état est paramagnétique.
- (2) Si $a < 0$, G possède deux minima séparés par un maximum en $M = 0$. Les valeurs des minima sont obtenues à partir de (183). Nous avons

$$M_{\pm} = \pm \sqrt{-\frac{a}{2u}} \quad (187)$$

qui s'annule en $T = T_c$ de façon non analytique. CONCLUSION : Pour décrire une transition de phase continue, il suffit de prendre $a(T,P)$ comme

$$a(T,P) = \tilde{a}_2(T - T_c) \text{ avec } \tilde{a}_2 > 0 \quad (188)$$

et nous trouvons :

$$M(T) = \begin{cases} 0 & \text{si } T > T_c \\ \sqrt{\frac{a_2}{2u}}(T_c - T)^{1/2} & \text{si } T < T_c \end{cases} \quad (189)$$

5. Généralisation : énergie libre de Landau-Ginzbourg-Wilson

Comme pour la chaîne harmonique, nous désirons tenir compte des variations locales du paramètre d'ordre. Dans le cas de la chaîne, le déplacement q des atomes était le paramètre d'ordre et l'interaction entre atomes proches voisins prenait la forme (Cf. Éq. (133)) du chapitre précédent :

$$\frac{1}{2}c \int dx \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 \quad (190)$$

avec un gradient qui résulte de l'interaction entre atomes proche voisins. Ce terme est une énergie potentielle qui pénalise les déplacement inhomogènes. Dans le cas de la théorie de Landau, nous pouvons aussi pénaliser les variations locales du paramètre d'ordre en incluant un terme analogue. Nous avons donc pour l'enthalpie libre :

$$G = \int_{\Omega} dx \mathcal{G} = \int_{\Omega} dx \left[\frac{1}{2}c (\nabla \mathbf{M})^2 + a_2(T - T_c)\mathbf{M}(x)^2 + u\mathbf{M}(x)^4 \right] \quad (191)$$

où \mathcal{G} est une densité.

6. Étude d'une paroi de domaine magnétique

Nous considérons un échantillon magnétique à une température inférieure à la température critique. Le système possédant la symétrie $M \rightarrow -M$, l'aimantation locale peut prendre deux valeurs. Nous supposons qu'il existe deux domaines, où loin de l'interface entre les deux domaines, l'aimantation prend la valeur qui minimise le potentiel (191) en volume. Négligeant les termes en gradient ($a(T, P) = a_2$) et supposant que le paramètre d'ordre est un scalaire ($\mathbf{M} \rightarrow M$), nous avons en volume (c'est-à-dire loin de la paroi) :

$$\frac{dG}{dM} = 0 \quad (192)$$

soit

$$M = \pm M_0 \text{ avec } 2a_2M_0 + 4uM_0^3 = 0 \quad (193)$$

ou

$$M_0 = \left(-\frac{a_2}{2u} \right)^{1/2} \text{ avec } a_2 < 0 \quad (194)$$

En l'absence de terme en gradient dans l'enthalpie libre, le profil d'aimantation $M(x)$ passe brusquement de la valeur $+M_0$ à $-M_0$ lorsqu'on franchit l'interface entre les deux domaines. Cette discontinuité n'est pas physique et l'interface est en fait le lieu où M varie rapidement entre les deux limites $\pm M_0$. Le terme $(\nabla M)^2$ pénalisant les variations rapides de M dans l'enthalpie libre (191), nous calculons le profil de variation de $M(x)$ à partir de l'équation d'Euler :

$$\frac{\delta G}{\delta M(x)} = 0 \text{ soit } \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial M} - \partial_x \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \partial_x M} = 0 \quad (195)$$

avec les deux conditions aux limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} M(x) = +M_0 \quad (196)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} M(x) = -M_0 \quad (197)$$

D'où l'équation différentielle :

$$\frac{c}{2a_2} \frac{d^2 M}{dx^2} = M + 2\frac{u}{a_2} M^3 \quad (198)$$

L'analyse dimensionnelle de cette équation montre immédiatement à partir de la dérivée seconde en x qu'il existe une longueur caractéristique :

$$\xi = \sqrt{-\frac{c}{2a_2}} \quad (199)$$

qui fixe un étalon pour toutes les échelles de longueur. Cette longueur joue un rôle fondamental dans la théorie des transitions de phase continues où elle est appelée LONGUEUR DE CORRÉLATION. Notons ici simplement que ξ diverge au voisinage de la transition :

$$\xi \sim (T_c - T)^{1/2} \rightarrow \infty \quad (200)$$

L'équation (198) étant non-linéaire, donc, a priori difficile à résoudre, nous la linéarisons. Cette approximation sera naturellement d'autant plus valable que l'aimantation M sera petite, c'est-à-dire que nous serons au centre de la paroi de domaine :

$$\xi^2 \frac{d^2 M}{dx^2} = -M \quad (201)$$

Cette équation donne un profil $M(x)$ en fonction d'un sinus. Si cette approximation est valable pour $x - x_0$ petit ($x = x_0$ au centre de la paroi) car $\sin(x - x_0)/\xi_0 \approx (x - x_0)/\xi_0$, elle perd tout son sens ailleurs car l'aimantation doit se raccorder à sa valeur en volume $\pm M_0$. Il faut donc garder le terme cubique ! Heureusement, l'équation (198) est intégrable car elle ne dépend pas explicitement de x .

Multiplions membre à membre par dM/dx et intégrons

$$\frac{1}{2} \xi^2 \left(\frac{dM}{dx} \right)^2 - \frac{1}{2} \xi^2 \left(\frac{dM}{dx} \right)^2 \Big|_{x=-\infty} = \frac{1}{2} M(x)^2 + \frac{1}{2} \frac{u}{a_2} M(x)^4 - \frac{1}{2} M_0^2 - \frac{1}{2} \frac{u}{a_2} M_0^4 \quad (202)$$

À l'infini, nous avons :

$$\frac{1}{2} \xi^2 \left(\frac{dM}{dx} \right)^2 \Big|_{x=-\infty} = 0 \quad (203)$$

Et :

$$M_0^2 = -\frac{1}{2} \frac{a_2}{u} \quad (204)$$

D'où :

$$-\frac{u}{a_2} M_0^4 = -\frac{1}{2} M_0^2 \quad (205)$$

Nous avons donc :

$$\int \frac{dM}{\left[M^2 + \frac{u}{a_2} M^4 - \frac{1}{4} M_0^2 \right]^{1/2}} = \pm \frac{1}{\xi} (x - x_0) \quad (206)$$

où x_0 est arbitraire. On peut donc intégrer cette équation différentielle en calculant l'intégrale.

Pour gagner du temps, il est plus simple de vérifier directement que

$$M_0(x) = \pm M_0 \tanh \left[\frac{x - x_0}{\sqrt{2}\xi} \right] \quad (207)$$

est solution de l'équation différentielle. Comme prévu, ξ définit la seule unité de longueur qui renormalise toutes les échelles sur l'axe des x .

Les variations de la fonction \tanh étant concentrées près de l'origine, on définit la largeur caractéristique de la paroi comme $\sqrt{2}\xi = \left(-c/(\sqrt{2}a_2) \right)^{1/2}$. La constante c multipliant le gradient dans l'énergie libre, la largeur est bien déterminée par le poids du terme en gradient (qui pénalise les variations du paramètre d'ordre).

REMARQUE. Au voisinage de la température critique de Curie, $T \rightarrow T_c^-$, on a $a_2 \rightarrow 0$ et $\xi \rightarrow \infty$. La largeur de la paroi tend donc vers l'infini à la transition avec, pour interprétation physique, un mélange des deux phases à toutes les échelles.

Nous désirons calculer l'EXCÈS d'énergie d'une paroi par rapport à une phase d'aimantation uniforme $\pm M_0$. Nous calculons donc :

$$\Delta G = \frac{c}{2} \int dx \left(\frac{dM}{dx} \right)^2 + \int dx \left[a_2 M^2 + u M^4 - a_2 M_0^2 - u M_0^4 \right] \quad (208)$$

Pour calculer cette intégrale, il est plus simple de remarquer que l'équation différentielle à laquelle obéit $M(x)$ donne directement :

$$M^2 + \frac{u}{a_2} M^4 - \frac{1}{2} M_0^2 - \frac{u}{a_2} M_0^4 = \xi^2 \left(\frac{dM}{dx} \right)^2 \quad (209)$$

Aussi :

$$\Delta G = -\frac{ca_2}{\xi} \frac{1}{u} \quad (210)$$

car

$$\int_0^\infty dx \left(1 - \tanh(x)^2\right)^2 = \frac{2}{3} \quad (211)$$

On remarque :

REMARQUE. $\Delta G \propto 1/u$. La variation d'énergie n'est donc PAS développable en série de puissance de u . Pour calculer l'énergie de la paroi, nous devons résoudre le problème non-linéaire.

REMARQUE. Lorsque $T \rightarrow T_c^-$, $\xi \rightarrow \infty$ et donc $\Delta G \rightarrow 0$.

EXERCICE 6.1. On considère la fonctionnelle :

$$F[\varphi] = \int dx \left[\frac{1}{2} \lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + f(\varphi) \right] \quad (212)$$

où $f(\varphi)$ est une fonction possédant deux minima en φ_1 et φ_2 (voir schéma). Ici, le champ φ joue le rôle de paramètre d'ordre et $F[\varphi]$ celui d'énergie libre. En fonction de la position relative des minima de $f(\varphi)$, quelle est la phase qui envahit l'autre?

- (1) Quelle est la condition à laquelle doit satisfaire φ pour que $F[\varphi]$ soit extrémale? Nous supposons par la suite que cette condition d'extremum donne un minimum de $F[\varphi]$. Pour répondre à cette question, on écrira les équations d'Euler de la fonctionnelle.
- (2) Lorsque le champ $\varphi(x,t)$ n'est pas la configuration qui minimise $F[\varphi]$, le champ $\varphi(x,t)$ relaxe vers la configuration d'équilibre. Nous supposons que cette relaxation peut être décrite par l'équation suivante :

$$\eta \dot{\varphi}_t = \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{df}{d\varphi} \quad (213)$$

où η est l'analogie d'une viscosité. Discuter en fonction du résultat des questions précédentes la signification physique de ce postulat.

- (3) Lorsqu'on s'écarte de la position d'équilibre φ_1 , on pose :

$$\varphi = \varphi_1 + \delta\varphi e^{i(kx - \omega t)} \quad (214)$$

En développant $f(\varphi)$ au deuxième ordre au voisinage de φ_1 , montrer que :

$$i\omega = \frac{\lambda}{\eta} \left[k^2 + \frac{1}{\lambda} f''(\varphi_1) \right] \quad (215)$$

- (4) Quelle est la condition sur $f''(\varphi_1)$ pour que cet état soit stable? On fera attention aux fluctuations du paramètre d'ordre de grandes longueurs d'onde.
- (5) Nous nous intéressons au problème d'une paroi *stationnaire* entre deux domaines où le champ $\varphi(x,t)$ minimise l'énergie libre (212). On supposera les conditions :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x,t) &= \varphi_1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x,t) &= \varphi_2 \end{aligned} \quad (216)$$

Montrer :

$$\frac{\lambda}{2} \varphi'^2(x) = f(\varphi) + C \quad (217)$$

Déterminer la constante C en fonction des données du problème lorsqu'il y a un équilibre stationnaire et utiliser une analogie mécanique pour discuter votre résultat. On désignera par $\varphi_0(x)$ la solution du problème stationnaire.

- (6) Nous nous intéressons maintenant au problème d'une paroi *mobile* avec une vitesse constante c . On cherche une solution sous la forme d'une ONDE PROGRESSIVE :

$$\varphi(x,t) = \tilde{\varphi}(x - ct) \quad (218)$$

Quelle est l'équation différentielle à laquelle satisfait $\tilde{\varphi}(\xi = x - ct)$? Pour répondre à cette question, il sera utile de faire le changement de variable $\xi = x - ct$ et d'en déduire l'équation différentielle ordinaire à laquelle obéit le paramètre d'ordre.

(7) En déduire la relation exacte :

$$\eta c \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}'^2 dx = f_2 - f_1 \quad (219)$$

(8) Nous nous plaçons dans le cas d'une paroi mobile. Supposons que φ soit bien approximée par son profil stationnaire φ_0 . Montrer que la vitesse est alors donnée par :

$$c = \frac{\lambda}{\eta\gamma} \quad (220)$$

où

$$\gamma = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}'^2 dx \quad (221)$$

(9) Dans la suite du problème, nous supposons un système bi-dimensionnel repéré par ses coordonnées cartésiennes (x,y) ou polaire (r,θ) . Nous considérons un germe de rayon R , $\varphi = \varphi_1$, dans une matrice infinie avec $\varphi = \varphi_2$. Montrer que la fonctionnelle (212) devient ici :

$$F[\varphi] = \int dr r \left[\frac{1}{2} \lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + f(\varphi) \right] \quad (222)$$

Quelle est l'équation différentielle à laquelle satisfait $\varphi(r)$ si nous supposons un état stationnaire?

(10) Montrer que dans le cas stationnaire :

$$\lambda \int_0^{+\infty} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 = f_2 - f_1 \quad (223)$$

(11) Nous nous intéressons au problème d'un interface de forme quelconque. Nous introduisons une coordonnée z qui donne la distance suivant la normale. Nous admettons la formule suivante :

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (224)$$

où R est le rayon de courbure de l'interface. Cette formule généralise le laplacien en coordonnées polaires. Montrer qu'à l'équilibre stationnaire :

$$f_2 - f_1 = \frac{\gamma}{R} \quad (225)$$

qui est la loi de Laplace

(12) En déduire que la vitesse c pour un interface mobile dépend de la courbure par :

$$c = \frac{\lambda}{\eta\gamma} [f_2 - f_1 - \gamma\kappa] \quad (226)$$

(13) On s'intéresse au cas particulier où $f_2 = f_1$. Montrer que la croissance d'un germe de rayon $R(t)$ obéit à la loi :

$$R(t) \propto t^{1/2} \quad (227)$$

Solitons

1. Introduction

La non-linéarité des équations de propagation est un problème difficile mais qui conduit à de nouveaux types de solutions. Dans ce chapitre, nous étudions quelques solutions de type SOLITON. Ces ondes sont des ondes progressives à une vitesse v qui peut être arbitraire. On peut les visualiser comme une paroi de domaine se propageant dans la direction de leur normale.

2. Équation de Sine-Gordon

Considérons à nouveau la chaîne d'aiguilles couplées entre elles par une interaction de torsion. Rappelons le Lagrangien :

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{1}{2} \rho l^2 \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right]^2 - \frac{1}{2} \sigma \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \right]^2 - \rho g l (1 - \cos \phi) \right] \quad (228)$$

Pour simplifier, posons pour le potentiel :

$$U(\phi) = \rho g r (1 - \cos \phi) \quad (229)$$

ce qui permettra d'avoir des résultats valides, en fait, quelque soit $U(\phi)$. Notons que $U(\phi)$ est périodique car la substitution $\phi \rightarrow \phi + 2\pi$ ne change rien.

En coordonnées réduites, c'est-à-dire en unités appropriées pour ramener toutes les constantes à un, les équations du mouvement sont solutions de l'équation d'Euler :

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial \phi}{\partial x^2} = U'(\phi) \quad (230)$$

qui est une équation aux dérivées partielles non-linéaire car $U'(\phi_1 + \phi_2) \neq U'(\phi_1) + U'(\phi_2)$. Si nous approximons ce potentiel dans la limite des petits angles :

$$U'(\phi) \approx \phi \quad (231)$$

l'équation du mouvement devient une équation linéaire. On dit que les champs sont « libres » et toute solution est la superposition linéaire d'ondes planes :

$$\phi(x,t) = \sum_k A_k \cos(kx - \omega_k t) \quad (232)$$

Ces solutions sont caractérisées par une distorsion de l'angle $\phi(x,t)$ qui couvre la droite réelle sur $[-\infty, +\infty]$ de façon périodique. Toutes les parties de la chaîne voient donc « passer » un train d'onde oscillant et ces ondes sont délocalisées.

2.1. Mise en forme. Considérons maintenant le cas non-linéaire. Nous allons montrer qu'il existe une onde PROGRESSIVE qui se propage à la vitesse v . Cette solution interpole entre deux limites asymptotiques pour $x \rightarrow \pm\infty$ avec une différence de $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x,t) = 0 \ [2\pi], \forall t. \quad (233)$$

Pour chercher ces solutions qui s'apparentent à une paroi mobile, nous cherchons les solutions sous la forme :

$$\phi(x,t) = f(x - vt) \quad (234)$$

avec le seul argument naturel :

$$\xi = x - vt \quad (235)$$

qui contient à la fois la coordonnée d'espace x et celle de temps t . Les conditions aux limites deviennent alors :

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \phi(x,t) = \phi_{\pm\infty} \quad (236)$$

L'équation aux dérivées partielles devient alors une équation différentielle ordinaire :

$$(1 - v^2) \frac{d^2 f}{d\xi^2} = U'(f) \quad (237)$$

qui devient en multipliant par $df/d\xi$:

$$(1 - v^2) \frac{d^2 f}{d\xi^2} \frac{df}{d\xi} = U'(f) \frac{df}{d\xi} \Rightarrow \frac{1}{2} (1 - v^2) \left(\frac{df}{d\xi} \right)^2 = U(f) + C \quad (238)$$

où C est une constante d'intégration qui est déterminée en fonction des conditions aux limites.

Nous cherchons des solutions dont l'énergie est finie. Mais :

$$\mathcal{E} = \int dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + U(\phi) \right] \quad (239)$$

et donc :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (240)$$

pour que l'intégrale converge avec :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} U(\phi) = 0 \Rightarrow \phi_{\pm\infty} = 2k\pi, k \in Z. \quad (241)$$

Ce qui permet de démontrer que $C = 0$ dans (238). Posons :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (242)$$

où $v < 1$. Nous verrons dans l'exercice suivant qu'il est toujours possible de trouver des solutions pour $v > 1$ (appelées tachyons), mais celles-ci s'avèrent instables (elles se désagrègent très rapidement en plusieurs solutions avec $v < 1$). On remarque l'allure relativiste de ces solutions, car $v = 1$ fixe une borne supérieure que l'onde ne peut pas dépasser. Donc :

$$\frac{df}{(2U(f))^{1/2}} = \pm \gamma d\xi \quad (243)$$

qui permet d'avoir $\xi(f)$ et donc $f(\xi)$. L'Éq. (243) est donc la solution de l'onde. Celle-ci peut encore s'écrire :

$$\int^f \frac{du}{(2U(u))^{1/2}} = \pm \gamma (\xi - \xi_0) \quad (244)$$

2.2. Comportement asymptotique : soliton et anti-soliton. Pour connaître les solutions, il est utile de développer $U(\phi)$ au voisinage d'un minimum qui peut être

$$\phi_0 = 0, 2\pi, \dots, 2k\pi \quad (245)$$

L'important est que la différence des valeurs de $\phi(x, t)$ en $\pm\infty$ soit un multiple de 2π .

Au voisinage d'un minimum ϕ_0 :

$$U(u) \approx \frac{1}{2} U''(\phi_0) (u - \phi_0)^2 \quad (246)$$

D'où :

$$\pm \gamma (\xi - \xi_0) \approx \int^f \frac{du}{(U''(\phi_0) (u - \phi_0)^2)^{1/2}} \quad (247)$$

d'où :

$$\pm \gamma (\xi - \xi_0) \approx \pm \frac{\ln(|f - \phi_0|)}{[U''(\phi_0)]^{1/2}} \quad (248)$$

qui implique un comportement exponentiel au voisinage des deux asymptotes :

$$|f(\xi) - \phi_0| \approx e^{\pm \gamma [U''(\phi_0)]^{1/2} (\xi - \xi_0)}, \text{ avec } \xi \rightarrow \pm\infty \quad (249)$$

CONCLUSION : Nous avons deux types d'onde suivant le \pm .

- (1) Le « kink » où la solution « monte » de 0 à 2π .
- (2) L'« anti-kink » qui va de 2π à 0.

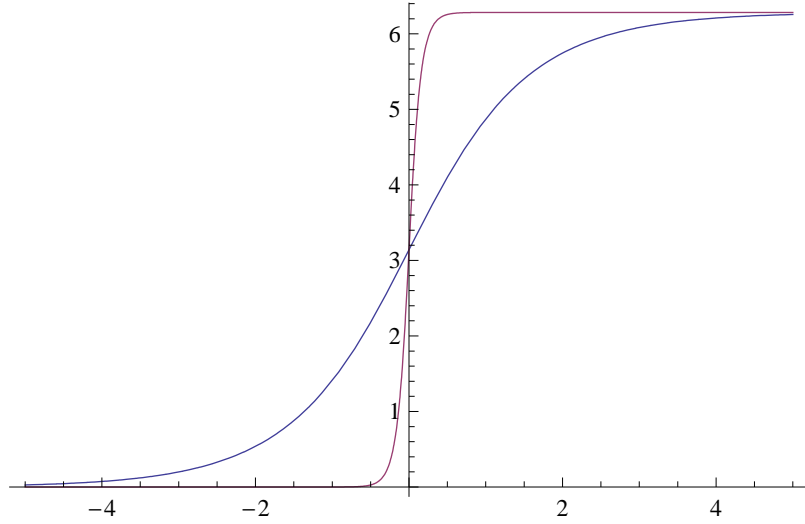


FIG. 1. Solution de type « kink » pour deux valeurs de γ . On remarque que la pente à l'origine (ξ_0 dans le texte) croît avec γ . Le soliton transporte donc une énergie infinie lorsque γ tend vers l'infini (ou $v \rightarrow 1^-$), ce qui fixe une valeur limite à la vitesse v .

2.3. Solution exacte interpolant entre 0 et 2π . En fait, nous pouvons intégrer pour avoir la solution exacte lorsque l'expression du potentiel est suffisamment simple. Pour le cas qui nous intéresse :

$$U(u) = 1 - \cos u \quad (250)$$

et

$$\int_{\pi}^f \frac{du}{\sqrt{2}(1 - \cos u)^{1/2}} = \int_{\pi/2}^{f/2} \frac{du}{\left[\frac{1}{2}(1 - \cos 2u)\right]^{1/2}} = \int_{\pi/2}^{f/2} \frac{du}{\sin u} = \ln \left[\tan \frac{f}{4} \right] \quad (251)$$

Nous avons donc les deux solutions :

$$\phi_{\text{kink}}(x,t) = 4 \arctan [\exp [\gamma (x - vt - \xi_0)]] \quad (252)$$

$$\phi_{\text{anti-kink}}(x,t) = 4 \arctan [\exp [-\gamma (x - vt - \xi_0)]] \quad (253)$$

dont le domaine de variation principal est fixé par le paramètre γ . Plus la vitesse v de l'onde s'approche de 1, plus γ est grand et, donc, plus grande est la valeur de la pente en ξ_0 où l'angle est fixé à π . On s'attend donc à ce que l'énergie transportée par l'onde croisse avec la vitesse v et qu'elle diverge lorsque $v \rightarrow 1$.

2.4. Calcul de l'énergie. Pour calculer l'énergie d'un soliton, ré-écrivons :

$$\mathcal{E} = \int dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + U(\phi) \right] \quad (254)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{1}{2\gamma^2} \left(\frac{df}{d\xi} \right)^2 + U(f) \right] \quad (255)$$

Mais :

$$\left(\frac{df}{d\xi} \right)^2 = 2\gamma^2 U(f) \text{ ou } U(f) = \frac{1}{2\gamma^2} \left(\frac{df}{d\xi} \right)^2 \quad (256)$$

Comme

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right] = \left(1 - \frac{1}{2\gamma^2} \right) \left(\frac{df}{d\xi} \right)^2 \quad (257)$$

D'où :

$$\mathcal{E}_{\text{kink}} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \left[\frac{df}{d\xi} \right]^2 = \gamma \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{df}{d\xi} (2U(f))^{1/2} \quad (258)$$

$$= \gamma \int_{\phi_{-\infty}}^{\phi_{+\infty}} (2U(f))^{1/2} df \quad (259)$$

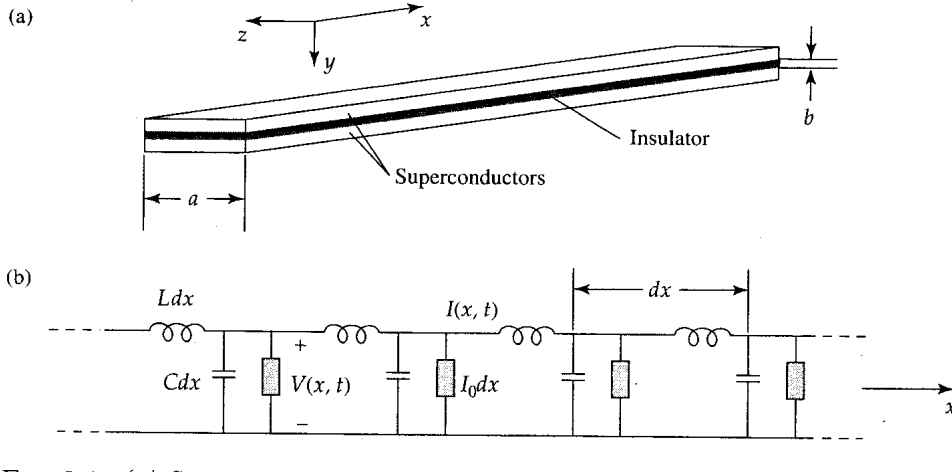
car, dans la dernière intégrale, nous pourrions intégrer sur f et non sur ξ . Pour calculer l'énergie, nous n'avons donc pas besoin de connaître la solution exacte ! Il suffit de connaître les deux valeurs du champ lorsque $\xi \rightarrow \pm\infty$.

Pour $U(f) = 1 - \cos f = 2 \sin^2 f/2$, on trouve :

$$\mathcal{E}_{\text{kink}} = 2\gamma \int_0^\pi \sin u \, du = 4\gamma \quad (260)$$

qui diverge bien lorsque v approche 1 par valeur inférieure.

EXERCICE 2.1. D'après A. Scott. Nous considérons la ligne de transmission supraconductrice de la figure ci-dessous. Un matériau isolant est pris en sandwich entre deux couches supraconductrices. Nous supposons que ce dispositif peut être schématisé par un circuit électrique équivalent où L est l'inductance et C la capacitance par unité de longueur.



Nous admettrons que les équations de conservation du flux magnétique et celle de la charge électrique conduisent au système suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= -L \frac{\partial I}{\partial x t} \\ \frac{\partial I}{\partial x} &= -C \frac{\partial V}{\partial t} - I_0 \sin \phi \end{aligned} \quad (261)$$

où V est la d.d.p. aux bornes de l'isolant. Le terme $I_0 \sin \phi$ représente la transmission Josephson au travers de l'isolant et il est d'origine quantique. La phase ϕ est celle de la fonction d'onde supraconductrice macroscopique et elle est reliée à V par :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{2e}{\hbar} V \quad (262)$$

où e est la charge électrique d'un électron (remarquer le facteur 2).

(1) Montrer que :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{2eL}{\hbar} I \quad (263)$$

(2) Montrer que :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{1}{\lambda_J^2} \sin \phi \quad (264)$$

où on donnera c et λ_J .

(3) En déduire en renormalisant les distances et le temps par des facteurs appropriés que l'équation de propagation se ramène à :

$$u_{xx} - u_{tt} = \sin u \quad (265)$$

(4) Introduire la solution de propagation d'une onde $u(x, t) = \tilde{u}(x - vt)$ et montrer

$$\frac{1}{2} (1 - v^2) [\tilde{u}']^2 = A - \cos u \quad (266)$$

(5) En déduire que la solution est :

$$u(x,t) = 4\text{Arctang} \left[e^{\pm \left(\frac{x-vt-x_0}{\sqrt{1-v^2}} \right)} \right] \quad (267)$$

à condition que $v^2 < 1$.

(6) Montrer que cette équation est invariante sous la substitution :

$$(x,t) \rightarrow (\xi,\tau) \quad (268)$$

avec :

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \\ \tau &= \frac{\tau - vx}{\sqrt{1 - v^2}} \end{aligned} \quad (269)$$

Déterminer la pente à l'origine et montrer que celle-ci tend vers l'infini quand $v \rightarrow 1^-$.

(7) Dessiner ces solutions pour différentes valeurs de v et comparer les domaines de variation lorsque $v \rightarrow 1^-$.

(8) Ces solutions ne sont possibles que si $|v| < 1$. Montrer que

$$u(x,t) = 4\text{Arctang} \left[e^{\pm \left(\frac{x-vt-x_0}{\sqrt{v^2-1}} \right)} \right] + \pi \quad (270)$$

est solution pour $|v| > 1$. Ces solutions sont instables (ne pas démontrer).

(9) Nous désirons étudier les solutions périodiques

$$\tilde{u}(\theta) = \tilde{u}(\theta + 2\pi) \text{ Mod } 2\pi \quad (271)$$

où $\theta = \omega t - \beta x$ avec une valeur local pour la vitesse $v = \omega/\beta$.

(a) Supposer $A > 1$ et $|v| < 1$. Montrer :

$$\sqrt{\beta^2 - \omega^2} \int^{\tilde{u}} \frac{dy}{\sqrt{2(A - \cos y)}} = \theta \quad (272)$$

La variation de \tilde{u} est-elle monotone avec θ ?

(b) En utilisant la même démarche, démontrer que la solution $1 > A > -1$ oscille.

3. Solutions multi-solitons et transformation de Bäcklund

Nous nous intéressons à l'équation de Sine-Gordon et nous montrons qu'il existe une transformation permettant de ramener le problème de la recherche des solutions « multi-solitons » à une algèbre. Cette approche permet de construire une par une toute les familles de solitons.

Introduisons les nouvelles variables:

$$\begin{aligned} x_+ &= \frac{1}{2}(x + t) \\ x_- &= \frac{1}{2}(x - t) \end{aligned} \quad (273)$$

D'où les dérivées partielles :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_+} &= \frac{\partial t}{\partial x_+} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial x_+} \frac{\partial}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned} \quad (274)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_-} &= \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_- \partial x_+} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (275)$$

D'où l' équation du mouvement équivalente à l'équation de Sine-Gordon :

$$\partial_+ \partial_- \phi = \sin \phi \quad (276)$$

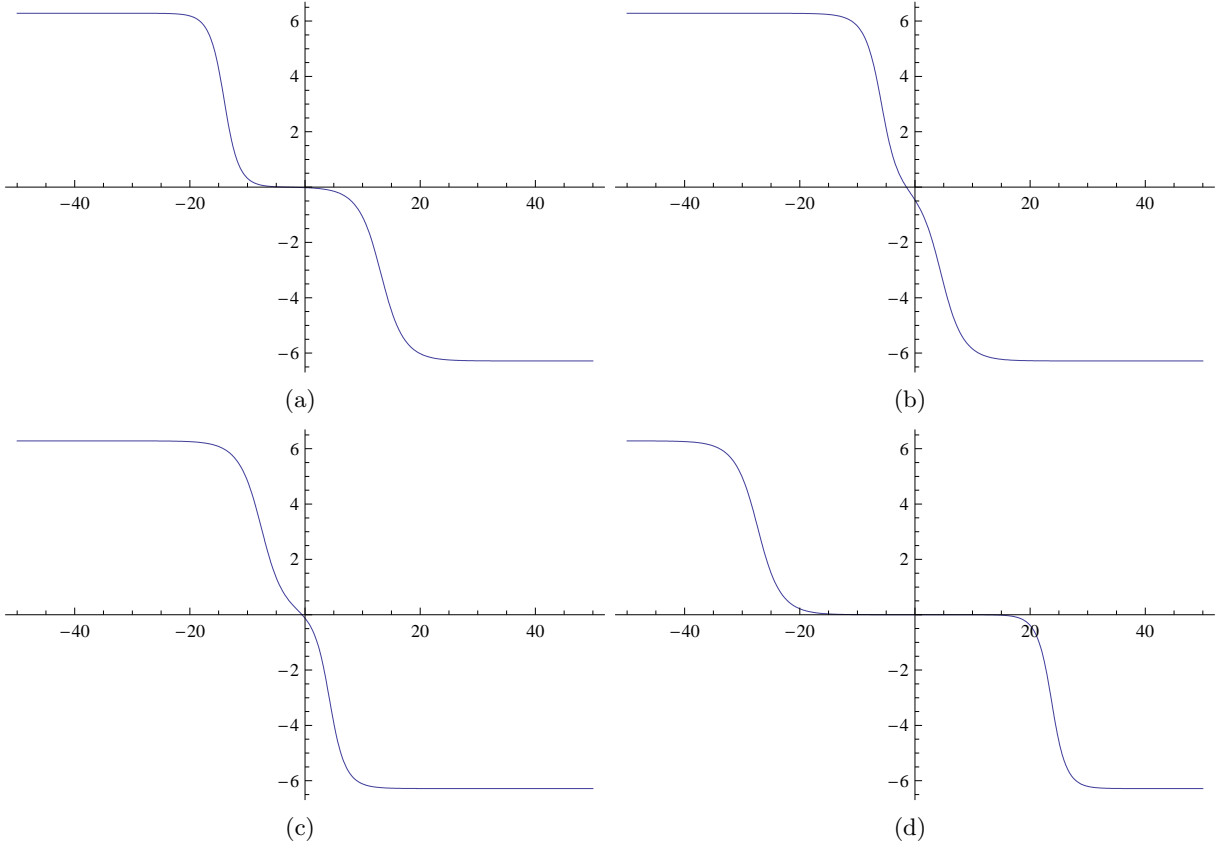


FIG. 2. *Solution OSCILLANTE à deux solitons se propageant à des vitesses de signe opposé ($t = -100, -10, 10, 100$).*

Considérons maintenant le système d'équation différentielle du 1^{er} ordre suivant où les inconnues sont ϕ_0 et ϕ_1 .

$$\begin{aligned} \partial_+ \left[\frac{\phi_1 - \phi_0}{2} \right] &= a \sin \left[\frac{\phi_1 + \phi_0}{2} \right] \\ \partial_- \left[\frac{\phi_1 + \phi_0}{2} \right] &= \frac{1}{a} \sin \left[\frac{\phi_1 - \phi_0}{2} \right] \end{aligned} \quad (277)$$

où a est un nombre réel.

Supposons maintenant que (ϕ_0, ϕ_1) soit solution de ce système. Utilisant la première équation :

$$\partial_- \partial_+ \left[\frac{\phi_1 - \phi_0}{2} \right] = \cos \left[\frac{\phi_1 + \phi_0}{2} \right] \sin \left[\frac{\phi_1 - \phi_0}{2} \right] \quad (278)$$

Et en utilisant la seconde :

$$\partial_- \partial_+ \left[\frac{\phi_1 + \phi_0}{2} \right] = \sin \left[\frac{\phi_1 + \phi_0}{2} \right] \cos \left[\frac{\phi_1 - \phi_0}{2} \right] \quad (279)$$

D'où :

$$\partial_- \partial_+ \left[\frac{\phi_1 - \phi_0}{2} + \frac{\phi_1 + \phi_0}{2} \right] = \partial_+ \partial_- \phi_1 = \sin \phi_1 \quad (280)$$

EN CONCLUSION : Si (ϕ_0, ϕ_1) sont solutions du système (277), alors (ϕ_0, ϕ_1) sont aussi solution de l'équation de Sine-Gordon. Nous avons donc trouvé l'équivalent d'une intégrale première, car l'équation de Sine-Gordon est une équation du 2^e ordre, alors que le système (277) est un système du 1^{er} ordre.

Cette propriété peut alors être utilisée pour construire une solution à partir d'une solution déjà connue : Supposons que nous connaissions ϕ_0 , alors l'Eq. (277) est une équation pour ϕ_1 qui dépend de ϕ_0 . Nous notons :

$$\phi_1 = B_a(\phi_0) \quad (281)$$

où B_a est une application qui à ϕ_0 associe ϕ_1 . D'après ce qui précède, $B_a(\phi_0)$ est solution de l'équation de Sine Gordon.

NOTE. Il est utilisé d'illustrer cette propriété en prenant ϕ_0 identiquement nul (qui est solution de Sine-Gordon). Nous allons déterminer ϕ_1 à partir du système (277).

Si $\phi_0 = 0$, nous avons :

$$\begin{aligned}\partial_+ \phi_1 &= 2a \sin \frac{\phi_1}{2} \\ \partial_- \phi_1 &= \frac{2}{a} \sin \frac{\phi_1}{2}\end{aligned}\tag{282}$$

Nous changeons maintenant de variable :

$$\begin{aligned}\xi &= ax_+ + \frac{1}{a}x_- \\ \eta &= ax_+ - \frac{1}{a}x_-\end{aligned}\tag{283}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\partial_\xi \phi_1 &= 2 \sin \frac{\phi_1}{2} \\ \partial_\eta \phi_1 &= 0\end{aligned}\tag{284}$$

qui redonne la solution connue

$$\tan \frac{\phi}{4} = \exp[\xi - \xi_0] = \exp[\gamma(x - vt - \xi_0)]\tag{285}$$

avec :

$$v = \frac{1/a - a}{1/a + a}\tag{286}$$

Donc $B_1(\phi_0)$ est la solution à un soliton de l'équation de Sine-Gordon.

En règle générale, il sera utile d'utiliser le théorème suivant dû à Bianchi (donné ici sans démonstration).

Si :

$$\begin{aligned}\phi_1 &= B_{a_1}[\phi_0] \\ \phi_2 &= B_{a_2}[\phi_0]\end{aligned}\tag{287}$$

Alors, les opérations commutent :

$$\phi_3 = B_{a_2}[\phi_1] = B_{a_1}[\phi_2]\tag{288}$$

avec :

$$B_{a_1} \circ B_{a_2} = B_{a_2} \circ B_{a_1}\tag{289}$$

On démontre de plus :

$$\tan \frac{\phi_3 - \phi_0}{4} = \frac{a_2 + a_1}{a_2 - a_1} \tan \left[\frac{\phi_2 - \phi_1}{4} \right]\tag{290}$$

C'est précisément cette égalité qui a été utilisée pour construire la solution oscillante de la figure (2) en utilisant $\phi_0 = 0$ et deux solutions de type soliton pour ϕ_1 et ϕ_2 . En conclusion, l'égalité (290) permet de déterminer explicitement une solution à partir de deux autres solutions.

Théorie des ondes : approche linéaire

1. Position du problème

L'équation d'une onde est une équation aux dérivées partielles où les variables sont des variables de temps et d'espace. Suivant l'ordre de la dérivée par rapport au temps, on rencontre les cas suivants :

- L'équation de chaleur qui est une équation PARABOLIQUE :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \quad (291)$$

- L'équation d'onde qui est une équation HYPERBOLIQUE :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u \quad (292)$$

- L'équation de Laplace (équation ELLIPTIQUE) :

$$\Delta u = 0 \quad (293)$$

Pour un système linéaire, si $u_1(x,t)$ et $u_2(x,t)$ sont solutions alors la combinaison $Au_1(x,t) + Bu_2(x,t)$ est aussi solution. Dans le cas d'un système non-linéaire, cette propriété est évidemment fautive. C'est le cas, par exemple, de l'équation de Sine-Gordon :

$$u_{xx} - u_{tt} = \sin u \quad (294)$$

qui représente en coordonnées réduite un système de pendules couplés par la torsion.

Nous considérons désormais un système linéaire, par exemple l'équation d'onde (292). On cherche une solution sous la forme d'une onde PROGRESSIVE :

$$u(x,t) = \tilde{u}(x - vt) \quad (295)$$

où v est la vitesse. Après avoir substitué dans (292) :

$$\tilde{u}'' \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = 0 \Rightarrow v = \pm c \text{ si } \tilde{u}'' \neq 0 \quad (296)$$

Le cas $\tilde{u}'' = 0$ n'étant pas passionnant, nous prendrons $v = c$.

On vérifie que la solution générale est la somme de deux ondes progressives se propageant en sens opposé :

$$u(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt) \quad (297)$$

où les fonctions f et g sont ARBITRAIRES : ce sont les conditions initiales qui déterminent les solutions !

On suppose que les fonctions $F(x)$ et $G(x)$ sont connues. Celles-ci fixent les conditions initiales sur la solution et sur sa dérivée par rapport au temps. Posons :

$$\begin{cases} u(x,0) &= F(x) \\ u_t(x,0) &= G(x) \end{cases} \quad (298)$$

D'où :

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= F(x) \\ -cf'(x) + cg'(x) &= G(x) \end{aligned} \quad (299)$$

Ces deux équations permettent de déterminer la solution unique comme :

$$u(x,t) = \frac{1}{2c} \{ (cF(x - ct) - H(x + ct)) + (cF(x - ct) + H(x - +ct)) \} \quad (300)$$

où $H(y)$ est une primitive de $G(y)$:

$$H(y) = \int^y du G(u) \quad (301)$$

2. Relation de dispersion

Théorie des champs électriques comme théorie de jauge

1. Corde de Dirac

Nous considérons un solénoïde infini parcouru par un courant. À l'intérieur du solénoïde, le champ est constant:

$$\vec{B} = (0,0,B_0) \quad (302)$$

avec un potentiel vecteur

$$\vec{A} = \frac{B_0}{2}(-y,x,0) = \frac{1}{2}\vec{B} \wedge \vec{r} \quad (303)$$

à une transformation de jauge près.

À l'extérieur du solénoïde, le champ est nul. Mais le potentiel vecteur n'est pas nul! En effet, le flux à travers une surface fermée s'appuyant sur un contour Γ est

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dA = \pi a^2 B_0 \quad (304)$$

Pour chaque contour Γ , nous pouvons calculer le flux à partir de la règle d'Ampère:

$$\Phi = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (305)$$

Donc, \vec{A} ne peut être nul à l'extérieur du solénoïde. L'expression de \vec{A} est connue. Comme \vec{A} est continu en $rho = a$:

$$\begin{aligned} \vec{A}_{in} &= \frac{B_0}{2}(-y,x,0) \\ \vec{A}_{out} &= \frac{B_0}{2} \frac{a^2}{x^2 + y^2}(-y,x,0) \end{aligned} \quad (306)$$

En raison de (304), le potentiel vecteur \vec{A} ne peut pas être nul partout en-dehors du solénoïde. On ne peut pas trouver une transformation de jauge:

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \cdot \chi(r) \quad (307)$$

qui rende \vec{A} strictement nul en dehors du solénoïde. Peut-on trouver une transformation qui fasse que \vec{A} soit nul PRESQUE partout? oui!

Considérons la fonction:

$$\phi(x,y) = \arctan \frac{y}{x} \quad (308)$$

avec:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= +\frac{x}{x^2 + y^2} \end{aligned} \quad (309)$$

Donc, la transformation de jauge:

$$\chi(r,t) = -\frac{B_0 a^2}{2} \phi(x,y) \quad (310)$$

transforme le potentiel vecteur comme:

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \chi = \vec{0} \quad (311)$$

qui est nul! Comme celui-ci ne peut être nul partout, le potentiel vecteur doit être singulier quelque part!

En fait :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x - \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = 2\pi \quad (312)$$

en raison de la coupure sur la demi-droite $] -\infty, 0]$ (la corde de Dirac). Cette coupure introduit une singularité de type $\delta(x)$ et bien que \vec{A} soit nul presque partout, l'intégrale

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (313)$$

est non nulle. L'effet Aharonov-Bohm permettra de discuter ce point dans le contexte des supraconducteurs.

2. Interaction champ - particule

Nous avons introduit un potentiel de jauge $A_0^\alpha = (\phi_0, \vec{A})$ décrivant le champ électromagnétique. Le même champ électromagnétique est décrit avec le potentiel $A^\alpha = A_0^\alpha + \partial^\alpha \chi$ (attention au changement de signe entre les dérivées temporelles et spatiales). Un changement de jauge modifie donc le potentiel sans changer la force de Lorentz.

Nous nous plaçons pour l'instant dans un contexte classique (par opposition à une situation quantique). Une particule interagit avec un champ \vec{E}, \vec{B} et il existe donc une force de Lorentz : $q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$. Si le champ est produit par un solénoïde infini de rayon a , le champ est nul à l'extérieur, mais il prend la valeur B_0 à l'intérieur. Même si le champ est nul à l'extérieur, le potentiel vecteur, quant à lui, est non-nul :

$$\vec{A} = \frac{1}{2} B_0 a^2 \frac{1}{x^2 + y^2} (-y, x, 0) \quad (314)$$

et on ne peut pas se débarrasser de \vec{A} par une transformation de jauge qui annulerait \vec{A} dans tout l'espace.

Question : existe-t-il un effet associé au mouvement de la particule en-dehors du solénoïde ? Peut-on distinguer la situation avec et sans courant ?

Cet effet, si il existe (et il existe !), ne peut pas être un effet décrit par la mécanique classique. Cet effet quantique, appelé effet Bohm-Aharonov est un effet quantique lié à la phase de la fonction d'onde $\psi(r, t)$ où $|\psi(r, t)|^2$ est la densité de probabilité de trouver la particule en r à t .

3. Propagateur

Nous considérons l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) \right) \psi(r, t) \quad (315)$$

Au lieu d'écrire « probabilité de trouver une particule », nous préférons « probabilité d'observer l'évènement » qui caractérise mieux une expérience d'interférence. Dans l'expérience des fentes d'Young, l'évènement est l'observation de l'impact sur l'écran dû à la particule. Cet évènement est décrit par une amplitude $\phi(x)$ (x est la coordonnée qui permet de repérer le détecteur sur l'écran). Cette amplitude est la somme des amplitudes des deux chemins élémentaires qui interviennent en parallèle, car la particule a la possibilité de passer par les deux fentes :

$$\phi(x) = \phi_1(x) + \phi_2(x) \quad (316)$$

Si un évènement peut être décomposé en une série d'évènements intervenant de façon séquentielle, nous aurions $\phi(x) = \phi_1(x)\phi_2(x)$. La règle de la somme des amplitudes pour des évènements intervenant en parallèle est à l'origine des interférences.

Revenons maintenant à l'équation de Schrödinger. Nous désirons connecter l'amplitude d'observer la particule en r_1 à t_1 avec celle de l'observer en r_2 à t_2 . Soit :

$$K(r_2, t_2; r_1, t_1) \quad (317)$$

l'amplitude de probabilité que la particule soit observée en r_2 à t_2 SACHANT qu'elle était en r_1 à t_1 . Par définition $K(\dots)$ est une amplitude de probabilité conditionnelle. Nous avons la relation

$$\phi(r_2, t_2) = \int dr_1 K(r_2, t_2; r_1, t_1) \phi(r_1, t_1) \quad (318)$$

ce qui revient à sommer sur toutes les amplitudes de probabilité sachant que la particule était quelque part en t_1 . Cette équation est équivalente à l'équation de Schrödinger, car elle contient la même information, à partir du moment où on connaît la forme du propagateur $K(\dots)$.

4. Propagateur de Feynman

Dans l'espace (r,t) (en une dimension, on écrit (x,t)) on se donne deux points $A(r_1,t_1)$ et $B(r_2,t_2)$. Dans cet espace, un chemin est une ligne continue, dérivable, mais sans auto-intersection entre les points $A(r_1,t_1)$ et $B(r_2,t_2)$. Soit Γ un chemin et $\phi_\Gamma(B|A)$ l'amplitude de probabilité qu'une particule suive ce chemin particulier. Sommons sur tous les chemins :

$$K(B,A) = \int d\Gamma \phi_\Gamma(B|A) \quad (319)$$

pour définir le propagateur de Feynman. La définition de l'intégrale sur « tous les chemins » est délicate. Pour en donner une, discrétisons le temps sur des intervalles $t_{1,1} = t_1, t_{1,2}, \dots, t_{1,n} = t_2$. En 1d, nous avons donc une suite de positions $x(t_{1,1}), x(t_{1,2}), \dots, x(t_{1,n} = t_2)$. Cette suite étant discrète, nous pouvons développer en coefficient de Fourier. Intégrer sur les chemins revient donc à intégrer sur les coefficients de Fourier qui sont des nombres complexes. On s'est donc ramené à un problème connu.

Le problème est maintenant de trouver $\phi_\Gamma(B|A)$. On POSTULE:

$$\phi_\Gamma(B|A) = e^{\frac{i}{\hbar}S(\Gamma)} \quad (320)$$

où $S(\Gamma)$ est l'action associée au chemin Γ :

$$S(\Gamma) = \int_{t_1}^{t_2} dt L\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \quad (321)$$

avec le principe « démocratique » entre les chemins qui ont même densité de probabilité. Les progateurs ne peuvent donc différer que d'un facteur de phase. D'où la forme exponentielle imaginaire de (335). On a donc :

$$K(r_2,t_2,r_1,t_1) = \int_{x(t_1)=r_1}^{x(t_2)=r_2} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} dt L\left(x, \frac{dx}{dt}\right)\right] \mathcal{D}[x(t)] \quad (322)$$

PROPRIÉTÉ 4.1. *Donnons-nous (x_1,t_1) . Alors $K(\dots)$ est une fonction de (x_2,t_2) . C'est une fonction d'onde, mais celle-ci n'est pas étalée en t_1 car a particule est en x_1 . De :*

$$\phi(x_2,t_2|x_1,t_1) = \int dx_1 K(x_2,t_2|x_1,t_1) \phi(x_1,t_1) \quad (323)$$

on a :

$$\phi(x_2,t_1|x_1,t_1) = \int dx_1 K(x_2,t_1|x_1,t_1) \phi(x_1,t_1) \quad (324)$$

D'où :

$$K(x_2,t_1,x_1,t_1) = \delta(x_2 - x_1) \quad (325)$$

Comme $K(\dots)$ est une fonction d'onde, $K(\dots)$ satisfait aussi à une équation de convolution :

$$K(x_3,t_3,x_1,t_1) = \int dx_2 dt_2 K(x_3,t_3,x_2,t_2) K(x_2,t_2,x_1,t_1) \quad (326)$$

PROPRIÉTÉ 4.2. *En fonction de la forme du propagateur, nous pouvons comparer une situation classique à une situation quantique. Pour une situation classique, seul un chemin compte : c'est celui qui rend l'action extrémale. On note que les variations de l'action sont étalonnées par la valeur numérique de la constante \hbar . Nous dirons qu'une situation classique est une situation où l'ensemble des chemins dont l'action diffère d'un nombre inférieur à π est un ensemble très localisé sur le chemin qui extrémise l'action. Dans le cas d'une situation quantique, c'est le contraire. On peut trouver une chemin très différent de celui qui extrémise l'action, mais qui diffère de celui-ci par une différence de phase très faible. Considérant la forme du propagateur (322), deux chemins différant d'un facteur de phase de π donnent des interférences destructives et ils ne contribuent pas au propagateur. Dans une situation classique, le domaine centré sur le chemin extrémal où l'action varie à l'intérieur d'un intervalle de taille π est petit. Dans une situation quantique, c'est le contraire.*

5. Effet Aharonov-Bohm

Les notions de jauge et de phase sont caractéristiques des effets quantiques. Nous illustrons ici l'effet Aharonov-Bohm où le flux magnétique emprisonné à l'intérieur d'un anneau supra-conducteur est un multiple d'un quantum de flux $2\pi\hbar/q$ avec $q = 2e$.

Un métal comme l'aluminium peut être supraconducteur en-dessous d'une température critique (1.19 K). Nous nous intéresserons ici aux supraconducteurs de type I où un échantillon supraconducteur expulse le champ magnétique du matériau. Cette expulsion a pour origine les courants supraconducteurs de surface qui créent un champ magnétique qui s'oppose au champ magnétique externe. La somme des deux champs est alors nul.

L'état supraconducteur est décrit par un paramètre d'ordre complexe qui est une fonction d'onde macroscopique. Nous pouvons séparer partie réelle et partie imaginaire:

$$\psi(r,t) = |\psi(r,t)|e^{i\phi(r,t)} \quad (327)$$

où la partie réelle est la densité de paire de Cooper. La phase $\phi(r,t)$ dépend de la position. Dans un supraconducteur les paires de Cooper portent une charge $2e$ et nous pouvons trouver le courant à partir de l'équation de continuité (ou conservation du courant):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (328)$$

avec pour densité de charge:

$$\rho = -\psi\bar{\psi} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\bar{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} \quad (329)$$

Pour simplifier cette équation, nous rappelons que la fonction d'onde $\psi(r,t)$ est solution de l'équation de Schrödinger:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \left[\vec{\nabla} + \frac{iq}{\hbar} \right]^2 \psi \quad (330)$$

D'où:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \vec{\nabla} \left[\psi \left(\vec{\nabla} + \frac{iq}{\hbar} \vec{A} \right) - \bar{\psi} \left(\vec{\nabla} - \frac{iq}{\hbar} \vec{A} \right) \right] \quad (331)$$

Ce qui permet de trouver l'expression du courant des paires de Cooper:

$$j_i = \frac{i\hbar}{2m} \left[\bar{D}_i \psi - \psi D_i \bar{\psi} \right] \quad (332)$$

avec la règle du COUPLAGE MINIMAL:

$$D_\alpha = \partial_\alpha - \frac{iq}{\hbar} A_\alpha \quad (333)$$

qui permet de définir toutes les quantités invariantes de jauge:

$$\bar{\psi} D_\alpha \psi; D_\alpha \psi D_\beta \bar{\psi}; \text{ ou } F_{\alpha\beta} D^\alpha \psi D^\beta \bar{\psi} \quad (334)$$

EXERCICE 5.1. Démontrer que si $\rho(r,t)$ est constant alors:

$$j = \frac{\rho\hbar}{2m} \left[\nabla\phi - \frac{qA}{\hbar} \right] \quad (335)$$

Cette expression démontre une propriété essentielle des états supraconducteurs: les GRADIENTS DE PHASE induisent un courant de charge.

Nous considérons maintenant la géométrie d'un anneau supraconducteur. L'échantillon a été préparé dans un champ magnétique externe qui a été ensuite coupé. A l'intérieur de l'anneau, le courant est nul. Utilisant (335), nous avons:

$$\vec{\nabla}\phi - \frac{q\vec{A}}{\hbar} = 0 \quad (336)$$

qui peut être intégré sur un contour Γ autour du trou central de l'anneau. Par la règle d'Ampère, le flux Φ passant par l'anneau est égal à la circulation de \vec{A} :

$$\Phi = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{\hbar}{q} \oint_{\Gamma} \nabla\phi \cdot d\vec{l} \quad (337)$$

La dernière intégrale n'est pas nécessairement nul même en l'absence de champ magnétique. La seule contrainte est l'unicité de la fonction d'onde, mais cette unicité n'implique que la phase de la fonction

d'onde $\phi(r,t)$ soit définie à un facteur 2π près. Rien n'interdit à cette phase de faire un saut de 2π à chaque tour sur le contour Γ (comparer avec la corde Dirac). Cette singularité étant possible, on trouve que le flux Φ à travers l'anneau est quantifié:

$$\Phi = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{\hbar}{q} 2\pi n \quad (338)$$

dont la première observation expérimentale est due à Fairbanks et Dever.

6. Formulation relativiste de l'électromagnétisme

Voici un formulaire nécessaire pour simplifier les notations. On définit la métrique à partir de la matrice :

$$\eta_{\alpha,\beta} = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (339)$$

avec la règle suivante pour la position des indices d'un quadri-vecteur :

$$\begin{aligned} k^\alpha &= (k^0, k^i) = (\omega, \vec{k}) \\ k_\alpha &= \eta_{\alpha\beta} k^\beta = (-\omega, \vec{k}) \end{aligned} \quad (340)$$

On a:

$$S_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} S_{00} & S_{0j} \\ S_{j0} & S_{ij} \end{pmatrix} \quad (341)$$

$$S_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} -S_{00} & -S_{0j} \\ S_{j0} & S_{ij} \end{pmatrix} \quad (342)$$

$$S^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} S_{00} & -S_{0j} \\ -S_{j0} & S_{ij} \end{pmatrix} \quad (343)$$

Pour les dérivées, nous avons :

$$\begin{aligned} \partial_\alpha &= \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) \\ \partial^\alpha \partial_\alpha &= -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \end{aligned} \quad (344)$$

Le tenseur électromagnétique est défini à partir de la matrice 4×4 :

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (345)$$

ou (la plus pratique!):

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha \quad (346)$$

Ce qui permet de réécrire les équations de Maxwell :

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \quad (347)$$

ainsi que l'équation de conservation du courant:

$$\partial_\alpha J^\alpha = 0 \quad (348)$$

EXERCICE 6.1. En utilisant directement (345), démontrer que la densité d'énergie du champ électromagnétique a la forme connue

$$\frac{1}{2} (E^2 + B^2) = \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad (349)$$

7. Le champ de Klein-Gordon

Nous nous donnons deux champs réels, $\phi_1(x)$ et $\phi_2(x)$ et nous supposons que la dynamique de ces champs est donné par la densité Lagrangienne:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 - \frac{1}{2}m^2\phi_1^2 - \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2 - \frac{1}{2}m^2\phi_2^2 \quad (350)$$

où:

$$\partial_\mu\phi_i\partial^\mu\phi_i = -\partial_t^2\phi_i + \Delta\phi_i, i = 1,2 \quad (351)$$

En théorie des champs, m est l'analogie d'une masse. Le champ dont le Lagrangien est (??) est un champ de Klein-Gordon, analogue relativiste d'une particule de spin 0. On remarque le signe $-$ devant la dérivée deuxième par rapport au temps. Les équation du mouvement sont simples:

$$(\partial_\mu\partial^\mu - m^2)\phi_i = 0, i = 1,2 \quad (352)$$

Il existe une notation qui peut être utile. On introduit un champ complexe:

$$\phi(x) = \phi_1(x) + i\phi_2(x), i^2 = -1 \quad (353)$$

et le lagrangien est écrit sous une forme compacte :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\bar{\phi} - \frac{1}{2}m^2\phi\bar{\phi} \quad (354)$$

Comme le montre l'exercice suivant, nous pouvons considérer $\phi(x)$ et $\bar{\phi}(x)$ comme des champs indépendants.

EXERCICE 7.1. Démontrer que les équation d'Euler pour $\phi(x)$ et $\bar{\phi}(x)$ sont équivalentes aux équations d'Euler pour $\phi_i(x), i = 1,2$.

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\phi}} - \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\bar{\phi}]} \right] = 0 \quad (355)$$

8. Théorie des champs chargés électriquement du point de vue de la théorie de jauge

Considérons un champ complexe de Klein-Gordon $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ dont la densité lagrangienne est :

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\bar{\phi} - \frac{1}{2}m^2\phi\bar{\phi} \quad (356)$$

Nous avons vu que le courant

$$J^\mu = i \left(\phi \frac{d\mathcal{L}}{d(\partial_\mu\phi)} - \bar{\phi} \frac{d\mathcal{L}}{d(\partial_\mu\bar{\phi})} \right) = \frac{i}{2} (\phi\partial^\mu\bar{\phi} - \bar{\phi}\partial^\mu\phi) \quad (357)$$

était conservé.

PROPRIÉTÉ 8.1. *Interprétation physique de J^μ : le champ complexe est un champ avec des parties réelles et imaginaires. Une fois quantifié, le champ représentera deux types de particules. On peut en effet envisager la production d'une paire particule-antiparticule (électron-positron):*

$$\gamma \rightarrow e^- + e^+ \quad (358)$$

qui sont toutes les deux chargées. Si le champ ϕ est un champ chargé électriquement, nous souhaitons qu'il représente les deux particules qui interagissent avec le champ de Maxwell.

Nous cherchons à construire un lagrangien d'interaction champ-particule \mathcal{L}_I . Un fois \mathcal{L}_I donné, nous pourrions calculer le lagrangien total:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_{A^\alpha} + \mathcal{L}_I \\ &= -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\bar{\phi} - \frac{1}{2}m^2\phi\bar{\phi} - \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + \mathcal{L}_I \end{aligned} \quad (359)$$

Pour déterminer \mathcal{L}_I nous EXIGEONS que la théorie soit INVARIANTE DE JAUGE:

$$A_\alpha \rightarrow A_\alpha + \partial_\alpha\chi \quad (360)$$

La théorie est invariante de jauge si nous remplaçons les dérivées par les dérivées covariantes:

$$\partial_\alpha \rightarrow \partial_\alpha - ieA_\alpha \quad (361)$$

On rappelle que cette règle est celle du couplage minimal. Par conséquent, si nous utilisons le Lagrangien :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} [(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi] \left[\overline{(\partial^\mu - ieA^\mu)\phi} \right] - \frac{1}{2} m^2 \phi \bar{\phi} - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad (362)$$

Par construction, ce lagrangien est invariant de jauge et il contient un terme d'interaction entre le champ et le potentiel A . Introduisons maintenant une transformation de jauge LOCALE :

$$\begin{cases} \phi(x) & \rightarrow e^{ie\chi(x)} \phi(x) \\ A_\alpha(x) & \rightarrow A_\alpha + \partial_\alpha \chi(x) \end{cases} \quad (363)$$

D'où :

$$\bar{\phi}(x) \rightarrow e^{-ie\chi(x)} \bar{\phi}(x) \quad (364)$$

Nous démontrons que le courant est :

$$J^\mu = \frac{i}{2} \left[\phi \overline{D^\mu \phi} - \bar{\phi} D^\mu \phi \right] \quad (365)$$

qui est une quantité réelle, invariante de jauge par construction, et qui redonne l'expression connue du courant :

$$J^\mu = \frac{i}{2} \left[\phi \overline{\partial^\mu \phi} - \bar{\phi} \partial^\mu \phi \right] \quad (366)$$

en l'absence de champ électromagnétique.

Pour le démontrer, nous utilisons les équations de Maxwell :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} [(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi] \left[\overline{(\partial^\mu - ieA^\mu)\phi} \right] - \frac{1}{2} m^2 \phi \bar{\phi} - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad (367)$$

D'où :

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu A_\alpha]} \right] &= -[\partial_\mu \partial^\mu A^\alpha - \partial^\alpha \partial_\mu A^\mu] \\ &= -\partial_\mu F^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (368)$$

et :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} = \frac{ie}{2} \left[\phi \overline{D^\alpha \phi} - \bar{\phi} D^\alpha \phi \right] \quad (369)$$

qui implique le courant J^μ est conservé (avec la définition de e comme la charge électrique) .

PROPRIÉTÉ 8.2. (1) *Si nous faisons :*

$$A_\alpha \rightarrow A_\alpha + \delta A_\alpha \quad (370)$$

alors :

$$\delta \mathcal{L}_I = J^\alpha(x) \delta A_\alpha(x) \quad (371)$$

comme il se doit.

L'invariance de jauge implique la conservation de la charge. En effet :

$$\partial_\mu F^{\alpha\beta} = -J^\beta \rightarrow \partial_\beta J^\beta = 0 \quad (372)$$

Une symétrie LOCALE implique donc une loi de conservation.

REMARQUE. Nous avons donc établi que la conservation du courant découlait d'une symétrie de jauge. Cette propriété est en fait une conséquence du théorème de Noether. Une transformation de jauge est une opération de symétrie sur la fonction d'onde. La composition des transformation de jauge :

$$\psi(x,t) \rightarrow e^{i\frac{q}{\hbar}\chi_1(x,t)} \psi(x,t) \rightarrow e^{i\frac{q}{\hbar}\chi_2(x,t)} e^{i\frac{q}{\hbar}\chi_1(x,t)} \psi(x,t) = e^{i\frac{q}{\hbar}[\chi_1(x,t)+\chi_2(x,t)]} \psi(x,t) \quad (373)$$

constitue un groupe.

EXERCICE 8.1. Nous rappelons l'équation de conservation du courant :

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \text{ ou } -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (374)$$

On dira que cette équation exprime la conservation de la charge, car la variation locale de densité ρ est compensée par la différence des courants entrant et sortant dans un volume élémentaire (d'où la divergence). Cette équation est généralement démontrée en partant des équations de Maxwell. Ici nous la démontrons à partir d'un principe de symétrie.

En physique des hautes énergies, on considère la réaction où un photon (non chargé) donne un électron et un positon : si la charge est conservée, la particule et l'antiparticule doivent avoir une charge opposée.

$$\gamma \rightarrow e^+ + e^- \quad (375)$$

Dans ce problème, nous construisons une théorie des champs qui contient à la fois une particule et son antiparticule et nous établissons les conditions sous lesquelles la charge est conservée.

- (1) Si nous représentons le champ par un nombre complexe $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ avec ($i^2 = -1$), que peuvent représenter ϕ_1 et ϕ_2 ?
- (2) Nous supposons que la densité Lagrangienne s'écrit :

$$L = -\frac{1}{2} (\overline{\partial_\mu \phi}) (\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi \bar{\phi} + L_I - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad (376)$$

Que représentent chacun des termes ? Expliciter le dernier en fonction des champs électriques \vec{E} et magnétiques \vec{B} (il est nécessaire d'utiliser le formulaire vue en cours).

- (3) On supposera qu'on peut utiliser la règle du couplage minimal où

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - ieA_\mu \quad (377)$$

Donner la densité lagrangienne totale équivalente à (376).

- (4) Démontrer que cette densité est invariante sous le changement de jauge LOCALE :

$$\begin{aligned} \phi(x) &\rightarrow e^{ie\chi(x)} \cdot \phi(x) \\ A_\alpha(x) &\rightarrow A_\alpha(x) + \partial_\alpha \chi(x) \end{aligned} \quad (378)$$

- (5) On remarque que la transformation de jauge de la question précédente est équivalente à faire :

$$\phi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \phi(x) \quad (379)$$

Quelle est la différence par rapport au cas étudié en cours ? Nous avons donc un groupe de symétries continues et locales car la fonction $\chi(x)$ ($x =$ coordonnée espace-temps) dépend de x .

- (6) On rappelle la définition du courant en l'absence de champ :

$$J^\mu = \frac{1}{2} [\phi \partial^\mu \bar{\phi} - \bar{\phi} \partial^\mu \phi] \quad (380)$$

Que devient cette définition en présence d'un champ magnétique ?

- (7) On considère l'action qui peut être décomposée comme

$$S = S_0 + S_{A_\alpha} + S_I(\phi, A_\alpha) \quad (381)$$

Donner la définition de $S_I(\phi, A_\alpha)$ en fonction du courant.

- (8) Comment pouvez-vous démontrer l'équation suivante :

$$\partial_\mu \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu A_\alpha)} = \frac{\partial L}{\partial A_\alpha} \text{ i.e. } \frac{\partial L_I}{\partial A_\alpha} = -\partial_\mu F^{\mu\alpha} \quad (382)$$

Quelle est cette équation ?

- (9) On considère la transformation :

$$\begin{aligned} \phi(x) &\rightarrow e^{ie\epsilon\chi(x)} \cdot \phi(x) = \phi(x) + \epsilon\psi(x) \\ A_\alpha(x) &\rightarrow A_\alpha(x) + \epsilon\partial_\alpha \chi(x) \end{aligned} \quad (383)$$

où nous n'avons pas besoin de savoir quelle est la forme exacte de $\psi(x)$ sinon qu'elle s'annule aux frontières du domaine Ω où est contraint le champ (on choisit l'ensemble des $\chi(x)$ qui satisfont à cette condition). Sachant que la théorie est construite pour être invariante de jauge, nous avons :

$$\frac{dS}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = 0 \quad (384)$$

En déduire :

$$\int_{\Omega} (\partial_\mu J^\mu) \chi(x) d^4x = 0 \quad (385)$$

- (10) Conclure que l'invariance de jauge locale implique la conservation de la charge électrique.

Note : nous n'avons jamais utilisé les équation de Maxwell et nous sommes arrivés à ce résultat uniquement en exigeant une symétrie.

Ondes chimiques et systèmes ouverts à flux de matière ou d'énergie

1. Lois de conservation et quantités conservées

Nous considérons un système sur la droite réelle $-\infty < x < \infty$. Soit Q une quantité CONSERVÉE au cours du temps. Cette quantité ne peut donc être ni créée ni détruite par la dynamique du champ que nous allons considérer. Les espèces chimiques peuvent diffuser de telle sorte que la concentration locale peut varier, mais la quantité de matière totale Q est constante. On définit le flux $j(x,t)$ de cette quantité et sa densité $n(x,t)$.

On a

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} dx n(x,t) \quad (386)$$

L'équation de conservation pour une tranche Δx est écrite comme :

$$\Delta x \frac{d}{dt} n(x + \frac{\Delta x}{2}) = j(x,t) - j(x + \Delta x, t) + O(\Delta x^2) \quad (387)$$

D'où :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0 \quad (388)$$

On retrouve bien que la quantité totale :

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} n(x,t) dx \quad (389)$$

est conservée car

$$\frac{dQ}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\partial n}{\partial t} = - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\partial j}{\partial x} = j(+\infty, t) - j(-\infty, t) = 0 \quad (390)$$

car le flux est nul aux bornes.

Par définition, un système où l'énergie est conservée (ou toute autre quantité) est dit système CONSERVATIF. Il est DISSIPATIF dans tous les autres cas. En particulier, TOUT SYSTÈME LAGRANGIEN EST CONSERVATIF CAR L'ÉNERGIE, C'EST-À-DIRE LA FONCTION DE HAMILTON, EST CONSERVÉE.

Revenons à l'équation de diffusion (388). Nous supposons que les flux sont proportionnels aux gradients de concentration lorsque ceux sont petits. C'est-à-dire :

$$j = -D\nabla n \quad (391)$$

où D est le coefficient de diffusion. L'équation (391) n'est valable que dans le régime linéaire. Dans la littérature anglosaxonne, cette relation de proportionnalité est généralement appelée équation constitutive.

D'où :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\Delta n \quad (392)$$

L'équation (391) est l'équation de diffusion « classique ». On remarque que la dérivée par rapport au temps est d'ordre 1 alors que la dérivée par rapport au temps pour une équation d'onde est d'ordre 2. Il s'agit d'une différence importante qui change le caractère des solutions fondamentales.

Le chapitre précédent a permis d'étudier des ondes solitaires dans les problèmes de mécanique. Ici, nous démontrons l'existence d'ondes propagatives chimiques pour des systèmes diffusifs. Ces ondes sont solutions de l'équation de diffusion où on a rajouté un terme source qui permet des non-linéarités nécessaires à la propagation de ces ondes.

2. Réactions chimiques auto-catalytiques

Il existe de nombreuses réactions chimiques conduisant à des cinétiques non-linéaires. Considérons le cas où une espèce u réagit avec une espèce z pour donner u :



Autrement dit, lorsque z rencontre u , z se transforme en u ! Cette équation est AUTO-CATALYTIQUE, car u est impliqué dans sa propre production.

Nous avons la cinétique

$$\frac{du}{dt} = k_+uz - k_-u^2 \quad (394)$$

En tamponnant la solution chimique, il est possible de maintenir la concentration z constante (en couplant le système à une autre réaction chimique suffisamment rapide). Nous pouvons donc poser $z = 1$. Nous avons donc

$$\frac{du}{dt} = k_+u \left(1 - \frac{k_-}{k_+}u\right) = f(u) \quad (395)$$

où $f(u)$ est un polynôme du deuxième degré.

3. Équation de réaction diffusion

Lorsqu'on étudie la cinétique chimique, on suppose que les concentrations ne dépendent que du temps. Nous nous intéressons maintenant au cas où ces concentrations dépendent du temps ET de l'espace. Pour simplifier, nous supposons une seule coordonnée d'espace x avec une concentration $c(x,t)$.

Le système qui nous intéresse est obtenu à partir de l'équation classique de diffusion $\partial_t c = D\partial_{xx}c$ en rajoutant un terme de source $f(c)$ appelé terme de réaction :

$$\partial_t c = D\partial_{xx}c + f(c) \quad (396)$$

En règle générale, $f(c)$ est une fonction possédant un ou plusieurs zéros décrivant des états d'équilibre. Un grand nombre d'équations tombent dans cette catégorie. Par exemple (dans chaque cas, le facteur k permet de définir une échelle de temps)

- L'équation de Fisher qui généralise l'équation logistique

$$f(c) = kc(1 - c) \quad (397)$$

utilisée pour décrire la diffusion d'un gène dans une population.

- L'équation de Zeldovitch :

$$f(c) = kc^2(1 - c) \quad (398)$$

utilisée en théorie de combustion des flammes.

- Enfin, l'équation bistable de Nagumo :

$$f(c) = kc(c - \alpha)(1 - c) \text{ avec } 0 < \alpha < 1 \quad (399)$$

qui est un modèle simplifié du modèle de Hogkin et Huxley de la propagation du potentiel d'action le long des lignes de transmission du système nerveux, c'est-à-dire les AXONES.

La propriété intéressante des équations de réaction-diffusion de type (393) est qu'elles possèdent des solutions de type front d'onde qui interpolent à vitesse de propagation constante deux états d'équilibre. On a observé, à la fois de façon expérimentale et de façon numérique, que la dynamique non-linéaire globale est capable de sélectionner une vitesse de propagation unique. Le principe même de cette sélection n'est pas établi de façon rigoureuse à ce jour.

Pour illustrer ce point concentrons-nous sur le cas de l'Eq. (396) avec le graphe de $f(c)$ donné par la Fig. 2. En l'absence de diffusion, les deux zéros aux extrémités sont des points fixes stables, alors que celui du milieu est un point fixe instable. Supposons maintenant que $D > 0$ et imposons que la solution soit un front d'onde à vitesse V . Nous cherchons une solution sous la forme d'une onde propagative :

$$c(x,t) = \tilde{c}(\xi - \xi_0) \text{ avec } \xi = x - Vt \quad (400)$$

avec ξ_0 une origine arbitraire. Le problème est donc ramené à chercher la solution d'une équation différentielle et non d'une équation aux dérivées partielles

$$-V\tilde{c}_\xi = D\tilde{c}_{\xi\xi} + f(c) \quad (401)$$

Puisque la dérivée $\tilde{c}'(\xi)$ tend vers 0 lorsque $\tilde{c}(\xi \rightarrow \infty) = 1,0$, nous ESSAYONS que \tilde{c} soit AUSSI solution de la relation fonctionnelle

$$\tilde{c}'(\xi) = B\tilde{c}(\xi)(1 - \tilde{c}(\xi)) \quad (402)$$

où B est une constante à déterminer. En prenant la dérivée de l'Eq.(399)

$$\tilde{c}''(\xi) = B^2c(1 - c)(1 - 2c) \quad (403)$$

nous obtenons

$$DB^2(2\tilde{c} - 1) + VB - k(\tilde{c} - \alpha) = 0 \quad (404)$$

qui est satisfait si et seulement si

$$\begin{aligned} 2DB^2 &= k \\ B^2 - VB &= \alpha k \end{aligned} \quad (405)$$

d'où les conditions pour que les solution de l'Eq. (399) soit solution de l'équation de réaction diffusion (398)

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{\frac{k}{2D}} \\ V &= (1 - 2\alpha)\sqrt{\frac{D}{2k}} \end{aligned} \quad (406)$$

Aussi, il suffit de trouver les solutions de l'Eq. (399) pour avoir les solutions du problème original. Mais (399) est équivalent à

$$\frac{d\tilde{c}}{\tilde{c}(1 - \tilde{c})} = Bd\xi \quad (407)$$

qui est intégré comme

$$\tilde{c}(\xi) = \frac{1}{2} \left[1 + \tanh \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{2D}} (\xi - \xi_0) \right) \right] \quad (408)$$

ce qui permet de déterminer la forme du front de propagation. On remarque que la vitesse est déterminée par le rapport $\sqrt{D/k}$ qui peut être beaucoup plus grand que la constante de diffusion D .

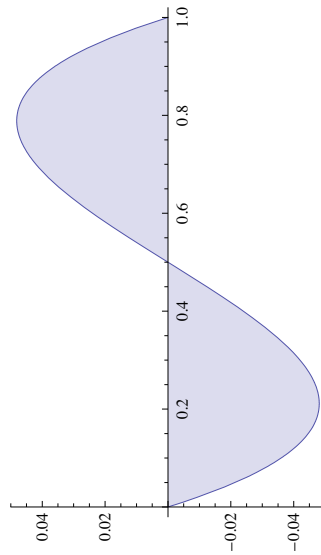


FIG. 1. Graphe de la fonction $f(c)$. La partie grisée représente l'aire sous la courbe et quand cette aire algébrique est nulle, la vitesse V dans l'Eq. (406) donne zéro.

REMARQUE. Il est évident que cette méthode de résolution est astucieuse mais le choix de l'Ansatz (399) est crucial. En règle générale, on ne sait pas intégrer l'Eq. (398) pour une fonction $f(c)$ arbitraire. Une propriété générale peut néanmoins être facilement démontrée en ce qui concerne le signe de la vitesse V .

Multiplions les deux membres de (398) par $\tilde{c}(\xi)$ et intégrons sur la droite réelle entre $-\infty$ et $+\infty$. On trouve que le signe de la vitesse V est déterminé par l'aire sous la courbe de $f(c)$ comme pour la construction de double palier de Maxwell en thermodynamique.

$$\frac{1}{2}V \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \left(\frac{d\tilde{c}}{d\xi} \right)^2 = \int_{c_-}^{c_+} dc f(c) \quad (409)$$

avec c_- et c_+ les deux zéros ordonnés de $f(c)$.

APPLICATION : pour un exemple de système bistable [?] avec imagerie de la propagation du signal de phosphorylation [?]

EXERCICE 3.1. On considère l'équation de diffusion non-linéaire:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = f(u) \quad (410)$$

où la fonction $f(u)$ est définie comme:

$$f(u) = \begin{cases} u & \text{si } u < a \text{ et} \\ u - 1 & \text{si } u > a \end{cases} \quad (411)$$

avec $0 < a < 1$. On désire trouver les solutions $u(x,t)$ sous forme d'onde progressive qui interpollent entre deux points fixes lorsque $x \rightarrow \pm\infty$.

- (1) Quelles sont les limites $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x,t)$ admissibles?
- (2) Démontrer que la vitesse v de ces solutions est :

$$v = \pm (1 - 2a) / \sqrt{a(1 - a)} \quad (412)$$

Pour répondre à cette question on cherchera une solution de (419) sous la forme $\tilde{u}(x - vt)$ et on multipliera l'équation par $\tilde{u}'(\xi)$.

- (3) Trouver les solutions sous la forme $u(x - vt)$. On cherchera les solutions sous la forme $e^{\alpha x}$ pour $u < a$ et $u > a$.

Théorie des Champs Classiques

Examen du mardi 6 janvier 2009

NOTE : IL N'EST PAS CONSEILLÉ DE TROP S'INSPIRER DES NOTES DE COURS QUI PEUVENT NÉANMOINS ÊTRE CONSULTÉES POUR VÉRIFIER CERTAINES FORMULES. CETTE ÉPREUVE CONSISTE À TROUVER LA SOLUTION DE PROBLÈMES TOTALEMENT INDÉPENDANTS.

(1) INSTABILITÉS INTERFACIALES : EXEMPLE DE L'INSTABILITÉ DE RAYLEIGH-TAYLOR

Nous considérons une interface entre deux fluides superposés de densité $\rho_2 > \rho_1$. Le système est plongé dans un champ de gravité g et le fluide le plus lourd est au-dessus du fluide le plus léger. L'interface initialement plane est donc INSTABLE et le but de ce problème est de déterminer la longueur d'onde de modulation de l'interface.

Dans la suite du problème, la côte de cette interface sera repérée par la fonction $\zeta(x)$ où x est la coordonnée parallèle à l'interface plane. On supposera le système invariant sous translation dans la direction y perpendiculaire à la figure et cette coordonnée n'interviendra donc pas dans la suite du problème. On a $0 \leq x \leq L$ avec des conditions périodiques.

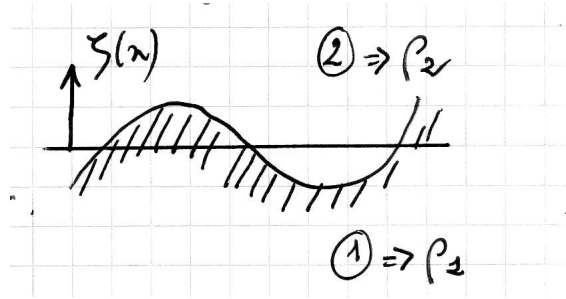


FIG. 2. Schéma du profil de l'interface entre les fluides 1 et 2. Le fluide le plus lourd 2 est au-dessus du fluide le plus léger.

Nous supposons dans la suite du problème qu'il existe une énergie proportionnelle à l'aire totale de l'interface. Cette énergie est l'énergie capillaire et la constante élastique de rappel, appelée tension de surface, sera notée γ :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} \gamma \int_0^L dx \sqrt{1 + \zeta'(x)^2} \quad (413)$$

- (a) L'énergie de gravité pour une tranche d'un fluide quelconque de densité ρ de longueur dx et située entre z et $z + dz$, avec $z \leq \zeta(x)$, est :

$$\rho g z dz \quad (414)$$

Démontrer que la contribution de la gravité à l'énergie totale de l'interface de côte $\zeta(x)$ est :

$$\mathcal{E}_g = \frac{1}{2} (\rho_1 - \rho_2) g \int_0^L dx \zeta(x)^2 \quad (415)$$

- (b) L'énergie totale \mathcal{E} étant la somme $\mathcal{E} = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_g$, montrer que cette énergie est la somme d'un terme qui préfère une interface plane et d'un terme qui tend à déstabiliser l'interface plane.
- (c) Montrer que l'équation qui traduit l'équilibre mécanique entre les deux fluides est :

$$\gamma \frac{\zeta''(x)}{(1 + \zeta'(x)^2)^{3/2}} = (\rho_1 - \rho_2) g \zeta(x) \quad (416)$$

- (d) Commenter ce dernier résultat en fonction des caractéristiques géométriques de l'interface.

- (e) En déduire que la famille des solutions est indiquée par une constante réelle A telle que:

$$\frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_2)g\zeta(x)^2 - \frac{\gamma}{\sqrt{1 + \zeta'^2(x)}} = A \quad (417)$$

- (f) Pour intégrer (414), on se placera dans la limite des petites déformations $\zeta'(x)^2 \ll 1$. Montrer alors que la constante A permet d'indiquer une famille de solutions dont la longueur d'onde est fixée. Pour répondre à cette question, on cherchera une solution sous la forme $C \sin kx$ et on cherchera C et k en fonction de A .
- (g) Nous supposons le système périodique avec période L : $\zeta(x + L) = \zeta(x)$. On peut donc décomposer en série de Fourier :

$$\zeta(x) = \sum_k \tilde{\zeta}_k e^{ikx} \text{ avec } k = \frac{2\pi n}{L}, n \in \mathbf{Z} \quad (418)$$

Nous supposons aussi que l'énergie totale d'une interface faiblement modulée est bien approchée par son approximation quadratique:

$$\mathcal{E} = \frac{\gamma}{2} \int_0^L dx \zeta'^2(x) + \frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_2)g \int_0^L dx \zeta^2(x) \quad (419)$$

En utilisant :

$$\int_0^L dx e^{i(k+k')x} = L\delta_{k+k',0} \quad (420)$$

démontrer :

$$\frac{\mathcal{E}}{L} = \frac{1}{2} \sum_k |\tilde{\zeta}_k|^2 [(\rho_1 - \rho_2)g + \gamma k^2] \quad (421)$$

- (h) En vous appuyant sur une analyse graphique, déterminer une longueur d'onde critique. Comparer votre résultat à celui d'une question précédente.

(2) ÉQUATION DE RÉACTION-DIFFUSION

On considère l'équation de diffusion non-linéaire:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = f(u) \quad (422)$$

où la fonction $f(u)$ est définie comme:

$$f(u) = \begin{cases} u & \text{si } u < a \text{ et} \\ u - 1 & \text{si } u > a \end{cases} \quad (423)$$

avec $0 < a < 1$. On désire trouver les solutions $u(x,t)$ sous forme d'onde progressive qui interpollent entre deux points fixes lorsque $x \rightarrow \pm\infty$.

- (a) Quelles sont les limites $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x,t)$ admissibles?
 (b) Démontrer que la vitesse v de ces solutions est :

$$v = \pm (1 - 2a) / \sqrt{a(1 - a)} \quad (424)$$

Pour répondre à cette question on cherchera une solution de (419) sous la forme $\tilde{u}(x - vt)$ et on multipliera l'équation par $\tilde{u}'(\xi)$.

- (c) Trouver les solutions sous la forme $u(x - vt)$. On cherchera les solutions sous la forme $e^{\alpha x}$ pour $u < a$ et $u > a$.

Index

caténoïde, 11
champ électromagnétique, 15
flexion, 12–14
fonctionnelle, 9, 11, 12, 14
lagrangien, 15
Lagrangien d'une particule chargée dans un champ
électro-magnétique, 15
multiplicateur de Lagrange, 12, 14
potentiels de jauge, 15
rayon de courbure, 12, 14