

COURS DE RHEOLOGIE

Claude Verdier – Directeur de Recherche C.N.R.S.
Laboratoire Interdisciplinaire de Physique - LIPhy, CNRS - Université Grenoble Alpes
B.P. 87, Saint-Martin d'Hères, 38402 cedex, France
Tél: 04 76 63 59 80 Fax: 04 76 63 54 95 mél: claud.verdier@univ-grenoble-alpes.fr
Web: http://liphy-annuaire.univ-grenoble-alpes.fr/pages_personnelles/claude_verdier/

Ce cours est proposé aux étudiants de Masters I de l'U.F.R. PhITEM de Grenoble. Il est le résultat de plusieurs années passées à enseigner cette discipline. Il pourrait aussi être utilisé en Master II Recherche. Dans ce cours, on présente les éléments de base pour l'étudiant ou l'ingénieur qui sera confronté à l'interprétation d'expériences en viscoélasticité, ou en modélisation d'écoulements de matériaux viscoélastiques. Les références à la fin de ce texte permettront aux étudiants intéressés d'aller plus loin. Les premières sont en français [1–4]. Les suivantes sont des monographies sur la rhéologie, en anglais [5–12, 14]. Quelques références sur des sujets particuliers pourront aussi être utiles : les techniques optiques de caractérisation (diffusion de lumière [15], biréfringence [16]), la chimie des polymères [17] ou encore l'analyse des modèles viscoélastiques [18]. Les propriétés rhéologiques des surfaces sont aussi importantes [19, 20]. On trouvera aussi quelques références d'ouvrages traitant de biologie [21] et biorhéologie [22], matière qui fait partie de l'UE complète "Rhéologie du vivant". Enfin d'autres ouvrages de mécanique des milieux continus [23–25], élasticité [26, 27] et mécanique des fluides [28–32] pourront aussi être utiles à la compréhension.

I. INTRODUCTION

Les matériaux viscoélastiques sont des matériaux qui concernent le domaine de la rhéologie, la science de l'écoulement (rheos = qui coule, logie = science de). Ils possèdent des propriétés à la fois élastiques (temps courts, disons inférieur à λ) et visqueuses (temps longs, supérieur à λ). Lorsque l'on jette une boule de "silly putty" (genre de pâte à modeler) sur un mur, elle rebondit (temps court), alors que si on la pose sur un coin de table, elle finit, au bout d'un certain temps, par s'écouler (temps longs) comme en Fig.I.1. On définit ainsi le temps caractéristique du matériau, λ .

Ces matériaux peuvent être regroupés en 3 grandes classes :

- Les polymères, solutions de polymères, mélanges de polymères, caoutchouc
- Les suspensions de particules (microniques ou colloïdales) [10, 13], de gouttelettes (fluides immiscibles)
- Les autres fluides complexes (émulsions, gels, mousses, pâtes, systèmes micellaires, etc.)

Un aspect très important concerne la viscosité de ces fluides ou matériaux qui est non constante et qui dépend en général du gradient de vitesse ($\dot{\gamma}$) comme le démontre la Fig.I.2 où la viscosité de cisaillement chute en fonction du gradient de vitesse : le fluide est dit rhéofluidifiant.

D'autres aspects des matériaux viscoélastiques sont liés à des effets que l'on rencontre dans des écoulements particuliers. Par exemple, un fluide Newtonien entraîné par une tige tournante possède une surface libre plane, alors qu'un fluide viscoélastique monte le long de la tige, d'autant plus que la vitesse est grande (Fig.I.3). C'est l'effet Weissenberg. Il peut servir de mesure du caractère viscoélastique du fluide. Cet effet est dû à la présence de contraintes normales (par ex. dans un champ de cisaillement $v_1 = \dot{\gamma}x_2$, la première différence $\sigma_{11} - \sigma_{22}$ est non nulle pour un fluide non-Newtonien).

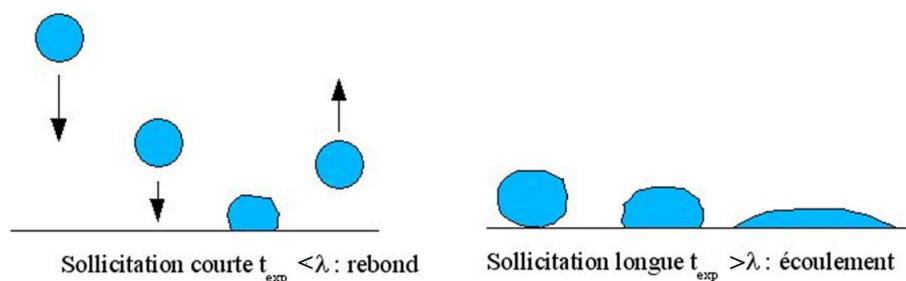


FIG. I.1: Comportement élastique et visqueux d'un échantillon viscoélastique.

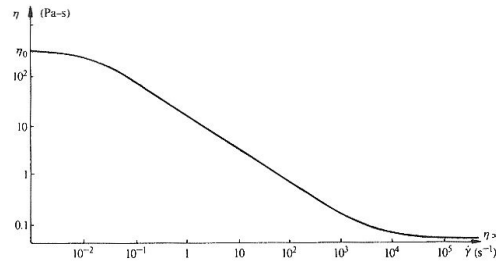


Fig. I.2 Shear-thinning in a typical non-Newtonian fluid. Separan AP-30 in glycerol water.

FIG. I.2: Courbe de viscosité d'un fluide rhéofluidifiant (separan AP-30 dans du glycerol).

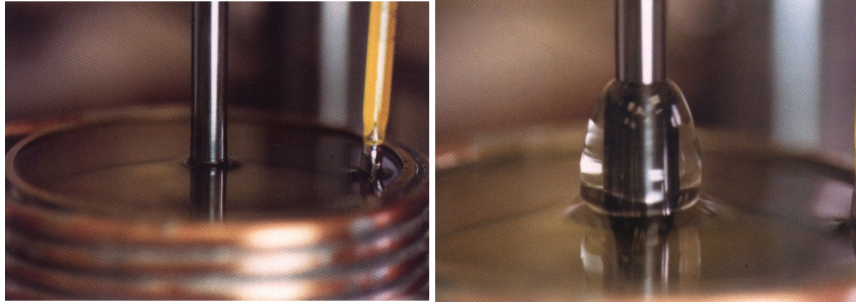


FIG. I.3: Montée d'un fluide viscoélastique le long d'une tige en rotation [18].

Autre phénomène observé : le gonflement en sortie de filière (Fig.I.4). Celui-ci est attribué aux effets de contraintes normales développées par le cisaillement en amont.

La présence de recirculations dans des écoulements est aussi à noter, par exemple dans le cas d'un écoulement de polymères dans une contraction (Fig.I.5). Ceci est attribué aux équations complexes qu'il faut résoudre pour un fluide de ce type (voir partie VI). Notons que la taille des recirculations augmente avec le débit, ou la vitesse d'écoulement, car les effets élastiques se trouvent renforcés car c'est le rapport $\frac{\lambda}{t_{exp}} = De$, encore appelé nombre de Deborah qui contrôle ces effets. λ désigne un temps caractéristique du matériau, et t_{exp} est un temps relié à l'expérience, L/V , où V et L sont respectivement une vitesse et une longueur caractéristiques.

Enfin, signalons aussi que les phénomènes de rupture de jet (dûs à l'instabilité de Rayleigh-Taylor) peuvent être modifiés par la présence de polymères, comme l'illustre la Fig. I.6.

En résumé, les fluides viscoélastiques donnent naissance aux phénomènes suivants, simultanés ou non :

- Echelle(s) de temps caractéristique : si $t_{exp} \leq \lambda$, le comportement est élastique, si $t_{exp} \geq \lambda$, le comportement est celui d'un fluide visqueux
- Viscosité non constante fonction du taux de cisaillement $\dot{\gamma}$

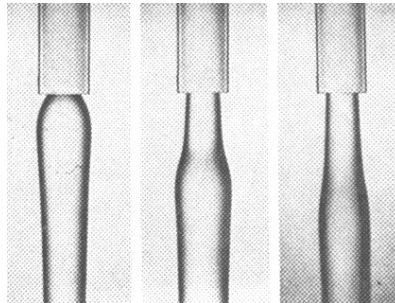


FIG. I.4: Gonflement en sortie de filière. A une vitesse critique v_c en sortie, le gonflement est différé [18].

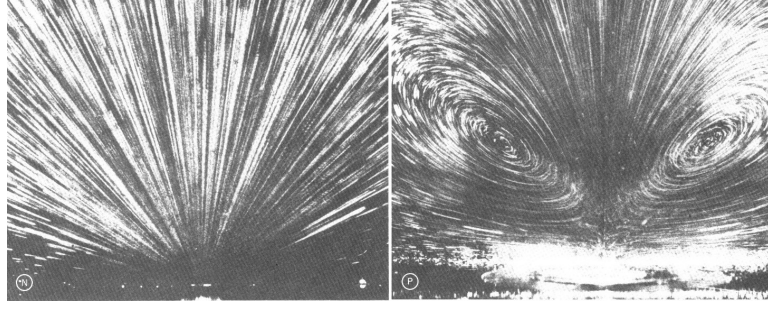


FIG. I.5: Ecoulement dans une contraction avec recirculations (de haut en bas). Le fluide à gauche est Newtonien, celui à droite est une solution de polymères [5].

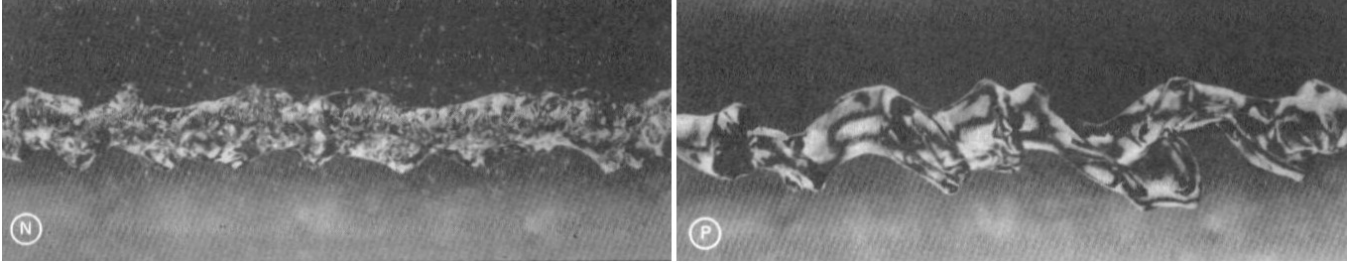


FIG. I.6: Rupture de jets de fluide Newtonien (N) et non-Newtonien (P) [5]

- Différences de contraintes normales non nulles, générant des effets inattendus
- Présence de recirculations supplémentaires dans les écoulements
- Conditions aux surfaces particulières (cf. rupture de jets, tensions de surface, adhésion)

II. RAPPELS DE MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

A. Contraintes

Nous présentons tout d'abord quelques notions classiques sur les contraintes, définies par le tenseur de Cauchy noté $\underline{\underline{\Sigma}}$. Une facette d'un milieu continu (Fig.II.1), de normale $\vec{n}$, est soumise à une densité surfacique de force $\vec{df} = \vec{t}ds$. $\vec{t}$, appelé le vecteur contrainte, est une fonction $\vec{t}(\vec{x}, \vec{n}, t)$ et s'exprime :

$$\vec{t}(\vec{x}, \vec{n}, t) = \underline{\underline{\Sigma}}(\vec{x}, t) \vec{n} \quad (\text{II.1})$$

$\underline{\underline{\Sigma}}$ est symétrique lorsqu'aucun couple extérieur n'est appliqué. $\underline{\underline{\Sigma}}$ peut aussi s'écrire dans une base de l'espace des tenseurs sous la forme :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \Sigma_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \quad (\text{II.2})$$

où on a utilisé les conventions d'Einstein de sommation.

$\underline{\underline{\Sigma}}$ étant symétrique, il est diagonalisable, donc si $\vec{e}_i^*$ ($i = 1, 2, 3$) désigne la base des vecteurs propres, on pose :

$$\vec{e}_i^* = P_{ij} \vec{e}_j \quad (\text{II.3})$$

Alors, pour les matrices $\underline{\underline{\Sigma}}$ et $\underline{\underline{\Sigma}}^*$ associées au tenseur $\underline{\underline{\Sigma}}$, dans les bases respectives $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ et $\vec{e}_i^* \otimes \vec{e}_j^*$, on a :

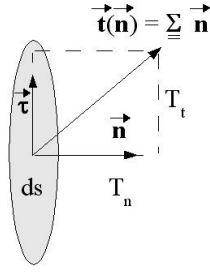


FIG. II.1: Facette dans un milieu continu montrant le vecteur contrainte $\vec{t}$, et la normale $\vec{n}$.

$$\underline{\underline{\Sigma}}^* = \underline{P} \underline{\underline{\Sigma}} \underline{P}^T \quad (\text{II.4})$$

De même, pour les composantes des vecteurs $\vec{x} = x_i \vec{e}_i = x_i^* \vec{e}_i^*$, écrites en colonne :

$$\underline{x}^* = \underline{P} \underline{x} \quad (\text{II.5})$$

Dans la base de l'espace des tenseurs, la matrice associée à $\underline{\underline{\Sigma}}$ s'écrit alors :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (\text{II.6})$$

et les valeurs propres σ_1 , σ_2 , et σ_3 sont appelées contraintes principales. Elles sont très utiles pour le calcul des invariants que l'on utilise dans les lois de comportement :

$$I_{\underline{\underline{\Sigma}}} = \text{tr}(\underline{\underline{\Sigma}}) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (\text{II.7})$$

$$II_{\underline{\underline{\Sigma}}} = \frac{1}{2}(\text{tr}(\underline{\underline{\Sigma}})^2 - \text{tr}(\underline{\underline{\Sigma}}^2)) = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 \quad (\text{II.8})$$

$$III_{\underline{\underline{\Sigma}}} = \det(\underline{\underline{\Sigma}}) = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \quad (\text{II.9})$$

Une autre propriété importante est la décomposition d'un tenseur en partie isotrope (proportionnelle à l'identité, qui contient la pression par exemple) et déviatoire $\underline{\underline{\Sigma}}_d$ (de trace nulle, qui contient les composantes de cisaillement).

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \frac{1}{3}\text{tr}(\underline{\underline{\Sigma}}) \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\Sigma}}_d \quad (\text{II.10})$$

Un autre aspect des contraintes concerne leurs valeurs limites. Du fait de la définition du vecteur contrainte, les contraintes normales $T_n = \vec{t} \cdot \vec{n}$ et tangentielles $T_t = \vec{t} \cdot \vec{\tau}$ ne peuvent dépasser les limites telles que définies par les cercles de Mohr (Fig. II.2).

Enfin, rappelons quelques définitions concernant les opérateurs mathématiques que nous utiliserons dans la suite.

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad (\text{II.11})$$

$$\vec{\nabla} f = \text{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x_i} \vec{e}_i \quad (\text{II.12})$$

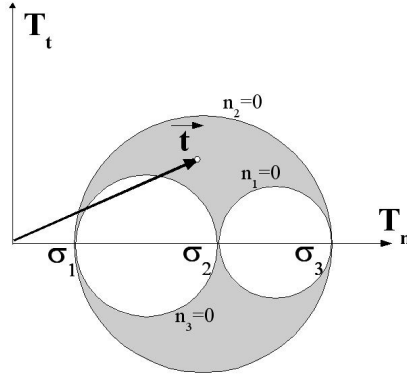


FIG. II.2: Zone admissible pour le vecteur contrainte, cas $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$.

$$\Delta f = \text{div}(\vec{\text{grad}} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} \quad (\text{II.13})$$

$$\underline{\underline{\text{grad}}} \vec{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \quad (\text{II.14})$$

$$\text{rot}(\vec{v}) = \nabla \wedge \vec{v} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \vec{e}_i \quad (\text{II.15})$$

Un autre tenseur important est le tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff $\underline{\underline{\Pi}}$. Imaginons que l'état de contrainte donné par le vecteur $\vec{t} = \underline{\underline{\Sigma}} \vec{n}$ soit inconnu et que l'on puisse avoir accès à une surface de référence connue dS , au lieu de ds , alors on peut s'intéresser à la grandeur :

$$\vec{T} = \frac{d\vec{f}}{dS} = \underline{\underline{\Pi}} \vec{N} \quad (\text{II.16})$$

On peut alors utiliser la formule de transformation des surfaces qui donne $\vec{ds} = ds \vec{n}$ en fonction de $\vec{dS} = dS \vec{N}$:

$$\vec{ds} = J \underline{\underline{F}}^{-T} \vec{dS} \quad (\text{II.17})$$

Il vient alors, pour le tenseur de Piola-Kirchoff :

$$\underline{\underline{\Pi}} = J \underline{\underline{\Sigma}} \underline{\underline{F}}^{-T} \quad (\text{II.18})$$

Enfin, on peut aussi utiliser la force $\vec{dF} = \underline{\underline{F}}^{-1} \vec{df}$ et définir le deuxième tenseur de Piola-Kirchoff $\underline{\underline{\Pi}}_2$ par :

$$\frac{d\vec{F}}{dS} = \underline{\underline{\Pi}}_2 \vec{N} \quad (\text{II.19})$$

Il vient alors :

$$\underline{\underline{\Pi}}_2 = J \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{\Sigma}} \underline{\underline{F}}^{-T} \quad (\text{II.20})$$

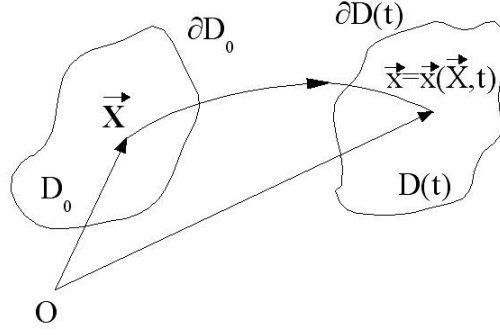


FIG. II.3: Schéma de la transformation d'un milieu continu.

B. Déformations

On considère un milieu continu déformable (Fig. II.3), qui, au cours du mouvement, passe d'une configuration de référence D_0 et se déforme pour se trouver finalement à l'instant t dans une configuration où il occupe un volume $D(t)$. Cette description correspond à la **description Lagrangienne** du mouvement, à savoir que l'on suit les particules du matériau au cours de leur mouvement. Initialement en $\vec{X}$, elles occupent à un instant plus tard la position $\vec{x}$:

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t) \quad (\text{II.21})$$

L'équation (II.21) est aussi la trajectoire de la particule, paramétrée par le temps t . On utilise aussi le vecteur déplacement $\vec{u}(\vec{X}, t)$ défini par :

$$\vec{u}(\vec{X}, t) = \vec{x} - \vec{X} \quad (\text{II.22})$$

Au cours du mouvement, les volumes élémentaires dV et dv (avant et après déplacement) entourant respectivement $\vec{X}$ et $\vec{x}$ sont reliés par :

$$dv = J dV \quad (\text{II.23})$$

où

$$J = \det(\underline{\underline{\mathbf{F}}}) > 0 \quad (\text{II.24})$$

est le Jacobien de la transformation, et

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{X}} = \underline{\underline{\text{grad} \vec{x}}} \quad (\text{II.25})$$

est le gradient de la transformation (sous forme indicielle : $F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$).

Pour un matériau incompressible, on a :

$$\det(\underline{\underline{\mathbf{F}}}) = 1 \quad (\text{II.26})$$

$\underline{\underline{\mathbf{F}}}$ peut être décomposé de la manière suivante (décomposition polaire) :

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}} = \underline{\underline{\mathbf{R}}} \underline{\underline{\mathbf{U}}} = \underline{\underline{\mathbf{V}}} \underline{\underline{\mathbf{R}}} \quad (\text{II.27})$$

où $\underline{\underline{\mathbf{U}}}$ et $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$ sont des symétries $\underline{\underline{\mathbf{U}}} = \underline{\underline{\mathbf{U}}}^T$, $\underline{\underline{\mathbf{V}}} = \underline{\underline{\mathbf{V}}}^T$ et $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$ une rotation : $\underline{\underline{\mathbf{R}}}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^T = \underline{\underline{\mathbf{R}}}^T\underline{\underline{\mathbf{R}}} = \underline{\underline{\mathbf{I}}}$.

Les masses volumiques à l'instant initial $t = 0$ et à l'instant t sont reliées par :

$$\rho_0 = \rho(\vec{\mathbf{X}}, t) \det(\underline{\underline{\mathbf{F}}}) \quad (\text{II.28})$$

Afin de définir un tenseur de déformations, qui permettra d'étudier des lois de comportement reliant le tenseur des contraintes aux déformations, on va définir un tenseur objectif, c'est à dire indépendant du référentiel considéré. Notons que $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$ ne peut satisfaire à cette condition d'objectivité. $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ est alors introduit, c'est le tenseur de Cauchy à droite, défini par :

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}}^T \underline{\underline{\mathbf{F}}} \quad (\text{II.29})$$

On utilise aussi $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$, qui est défini comme le tenseur de Cauchy-Green, à gauche cette fois :

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}}\underline{\underline{\mathbf{F}}}^T \quad (\text{II.30})$$

On peut ensuite introduire les tenseurs des déformations, $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$, tenseur de Lagrange et $\underline{\underline{\mathbf{E}}}_e$, tenseur d'Euler-Almansi :

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\mathbf{C}}} - \underline{\underline{\mathbf{I}}}) \quad (\text{II.31})$$

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}}_e = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\mathbf{I}}} - \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{-1}) \quad (\text{II.32})$$

$\underline{\underline{\mathbf{E}}}$ et $\underline{\underline{\mathbf{E}}}_e$ sont simplement reliés par :

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}}^T \underline{\underline{\mathbf{E}}}_e \underline{\underline{\mathbf{F}}} \quad (\text{II.33})$$

Si nous exprimons maintenant $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$ au moyen du déplacement $\vec{\mathbf{u}}$, il vient :

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\text{grad}\vec{\mathbf{u}}}} + \underline{\underline{\text{grad}\vec{\mathbf{u}}}}^T + \underline{\underline{\text{grad}\vec{\mathbf{u}}}}^T \underline{\underline{\text{grad}\vec{\mathbf{u}}}}) \quad (\text{II.34})$$

Le tenseur des déformations linéarisé $\underline{\underline{\epsilon}}$ ne contient que les termes du premier ordre correspondants aux cas des petites déformations, et s'écrit :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\text{grad}\vec{\mathbf{u}}}} + \underline{\underline{\text{grad}\vec{\mathbf{u}}}}^T) \quad (\text{II.35})$$

Il est symétrique car c'est la partie symétrique de $\underline{\underline{\text{grad}\vec{\mathbf{u}}}}$. La partie antisymétrique $\underline{\underline{\omega}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\text{grad}\vec{\mathbf{u}}}} - \underline{\underline{\text{grad}\vec{\mathbf{u}}}}^T)$, elle, contient les rotations.

Dans le cas des petites déformations, au premier ordre, il vient :

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} \approx \underline{\underline{\mathbf{I}}} + 2 \underline{\underline{\epsilon}} \quad (\text{II.36})$$

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} \approx \underline{\underline{\mathbf{I}}} + 2 \underline{\underline{\epsilon}} \quad (\text{II.37})$$

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}}^{-1} \approx \underline{\underline{\mathbf{I}}} - 2 \underline{\underline{\epsilon}} \quad (\text{II.38})$$

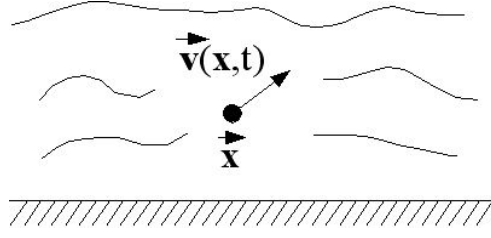


FIG. II.4: Représentation Eulérienne du mouvement

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}} \approx \underline{\underline{\mathbf{E}}}_e \approx \underline{\underline{\epsilon}} \quad (\text{II.39})$$

En définitive, $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$ et $\underline{\underline{\mathbf{E}}}_e$ peuvent indifféremment donner des mesures de la déformation, qui tendent vers $\underline{\underline{\epsilon}}$ dans le cas des petites déformations ($\|\underline{\underline{\text{grad}}}\vec{\mathbf{u}}\| \ll 1$).

Lors du mouvement, c'est $\underline{\underline{\epsilon}}$ qui donne les allongements unitaires et les rotations :

- L'allongement unitaire dans la direction 1 est $\epsilon_{11} = \frac{L-L_0}{L_0}$, si L_0 et L sont les longueurs avant et après déformation dans la direction 1.
- L'angle de $\pi/2$ entre $\vec{\mathbf{e}}_1$ et $\vec{\mathbf{e}}_2$ se referme de $\gamma = 2\epsilon_{12}$, appelé angle de glissement ou de cisaillement
- La variation de volume $\frac{\Delta V}{V}$ est donnée par $\text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}) = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$

C. Taux de déformations

On s'intéresse maintenant à la **description Eulérienne** du mouvement. Il s'agit d'observer en un point donné (Fig.II.4) de l'écoulement comment varient les grandeurs intéressantes comme $\vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{x}}, t)$, $p(\vec{\mathbf{x}}, t)$, $\rho(\vec{\mathbf{x}}, t)$ et $T(\vec{\mathbf{x}}, t)$ par exemple.

La donnée de la description Eulérienne correspond à la donnée du champ de vitesse :

$$\vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{x}}, t) \quad (\text{II.40})$$

La dérivée d'une fonction $F(\vec{\mathbf{x}}, t)$ par rapport au temps s'écrit :

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \underline{\underline{\text{grad}}}\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}} \quad (\text{II.41})$$

On en déduit ainsi l'accélération :

$$\vec{\mathbf{\Gamma}} = \frac{\partial \vec{\mathbf{v}}}{\partial t} + \underline{\underline{\text{grad}}}\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j \right) \vec{\mathbf{e}}_i \quad (\text{II.42})$$

Il sera dans la suite opportun d'utiliser le tenseur $\underline{\underline{\text{grad}}}\vec{\mathbf{v}}$ et de le décomposer en utilisant sa partie symétrique $\underline{\underline{D}}$ et antisymétrique $\underline{\underline{\Omega}}$:

$$\underline{\underline{\text{grad}}}\vec{\mathbf{v}} = \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{\Omega}} \quad (\text{II.43})$$

De même que précédemment, c'est le tenseur $\underline{\underline{D}}$ qui contient les informations importantes :

- $D_{11} = \frac{\dot{L}}{L}$ est le taux d'allongement dans la direction 1, où $L(t)$ est une longueur mesurée dans cette direction
- $2D_{12} = \dot{\gamma}$, où $\dot{\gamma}$ le taux de cisaillement (ou de glissement) entre 2 directions 1 et 2 $\vec{\mathbf{e}}_1$ et $\vec{\mathbf{e}}_2$
- $\text{tr}(\underline{\underline{D}}) = \text{div } \vec{\mathbf{v}}$ et peut être nul ou non. Le fluide incompressible vérifie $\text{div } \vec{\mathbf{v}} = 0$

D. Principes de conservation

Les principes de conservation sont, sous forme locale, respectivement la conservation de la masse (II.44), de la quantité de mouvement (II.45), de l'énergie cinétique (II.46), le premier (II.47) et le second principe (II.48) de la thermodynamique :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{\mathbf{v}} = 0 \quad (\text{II.44})$$

$$\rho \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \operatorname{div} \underline{\underline{\Sigma}} + \rho \vec{\mathbf{b}} \quad (\text{II.45})$$

$$\rho \frac{de_c}{dt} = \rho \vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{v}} + \operatorname{div}(\underline{\underline{\Sigma}} \vec{\mathbf{v}}) - \operatorname{tr}(\underline{\underline{\Sigma}} \underline{\underline{\mathbf{D}}}) \quad (\text{II.46})$$

$$\rho \frac{du}{dt} = \operatorname{tr}(\underline{\underline{\Sigma}} \underline{\underline{\mathbf{D}}}) - \operatorname{div} \vec{\mathbf{c}} + \rho q \quad (\text{II.47})$$

$$\rho \frac{ds}{dt} - \frac{\rho q}{T} + \operatorname{div}(\frac{\vec{\mathbf{c}}}{T}) \geq 0 \quad (\text{II.48})$$

où $\rho \vec{\mathbf{b}}$ désigne les forces de volume, $e_c = \frac{1}{2} \rho v^2$ est l'énergie cinétique, u l'énergie interne (par exemple $u = C_p T + u_0$ à pression constante), $\vec{\mathbf{c}}$ est un flux de chaleur, ρq est un terme source de chaleur, et s est l'entropie du système.

La formule (II.46) s'obtient en multipliant scalairement (II.45) par $\vec{\mathbf{v}}$, ce qui fait apparaître l'énergie cinétique.

Notons aussi que la conservation du moment angulaire donne $\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}}^T$, si aucun couple extérieur n'est appliqué.

NB. Il existe une forme équivalente à l'équation (II.44) : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{\mathbf{v}}) = 0$.

III. ELASTICITÉ

A. Petites Déformations

En élasticité, on va s'intéresser à la relation reliant le tenseur des contraintes aux déformations. Les relations obtenues expérimentalement démontre la proportionnalité entre la contrainte σ_{11} et l'allongement ϵ_{11} d'une part mais aussi entre les deux déformations ϵ_{22} et ϵ_{33} et ϵ_{11} avec un coefficient constant. Il en résulte la loi classique (de Hooke) qui s'écrit :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \lambda \operatorname{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}) \underline{\underline{\mathbf{I}}} + 2 \mu \underline{\underline{\epsilon}} \quad (\text{III.1})$$

Les deux constantes λ et μ sont les coefficients de Lamé.

NB. Cette loi est valable pour un matériau isotrope, c'est à dire que les constantes sont les mêmes quelle que soit la direction. On mesure E par un essai de traction suivant la direction 1, 2, ou 3 indifféremment. Le cas des matériaux composites serait bien sûr différent, car l'anisotropie de ces matériaux est leur caractéristique essentielle.

Cette relation peut s'inverser, ce qui donne :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1 + \nu}{E} \underline{\underline{\Sigma}} - \frac{\nu}{E} \operatorname{tr}(\underline{\underline{\Sigma}}) \underline{\underline{\mathbf{I}}} \quad (\text{III.2})$$

Les coefficients ν et E sont appelés respectivement le coefficient de Poisson ($-1 \leq \nu \leq \frac{1}{2}$) et le module d'Young (en Pa).

Dans le cas du cisaillement, on trouve la relation simple $\sigma_{12} = 2\mu \epsilon_{12} = \mu \gamma$ et $\epsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12}$. μ (ou G) est le module de cisaillement et il vient alors :

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{III.3})$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (\text{III.4})$$

La seconde relation est obtenue par inversion de (III.1) et identification à (III.2).

Exemple : Le cas de la traction-compression avec la seule contrainte σ_{11} non nulle donne simplement $\sigma_{11} = E \epsilon_{11}$ et $\epsilon_{22} = \epsilon_{33} = -\nu \epsilon_{11}$.

Enfin, l'identité :

$$tr(\underline{\underline{\Sigma}}) = (2\mu + 3\lambda) tr(\underline{\underline{\epsilon}}) \quad (\text{III.5})$$

permet de définir le coefficient de compressibilité $K = 2\mu + 3\lambda = \frac{E}{1-2\nu}$, qui devient infini si $\nu \rightarrow \frac{1}{2}$.

De manière générale, on peut montrer que le champ de déplacement $\vec{\mathbf{u}}$ est solution de l'équation dite de Navier-Lamé suivante :

$$(\lambda + \mu) \vec{\text{grad}}(\text{div } \vec{\mathbf{u}}) + \mu \Delta \vec{\mathbf{u}} + \rho \vec{\mathbf{b}} = \rho \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{u}}}{\partial t^2} \quad (\text{III.6})$$

Cette équation peut aussi être réécrite sous la forme :

$$(\lambda + 2\mu) \vec{\text{grad}}(\text{div } \vec{\mathbf{u}}) - 2\mu \text{rot}(\vec{\mathbf{u}}) + \rho \vec{\mathbf{b}} = \rho \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{u}}}{\partial t^2} \quad (\text{III.7})$$

Ces équations pour $\vec{\mathbf{u}}$ doivent bien sûr être résolues avec les conditions aux limites appropriées.

B. Grandes Déformations : modèle du caoutchouc

Considérons le cas du matériau incompressible. D'après ce qui précède, $\underline{\underline{\Sigma}} = \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} tr(\underline{\underline{\epsilon}}) \underline{\underline{\mathbf{I}}} + 2G \underline{\underline{\epsilon}}$. Mais si le matériau devient incompressible $\nu \rightarrow \frac{1}{2}$ et $tr(\underline{\underline{\epsilon}}) = 0$. La limite est forcément finie, et la relation globale s'écrit donc $\underline{\underline{\Sigma}} = \alpha \underline{\underline{\mathbf{I}}} + 2G \underline{\underline{\epsilon}}$.

Naturellement, on a envie de généraliser cette relation aux grandes déformations, c'est à dire lorsque $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$ remplace $\underline{\underline{\epsilon}}$ comme mesure de déformations. Ceci est possible car $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$ est objectif, mais on peut tout aussi bien utiliser $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$, c'est ce que nous faisons :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \alpha \underline{\underline{\mathbf{I}}} + G \underline{\underline{\mathbf{B}}} \quad (\text{III.8})$$

La différence avec (III.1) vient du fait que l'approximation (II.37) permet d'éliminer le coefficient 2, et la constante α est à déterminer pour chaque problème. La relation d'incompressibilité $det(\underline{\underline{\mathbf{F}}}) = 1$ vient s'ajouter à la relation (III.8), qui n'est autre que le modèle de Rivlin (1948).

Exemples: Considérons le cas de la **traction** à nouveau. En représentation Lagrangienne, le mouvement s'écrit $x_1 = \lambda X_1$, $x_2 = \beta X_2$, $x_3 = \beta X_3$, où λ est l'allongement du barreau cylindrique en traction $\lambda = \frac{L}{L_0}$, d'où :

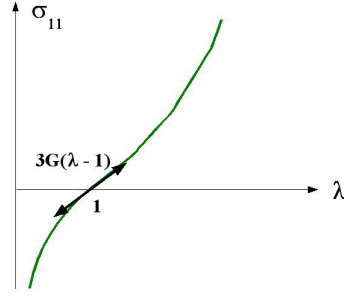


FIG. III.1: Courbe typique du caoutchouc en traction

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \quad (\text{III.9})$$

L'incompressibilité donne $\lambda\beta^2 = 1$, d'où $\beta = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$. Il vient :

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \quad (\text{III.10})$$

L'application de (III.8) donne : $\sigma_{11} = \alpha + G\lambda^2$, $\sigma_{22} = \alpha + \frac{G}{\lambda}$, $\sigma_{33} = \alpha + \frac{G}{\lambda}$. Comme la surface extérieure du barreau est libre de toute contrainte, il vient (condition à la limite) $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$. Ceci permet la détermination de α : $\alpha = -\frac{G}{\lambda}$ d'où finalement :

$$\sigma_{11} = G\left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}\right) \quad (\text{III.11})$$

Ce modèle reproduit bien en général le comportement du caoutchouc (Fig.III.1) en traction. Si on écrit $\lambda = \frac{L}{L_0} = 1 + \frac{L-L_0}{L_0} = 1 + \epsilon_{11} = 1 + \epsilon$, alors, lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, $\sigma_{11} \approx 3G\epsilon$.

Le deuxième cas est celui du **cisaillement simple** dans le plan (1,2) pour lequel le mouvement est défini par $x_1 = X_1 + \gamma X_2$, $x_2 = X_2$, $x_3 = X_3$. L'incompressibilité est vérifiée automatiquement. On a dans ce cas :

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{III.12})$$

et

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} 1 + \gamma^2 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{III.13})$$

Le calcul donne $\sigma_{12} = G\gamma$ et $\sigma_{11} - \sigma_{22} = G\gamma^2$. On retrouve la définition du module de cisaillement, et par contre, un phénomène nouveau est observé qui est l'apparition de contraintes normales, qui seront intéressantes pour décrire des effets particuliers, comme ceux observés au §I.

Un autre modèle plus précis est celui de Mooney-Rivlin. Celui-ci est obtenu en écrivant le tenseur des contraintes comme un développement limité en fonction des puissances de $\underline{\underline{B}}$. Les puissances d'ordre 3 ou plus se réécrivent en fonction de $\underline{\underline{I}}$, $\underline{\underline{B}}$, et $\underline{\underline{B}}^2$ grâce au théorème de Cayley-Hamilton :

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}}^3 - I_B \underline{\underline{\mathbf{B}}}^2 + II_B \underline{\underline{\mathbf{B}}} - III_B \underline{\underline{\mathbf{I}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}} \quad (\text{III.14})$$

On choisit plutôt une relation équivalente faisant intervenir $\underline{\underline{\mathbf{I}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$, et $\underline{\underline{\mathbf{B}}}^{-1}$, d'où :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \alpha \underline{\underline{\mathbf{I}}} + 2C_1 \underline{\underline{\mathbf{B}}} - 2C_2 \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{-1} \quad (\text{III.15})$$

La condition d'incompressibilité (II.26) est aussi rajoutée à ce modèle. En général, les constantes sont des fonctions des invariants (I_B, II_B) car $III_B = \det(\underline{\underline{\mathbf{B}}}) = \det(\underline{\underline{\mathbf{F}}})^2 = 1$. Pour le modèle de Mooney-Rivlin, C_1 et C_2 sont des constantes et α est déterminé par les conditions aux limites du problème.

Exercice: Les valeurs de C_1 et C_2 ne sont pas en fait quelconques et doivent vérifier $C_1 + C_2 = \frac{G}{2}$. Dans le cas de la traction, ce modèle est meilleur que le précédent. Pour le cisaillement, les résultats prédits sont identiques.

Plus généralement encore, on peut introduire une fonction $W(I_B, II_B)$, équivalente à une énergie volumique, qui permet d'écrire les contraintes sous la forme :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \alpha \underline{\underline{\mathbf{I}}} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_B} \underline{\underline{\mathbf{B}}} - 2 \frac{\partial W}{\partial II_B} \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{-1} \quad (\text{III.16})$$

Nous ferons appel à une forme équivalente plus loin dans ce cours.

IV. FLUIDES VISQUEUX

A. Fluide Newtonien

Nous commençons par rappeler les lois classiques du Fluide Newtonien. Un fluide au repos est dans l'état de contraintes $\underline{\underline{\Sigma}} = -p \underline{\underline{\mathbf{I}}}$, où p désigne la pression statique. Dès lors qu'un mouvement est généré, des contraintes supplémentaires apparaissent que l'on écrit $\underline{\underline{\Sigma}} = -p \underline{\underline{\mathbf{I}}} + \underline{\underline{\tau}}$. La pression mécanique est définie par $p = -\frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\Sigma}}) = p - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\tau}})$. Pour le fluide Newtonien, la relation s'écrit :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = -p \underline{\underline{\mathbf{I}}} + \lambda \text{tr}(\underline{\underline{\mathbf{D}}}) \underline{\underline{\mathbf{I}}} + 2\eta \underline{\underline{\mathbf{D}}} \quad (\text{IV.1})$$

Il est alors utile d'introduire le tenseur déviatoire de $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$, noté $\underline{\underline{\mathbf{D}}}_d$, qui vaut $\underline{\underline{\mathbf{D}}}_d = \underline{\underline{\mathbf{D}}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\mathbf{D}}}) \underline{\underline{\mathbf{I}}}$, d'où :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = -p \underline{\underline{\mathbf{I}}} + \left(\lambda + \frac{2}{3}\eta\right) \text{tr}(\underline{\underline{\mathbf{D}}}) \underline{\underline{\mathbf{I}}} + 2\eta \underline{\underline{\mathbf{D}}}_d \quad (\text{IV.2})$$

On utilise alors l'hypothèse simplificatrice de **Stokes** qui donne la relation :

$$\lambda + \frac{2}{3}\eta = 0 \quad (\text{IV.3})$$

Si on rajoute la condition d'incompressibilité, $\text{div}(\vec{\mathbf{v}}) = \text{tr}(\underline{\underline{\mathbf{D}}}) = 0$, il vient $\underline{\underline{\mathbf{D}}}_d = \underline{\underline{\mathbf{D}}}$, et la loi de comportement du fluide Newtonien incompressible s'énonce simplement :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = -p \underline{\underline{\mathbf{I}}} + 2\eta \underline{\underline{\mathbf{D}}} \quad (\text{IV.4})$$

Une fois cette loi énoncée, on peut reporter (IV.4) dans (II.45), ce qui donne les équations de Navier-Stokes :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\underline{\underline{\text{grad}}} \vec{\mathbf{v}}) \vec{\mathbf{v}} \right) = -\nabla p + \eta \triangle \vec{\mathbf{v}} + \rho \vec{\mathbf{b}} \quad (\text{IV.5})$$

avec la condition d'incompressibilité $div(\vec{v}) = 0$.

Exemple : Cas du cisaillement simple $v_1 = \dot{\gamma} x_2, v_2 = 0, v_3 = 0$.
On a alors :

$$\underline{grad} \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (IV.6)$$

et

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 \\ \frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (IV.7)$$

La relation (IV.4) donne alors $\sigma_{12} = \eta \dot{\gamma}$, ce qui est encore la définition de la viscosité de cisaillement $\eta = \frac{\sigma_{12}}{\dot{\gamma}}$. De plus on trouve $\sigma_{11} - \sigma_{22} = 0$, et $\sigma_{22} - \sigma_{33} = 0$, ce qui démontre qu'un fluide Newtonien ne développe pas de contraintes normales en cisaillement. Il sera incapable de grimper le long de la tige tournante (Fig.I.3).

Autre exemple : Ecoulement élongationnel. $v_1 = \dot{\epsilon} x_1, v_2 = -\frac{\dot{\epsilon}}{2} x_2, v_3 = -\frac{\dot{\epsilon}}{2} x_3$.
On calcule de même $\underline{grad} \vec{v}$ et $\underline{D}$:

$$\underline{grad} \vec{v} = \underline{D} = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\dot{\epsilon}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\dot{\epsilon}}{2} \end{pmatrix} \quad (IV.8)$$

On définit alors la viscosité élongationnelle par :

$$\eta_E = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{\dot{\epsilon}} \quad (IV.9)$$

Dans ce cas, on trouve que :

$$\eta_E = 3\eta \quad (IV.10)$$

Ce résultat est très important et servira par la suite comme cas limite des fluides non-newtoniens, lorsque $\dot{\epsilon} \rightarrow 0$.

B. Fluide de Reiner-Rivlin

On l'appelle aussi le fluide visqueux généralisé. On procède comme en élasticité pour étendre la loi du fluide Newtonien, aux puissances de $\underline{D}$, qui est un tenseur objectif. Les puissances de $\underline{D}$ peuvent se ramener uniquement aux termes en $\underline{I}$, $\underline{D}$, et $\underline{D}^2$, après application du théorème de Cayley-Hamilton. D'où :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = -p \underline{I} + 2\eta \underline{D} + 4\eta_2 \underline{D}^2 \quad (IV.11)$$

avec la condition d'incompressibilité $tr(\underline{D}) = 0$. Les fonctions η et η_2 sont des fonctions des invariants (non nuls) II_D et III_D . On remarque qu'en cisaillement simple (voir la partie précédente sur le fluide Newtonien), ce fluide donne naissance à des contraintes $\sigma_{12} = \eta \dot{\gamma}$, $\sigma_{11} - \sigma_{22} = 0$, $\sigma_{22} - \sigma_{33} = \eta_2 \dot{\gamma}^2$. Ce résultat est intéressant, mais en désaccord avec les expériences, qui prédisent $N_1 = \sigma_{11} - \sigma_{22}$ non nul, et $N_2 = \sigma_{22} - \sigma_{33} \leq 0$, comme indiqué en Figure IV.1.

En général, on utilise $\eta_2 = 0$ et $\eta = \eta(II_D)$. L'exemple le plus simple est le fluide en loi puissance :

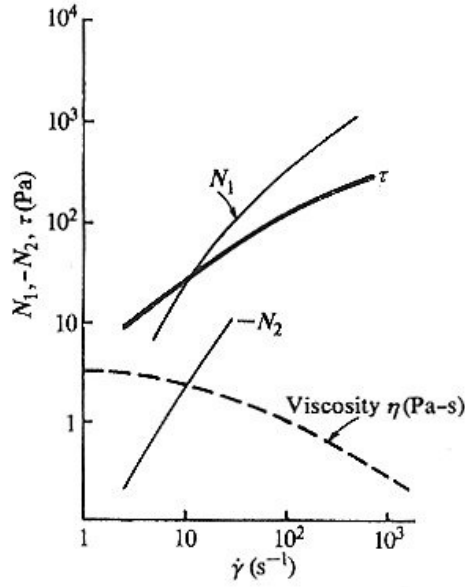


FIG. IV.1: Comportement typique de η , τ , N_1 , et $-N_2$ en fonction de $\dot{\gamma}$ [10].

$$\eta = m |4II_D|^{\frac{n-1}{2}} = m |II_{2D}|^{\frac{n-1}{2}} \quad (\text{IV.12})$$

n est un indice sans dimension et vérifie :

$$0 \leq n \leq 1 \quad (\text{IV.13})$$

Typiquement, pour des polymères fondus, n vaut entre 0.3 et 0.8.

Cette relation, valable en $3D$, donne $\eta = m \dot{\gamma}^{n-1}$, et $\sigma_{12} = m \dot{\gamma}^n$ qui est la loi puissance, et indique que la courbe de viscosité a une pente $n - 1$ en échelle log-log. Cette relation est en général suffisante pour la modélisation de polymères fondus, lors de la mise en oeuvre des plastiques, qui nécessite l'application de forts taux de cisaillement, correspondant à des régimes en loi puissance.

Afin d'obtenir un modèle plus précis, qui colle aux bas gradients de cisaillement et éventuellement au cas limite de gradients de vitesse infinis, pour lesquels une viscosité limite existe (sujet de controverse !), on peut utiliser le modèle de Carreau-Yasuda (IV.14):

$$\frac{\eta - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = \frac{1}{(1 + \lambda^a |4II_D|^{\frac{a}{2}})^{\frac{1-n}{a}}} \quad (\text{IV.14})$$

ou encore, en cisaillement simple : $\frac{\eta - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = \frac{1}{(1 + (\lambda \dot{\gamma})^a)^{\frac{1-n}{a}}}$

On retrouve les cas suivants :

- Limite du fluide Newtonien $\lambda \dot{\gamma} \ll 1$: $\eta \rightarrow \eta_0$
- Valeurs de $\lambda \dot{\gamma} \approx 1$ intermédiaires : $\eta \approx \eta_0 (\lambda \dot{\gamma})^{n-1}$ (η_∞ négligeable)
- Cas des très grands gradient $1 \ll \lambda \dot{\gamma}$: $\eta \rightarrow \eta_\infty$

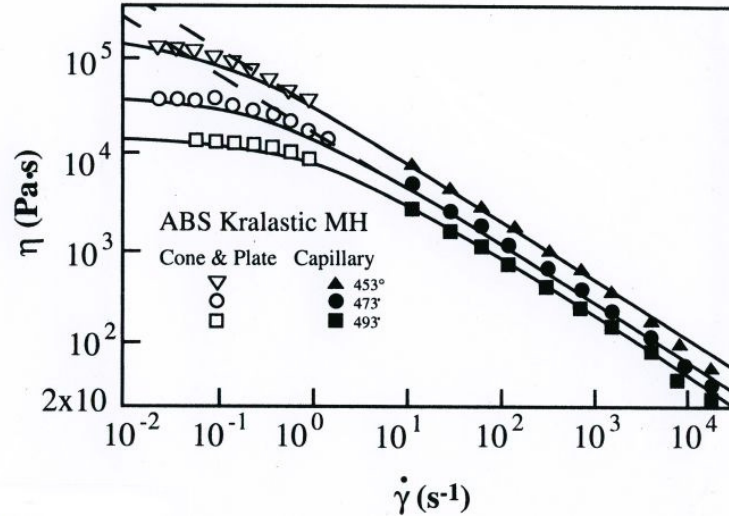


FIG. IV.2: Courbes de viscosité d'un polymère de type ABS à différentes températures [10].

λ est appelé temps de relaxation ou temps caractéristique du fluide, il correspond à la transition du régime Newtonien vers le régime en loi puissance. Ce changement (variation de pente) correspond à une valeur de $\dot{\gamma} \approx \frac{1}{\lambda}$. Le dernier paramètre, a , est un paramètre d'ajustement qui déplace la courbe de viscosité vers le haut lorsque a augmente. L'indice n peut être mesuré directement sur la courbe, de même que η_0 , η_∞ , et λ . La figure IV.2 illustre tout à fait ces propriétés.

C. Principe de superposition temps-température

De nombreux fluides (polymères, solutions de polymères, etc.) obéissent au principe de superposition temps-température. Celui-ci indique que le comportement d'un fluide à une température et à une vitesse données ($T, \dot{\gamma}$) est le même à une autre température et une autre vitesse ($T_1, \dot{\gamma}_1$). Par exemple, si $T \geq T_1$, alors $\dot{\gamma} \geq \dot{\gamma}_1$.

La figure IV.2 donne l'exemple d'expériences de cisaillement simple réalisées sur un polymère ABS à différentes températures. On constate l'allure semblable des courbes, qui peuvent être décalées pour être superposées à une même température de référence. Le décalage se fait sur l'axe des $\dot{\gamma}$ et aussi des η . Le coefficient de décalage, noté $\log(a_T)$, est le même sur les deux axes mais on porte $\log(\eta/a_T)$ en fonction de $\log(a_T \dot{\gamma})$, vu ce qui a été dit précédemment.

Le coefficient a été déterminé empiriquement, en utilisant le décalage basé sur la viscosité du régime à bas cisaillement (régime Newtonien) :

$$a_T = \eta_0(T)/\eta_0(T_0) \quad (\text{IV.15})$$

Ce coefficient a aussi été étudié par des lois issues de la thermodynamique. Il peut être approché par la relation :

$$\log(a_T) = \frac{-C_1(T - T_0)}{C_2 + (T - T_0)} \quad (\text{IV.16})$$

où T_0 est la température de référence, et les coefficients $C_1 = 17.44 K^{-1}$ et $C_2 = 51.6 K$ ont été déterminés expérimentalement. Cette relation s'applique pour bon nombre de polymères.

Un exemple de superposition temps-température pour la viscosité (ainsi que la première différence des contraintes normales $\sigma_{11} - \sigma_{22} = \psi_1 \dot{\gamma}^2$) est présenté en Fig. IV.3. Parfois, une correction supplémentaire est appliquée à la viscosité, et un coefficient b_T est défini, pour la correction de η . On représente alors $\eta/a_T b_T$ en fonction de $a_T \dot{\gamma}$, où :

$$b_T = \frac{\rho(T) T}{\rho(T_0) T_0} \quad (\text{IV.17})$$

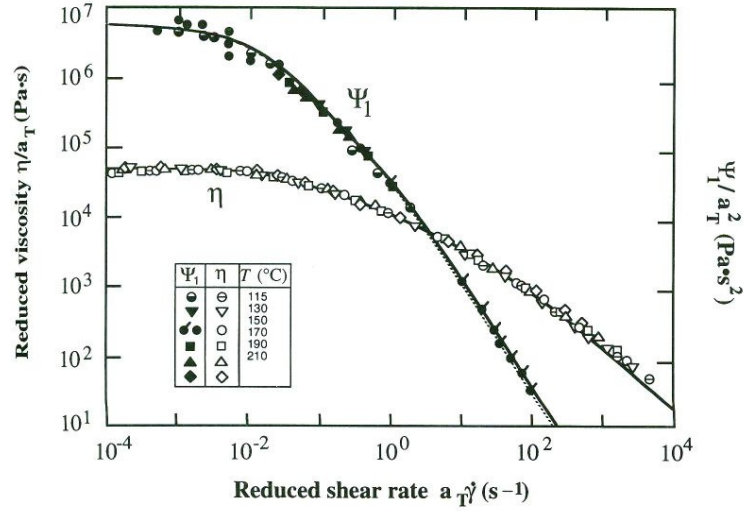


FIG. IV.3: Courbe maîtresse de viscosité : Polyéthylène Basse densité (LDPE) à la température de référence $T_0 = 423K$ [10].

On verra que ce principe est aussi utilisé dans le cas d'essais dynamiques où l'on mesure modules élastique et visqueux (de perte).

D. Fluides à seuil

Un fluide à seuil est par définition un matériau qui s'écoule uniquement lorsque les contraintes qui lui sont appliquées sont suffisantes pour vaincre les forces d'interactions qui le maintiennent à l'équilibre. Dès lors que la contrainte devient plus grande que le seuil τ_s , il peut s'écouler comme un fluide Newtonien ou visqueux (voir partie précédente). Prenons l'exemple d'un cylindre (section S , hauteur h , z est la direction verticale, et $z = 0$ correspond à la base) de matière soumis à son propre poids. Les contraintes supposées homogènes dans chaque section s'expriment :

$$\underline{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho g(z - h) \end{pmatrix} \quad (IV.18)$$

La contrainte est maximale en $z = 0$ et vaut, en valeur absolue, ρgh . Si cette contrainte $\rho gh \geq \tau_s \geq 0$, alors le matériau pourra s'écouler. Dans le cas contraire, il restera à l'équilibre, ou se déformera très légèrement de manière élastique.

Sur la base de cet exemple, on peut postuler la loi de comportement du fluide à seuil :

$$\begin{aligned} |\sigma_{12}| &\leq \tau_s & \dot{\gamma} &= 0 & \text{ou} & \sigma_{12} = G\gamma \\ |\sigma_{12}| &\geq \tau_s & \sigma_{12} &= \tau_s + \eta\dot{\gamma} \end{aligned} \quad (IV.19)$$

Cette loi est appelée loi de **Bingham**. Elle a été bien vérifiée expérimentalement, dans le cas de suspensions, pâtes, gels, etc. Une alternative est le modèle de Casson, qui a été utilisé pour modéliser le sang [22], considéré aussi comme une suspension de globules rouges (et blancs) dans un plasma. Le comportement du sang suit assez bien la loi de Casson, et la viscosité est fonction du taux d'hématocrite H (pourcentage volumique de cellules en présence, Fig. IV.4), donc le seuil de contrainte τ_s dépend de H . La loi de Casson s'écrit (si $\dot{\gamma} > 0$):

$$\begin{aligned} |\sigma_{12}| &\leq \tau_s & \dot{\gamma} &= 0 & \text{ou} & \sigma_{12} = G\gamma \\ |\sigma_{12}| &\geq \tau_s & \sqrt{\sigma_{12}} &= \sqrt{\tau_s} + \sqrt{\eta\dot{\gamma}} \end{aligned} \quad (IV.20)$$

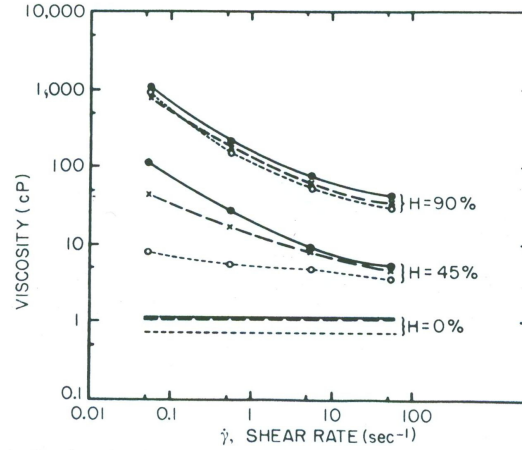


FIG. IV.4: Viscosité du sang en fonction du taux d'hématocrite H d'après [22]

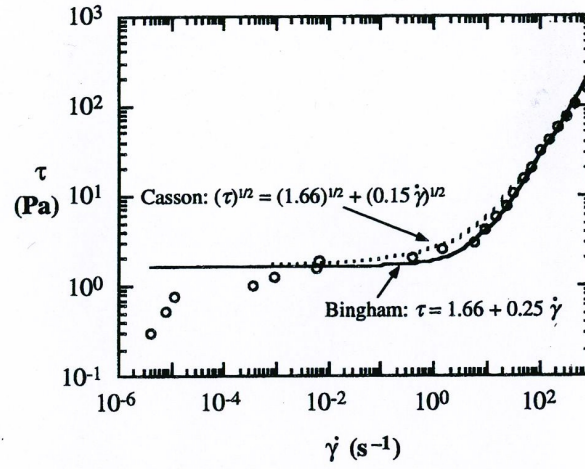


FIG. IV.5: Comparaison de la loi de Bingham et de Casson pour une suspension d'oxyde de fer. Les points aux bas gradients ne sont pas valables à cause de l'évaporation du solvant [10].

La loi de Bingham (IV.19) peut être généralisée en 3D. Pour cela, on décompose $\underline{\underline{\Sigma}}$ en une partie isotrope $-p\underline{\underline{\mathbf{I}}}$ et une partie supplémentaire $\underline{\underline{\tau}}$:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = -p\underline{\underline{\mathbf{I}}} + \underline{\underline{\tau}} \quad (\text{IV.21})$$

$\underline{\underline{\tau}}$ est donné par :

$$\begin{aligned} |II_{\tau}| \leq \tau_s^2 \quad \underline{\underline{\mathbf{D}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}} \quad \text{ou} \quad \underline{\underline{\tau}} = G\underline{\underline{\mathbf{B}}} \\ |II_{\tau}| \geq \tau_s^2 \quad \underline{\underline{\tau}} = 2\left(\eta + \frac{\tau_s}{\sqrt{|II_{2D}|}}\right)\underline{\underline{\mathbf{D}}} \end{aligned} \quad (\text{IV.22})$$

où $II_{\tau} = \frac{1}{2}(tr(\underline{\underline{\tau}})^2 - tr(\underline{\underline{\tau}}^2))$ d'après l'équation (II.8). Un exemple de fluide à seuil est illustré en figure (IV.5), ainsi que la comparaison des deux lois précédentes :

Signalons enfin qu'une loi un peu plus générale (basée sur le fluide en loi puissance) peut aussi être utilisée, la loi de Herschel-Bulkley :

$$\begin{aligned}
|II_\tau| \leq \tau_s^2 \quad \underline{\underline{\mathbf{D}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}} \quad \text{ou} \quad \underline{\underline{\tau}} = G \underline{\underline{\mathbf{B}}} \\
|II_\tau| \geq \tau_s^2 \quad \underline{\underline{\tau}} = 2 \left(\frac{\tau_s}{\sqrt{|II_{2D}|}} + m |II_{2D}|^{\frac{n-1}{2}} \right) \underline{\underline{\mathbf{D}}}
\end{aligned} \tag{IV.23}$$

Cette loi donne la relation classique $\sigma_{12} = \tau_s + m \dot{\gamma}^n$ (avec $\dot{\gamma} > 0$) en cisaillement simple.

V. RHÉOMÉTRIE

Un fluide ou matériau ne peut être caractérisé que lors d'écoulements simples, en particulier dans des écoulements de cisaillement et d'élongation. Ensuite, une fois caractérisé, on pourra proposer une loi de comportement en 3D et prédire son écoulement dans des géométries quelconques, en particulier au cours de procédés complexes (extrusion, injection, couchage, adhésion, mélangeage, etc.).

A. Essais de cisaillement

L'écoulement de référence est le cisaillement simple. Nous l'avons rencontré précédemment, il est défini par le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ qui intervient dans l'écoulement de cisaillement simple $\vec{\mathbf{v}} = (\dot{\gamma}x_2, 0, 0)$. Le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\Sigma}}$ possède alors les contraintes suivantes qui sont non nulles :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \tag{V.1}$$

On peut donc définir les **fonctions viscosimétriques** : la viscosité de cisaillement ($Pa.s$) et les coefficients associés aux différences des contraintes normales ($Pa.s^2$) permettant d'éliminer le terme de pression qui apparaît dans les lois de comportement :

$$\eta(\dot{\gamma}) = \frac{\sigma_{12}}{\dot{\gamma}} \tag{V.2}$$

$$\psi_1(\dot{\gamma}) = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{\dot{\gamma}^2} \tag{V.3}$$

$$\psi_2(\dot{\gamma}) = \frac{\sigma_{22} - \sigma_{33}}{\dot{\gamma}^2} \tag{V.4}$$

Ces grandeurs sont particulièrement bien adaptées aux essais à **taux de déformation imposé**, qui sont souvent utilisés en rhéométrie. Des exemples de telles fonctions viscosimétriques ont été déjà présentés en figures IV.1 et IV.3.

Pour obtenir ces grandeurs, cependant, on doit opérer en **régime transitoire**, c'est à dire procéder à un saut qui fait passer d'une vitesse nulle à une vitesse $\dot{\gamma}_0$ (Fig. V.1). On remarque que la viscosité monte doucement pour atteindre un plateau, alors que pour des taux de déformations élevés, elle présente un maximum ("overshoot"), caractéristique de l'élasticité aux temps courts.

La valeur limite de la contrainte aux temps longs définit le régime permanent qui correspond aux définitions précédentes. Par contre, on définit la viscosité transitoire $\eta^+(t, \dot{\gamma})$ et les coefficients associés aux contraintes normales $\psi_1^+(t, \dot{\gamma})$, $\psi_2^+(t, \dot{\gamma})$ en régime transitoire, lorsque le taux de déformation augmente (d'où l'exposant +) :

$$\eta^+(t, \dot{\gamma}) = \frac{\sigma_{12}(t, \dot{\gamma})}{\dot{\gamma}} \tag{V.5}$$

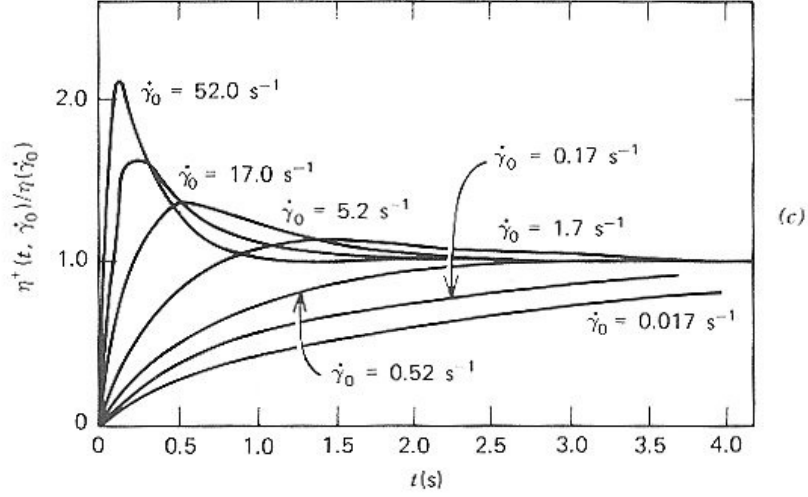


FIG. V.1: Viscosité transitoire normalisée [10].

$$\psi_1^+(t, \dot{\gamma}) = \frac{(\sigma_{11} - \sigma_{22})(t, \dot{\gamma})}{\dot{\gamma}^2} \quad (\text{V.6})$$

$$\psi_2^+(t, \dot{\gamma}) = \frac{(\sigma_{22} - \sigma_{33})(t, \dot{\gamma})}{\dot{\gamma}^2} \quad (\text{V.7})$$

Les résultats du régime permanent apparaissent comme des limites des expressions précédentes : $\eta(\dot{\gamma}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \eta^+(t, \dot{\gamma})$, $\psi_1(\dot{\gamma}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi_1^+(t, \dot{\gamma})$, $\psi_2(\dot{\gamma}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi_2^+(t, \dot{\gamma})$.

Par exemple, la Fig.V.1 illustre les propriétés d'un fluide non-Newtonien, en régime transitoire. On a porté la viscosité transitoire normalisée par sa valeur limite $\frac{\eta^+(t, \dot{\gamma})}{\eta(\dot{\gamma})}$ en fonction du temps. La limite aux temps longs est donc égale à 1. On note à nouveau la présence d'un maximum pour des taux de cisaillement élevés.

Dans le cas du régime à **contrainte imposée**, appelé encore **fluage**, les résultats suivants sont obtenus (Fig.V.2), pour des matériaux élastique, Newtonien, et viscoélastique.

Admettons que le raisonnement soit appliqué au cisaillement.

- Dans le cas du matériau élastique, la déformation suit la contrainte appliquée, et la déformation sur le plateau vaut $\gamma_0 = \tau_0/G$, si G est le module de cisaillement. Le matériau élastique revient à son état initial dès que la contrainte est arrêtée.
- Dans le second cas (fluide visqueux), la contrainte appliquée impose un taux de déformation constant $\dot{\gamma}_0 = \tau_0/\eta$, si η est la viscosité. Il y a ensuite une déformation résiduelle qui subsiste après application de la contrainte : $\gamma_r = \dot{\gamma}_0(t_1 - t_0)$.
- Enfin, le cas du matériau viscoélastique est mixte. Un saut aux temps courts après l'application de la contrainte est à noter au démarrage. Ensuite un régime permanent est obtenu après le transitoire. A la relaxation, le même saut à l'envers est observé (temps courts) puis une phase de relaxation de la déformation suit. Ceci donne lieu à la présence d'une déformation résiduelle γ_r . On définit la **fonction fluage** $f(t) = \frac{\gamma(t)}{\tau_0}$.

Le dernier type d'essai est l'essai en **cisaillement dynamique**. Une déformation sinusoïdale est appliquée, de la forme $\gamma = \gamma_0 \sin(\omega t)$. La contrainte est supposée varier à la même fréquence ω et est de la forme $\tau = \tau_0 \sin(\omega t + \varphi)$. L'une des composantes de la déformation est en phase avec γ (réponse élastique), et l'autre en opposition de phase, donc en phase avec $\dot{\gamma}$ (réponse visqueuse). On définit ainsi les modules G' et G'' qui sont respectivement les modules élastique et de perte. Ils sont définis par $G' \gamma_0 = \tau_0 \cos \varphi$ et $G'' \gamma_0 = \tau_0 \sin \varphi$. L'angle de perte, φ , est donné par :

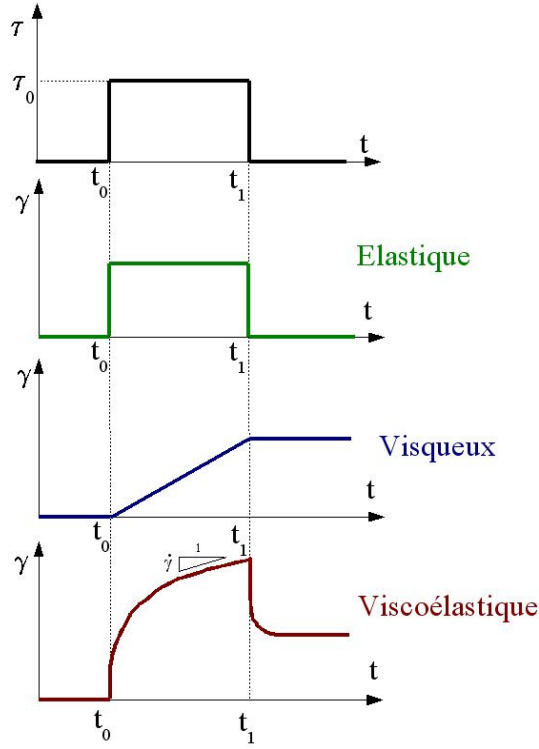


FIG. V.2: Essai de fluage (contrainte imposée) suivi de relaxation.

$$\tan\varphi = \frac{G''}{G'} \quad (\text{V.8})$$

et on définit, en variables complexes, le module G^* :

$$G^* = G' + i G'' \quad (\text{V.9})$$

ainsi que la viscosité dynamique $\eta^* = \frac{G^*}{i\omega}$:

$$\eta^* = \eta' - i\eta'' = \frac{G''}{\omega} - i\frac{G'}{\omega} \quad (\text{V.10})$$

Les modules G' et G'' sont déterminés dans le domaine des petites déformations, ou **domaine linéaire**, soit le domaine où ils restent constant en fonction de la déformation appliquée γ_0 . Ceci est très important car les autres types d'expériences sont précisément effectuées hors domaine linéaire. Il ne suffit donc pas de déterminer G' et G'' pour TOUT connaître d'un matériau viscoélastique ... en particulier sa loi de comportement.

La figure suivante (Fig.V.3) illustre les différents domaines d'un polymère, obtenus par application du principe de superposition temps-température, qui s'applique ici aussi. G' et G'' sont à remplacer par $b_T G'$ et $b_T G''$, et sont représentés en fonction de $a_T \omega$:

- Basses fréquences. Domaine Newtonien. G' et G'' ont des pentes de 2 et 1 respectivement. $G'' \sim \eta_0 \omega$.
- Croisement de G' et G'' en ω_c peut-être utilisé pour déterminer un temps caractéristique $\lambda = \frac{1}{\omega_c}$.
- Fréquences intermédiaires. Domaine caoutchoutique. $G' \sim G_N^0$ constante du polymère sur plusieurs décades. $G_N^0 \sim 10^6 \text{ Pa}$. G'' décroît, passe par un minimum, puis remonte doucement.

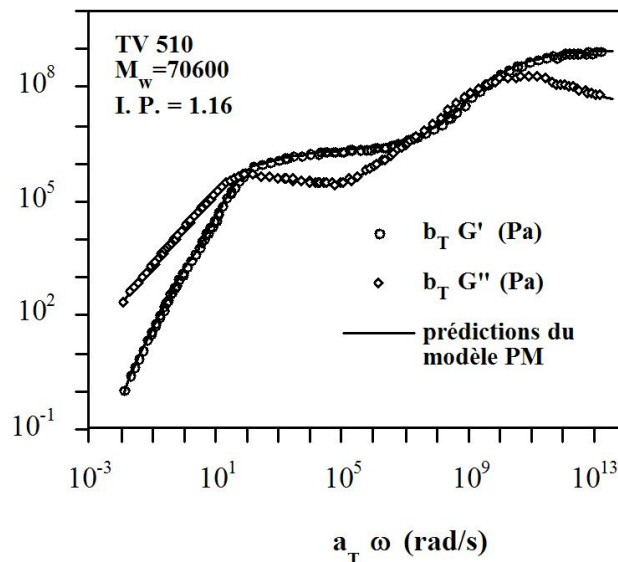


FIG. V.3: Courbe maîtresse dynamique des modules (G' , G'') d'un PolyButadiène [33]. La modélisation représente l'approximation par un modèle de Maxwell généralisé.

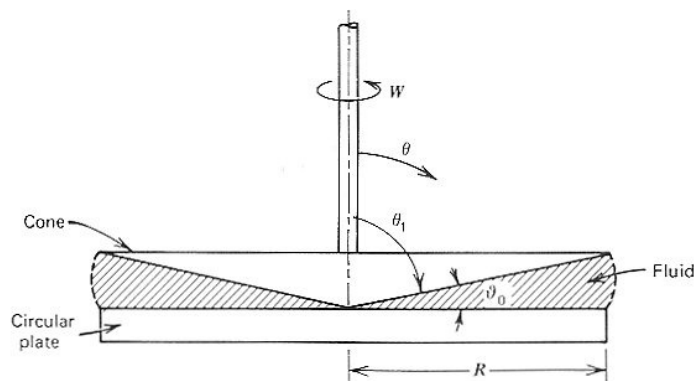


FIG. V.4: Schéma du rhéomètre cône-plan.

- Les modules G' et G'' montent ensemble avec $G' \sim G'' \sim \omega^\alpha$ avec $0.5 \leq \alpha \leq 0.8$ en général. Transition vitreuse.
- Domaine solide. $G' \sim 10^9 Pa$ tend vers une constante. G'' redescend doucement.

N.B. Dans le cas d'un fluide à seuil, le domaine d'écoulement aux basses fréquences est remplacé par un plateau pour les modules G' et G'' , dont l'ordre de grandeur est celui du seuil de contrainte (voir §3).

Afin de mesurer les propriétés des fluides viscoélastiques, on doit appliquer un cisaillement qui peut engendrer de grandes déformations, comme vu précédemment. Il a été judicieux d'utiliser des rhéomètres rotatifs, de manière à ce que le fluide ne soit pas entraîné à l'infini. Mais il existe cependant des rhéomètres capillaires. Voyons maintenant les types couramment utilisés :

- **Le rhéomètre cône-plan** (Fig.V.4)

Il présente l'avantage d'imposer un **taux de cisaillement constant** lorsque l'angle du cône est petit (typiquement 2 ou 4 degrés). Les formules de travail sont les suivantes, en coordonnées sphériques :

$$\vec{v} = (0, 0, v_\varphi(r, \theta)).$$

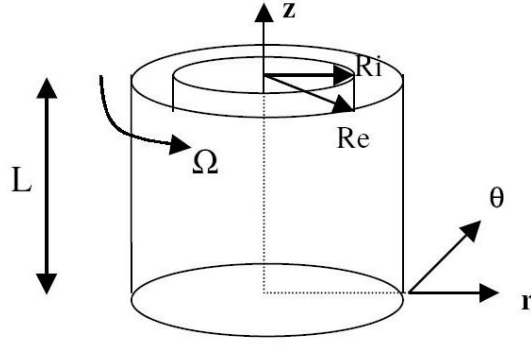


FIG. V.5: Schéma du rhéomètre de Couette.

$$\underline{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{\gamma}}{2} \\ 0 & \frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{V.11})$$

et

$$\underline{\mathbf{\Sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta\varphi} \\ 0 & \sigma_{\theta\varphi} & \sigma_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} \quad (\text{V.12})$$

Le taux de cisaillement, au second ordre en α (angle du cône), est constant donné par :

$$\dot{\gamma} = \frac{\Omega}{\alpha} \quad (\text{V.13})$$

où Ω désigne la vitesse de rotation angulaire du plateau supérieur où est mesuré le couple M . Ce dernier vaut :

$$M = \frac{2\pi R^3 \sigma_{\theta\varphi}}{3} \quad (\text{V.14})$$

R est le rayon inférieur du plateau. A l'aide de la mesure de M , on en déduit la contrainte de cisaillement et la viscosité $\eta = \frac{\sigma_{\theta\varphi}}{\dot{\gamma}}$. Quant à la première différence des contraintes normales, elle vaut :

$$\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta} = \frac{2F}{\pi R^2} \quad (\text{V.15})$$

où F est la force mesurée sur le plateau supérieur. Il vient $\psi_1 = \frac{\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta}}{\dot{\gamma}^2}$.

• Le rhéomètre de Couette

Le rhéomètre de Couette permet aussi d'appliquer un taux de cisaillement constant, sous certaines conditions. Considérons le schéma de la Fig.V.5. Le fluide est confiné entre deux cylindres coaxiaux, l'un fixe (intérieur, par exemple), l'autre (extérieur) tournant à la vitesse angulaire Ω . On a alors $\vec{v} = (0, v_\theta(r), 0)$, et ainsi :

$$\underline{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\frac{dv_\theta}{dr} - \frac{v_\theta}{r}) & 0 \\ \frac{1}{2}(\frac{dv_\theta}{dr} - \frac{v_\theta}{r}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{V.16})$$

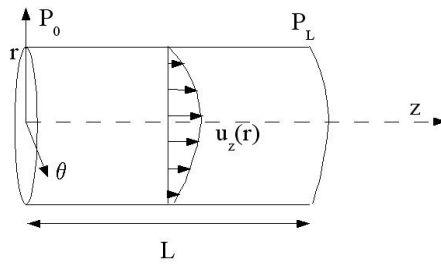


FIG. V.6: Schéma du rhéomètre capillaire.

Le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ vaut alors $\dot{\gamma} = \frac{dv_\theta}{dr} - \frac{v_\theta}{r}$. Notons qu'une solution du type $v_\theta(r) = Kr$ correspond à un écoulement non cisailé. Lorsque l'entrefer est petit devant le rayon : $R_e - R_i \ll R_e$ ou R_i , alors le champ de vitesse s'écrit simplement :

$$v_\theta(r) = \Omega R_e \frac{r - R_i}{R_e - R_i} \quad (\text{V.17})$$

et le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ est alors constant, égal à :

$$\dot{\gamma} = \Omega \frac{R_e}{R_e - R_i} \quad (\text{V.18})$$

Les contraintes sont données par :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & 0 \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (\text{V.19})$$

La viscosité est donnée par $\eta(\dot{\gamma}) = \frac{\sigma_{r\theta}}{\dot{\gamma}}$. Quant à la contrainte de cisaillement, elle est mesurée sur le cylindre extérieur via le couple M , et elle vaut $\sigma_{r\theta} = \frac{M}{2\pi R_e^2 L}$. La mesure des contraintes normales n'est pas simple et ce type de rhéomètre n'est pas en général utilisé pour cette mesure. Par contre, il est très utile pour les fluides peu visqueux (eau, solutions de polymères, etc.) car le fluide est en général placé dans un système fermé qui évite qu'il s'écoule à l'extérieur.

• Le rhéomètre capillaire

Les tubes capillaires ont été les premiers utilisés pour mesurer la viscosité des fluides Newtoniens. Ils sont encore très utilisés : on mesure le temps nécessaire à un fluide pour parcourir une distance donnée, sous l'action de son poids uniquement, et si l'appareil est bien calibré, on en déduit la viscosité. Bien que ne permettant pas d'effectuer des essais à taux de cisaillement constant (comme le rhéomètre plan-plan, non présenté ici), le rhéomètre capillaire est très utilisé pour son côté pratique, en particulier pour les écoulements de polymères fondus. Il consiste à imposer un gradient de pression dans un tube pour appliquer des efforts de cisaillement. Le cisaillement n'est pas constant et varie en fonction de r (Fig. V.6).

L'expression de $\underline{\underline{D}}$, en coordonnées cylindriques, est :

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{dv_z}{dr} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{dv_z}{dr} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{V.20})$$

et les composantes des contraintes :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{rz} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (\text{V.21})$$

La viscosité η est donnée par $\eta = \frac{\sigma_{rz}}{\dot{\gamma}}$; le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ est pris positif et s'exprime en fonction de $v_z(r)$ par $\dot{\gamma} = -\frac{dv_z}{dr}$, puisque la vitesse est maximale sur l'axe (où $\dot{\gamma} = 0$) et décroît lorsque l'on va vers la paroi $r = R$ où $v_z(r = R) = 0$. Dans l'expression de η , les fonctions dépendent de r , c'est pourquoi on évalue la contrainte σ_{rz} et $\dot{\gamma}$ en $r = R$. De plus, par intégration de l'équation de conservation de la quantité de mouvement, il vient $\sigma_{rz} = -\frac{P_L - P_0}{L} \frac{r}{2}$, qui permet de calculer $\sigma_{rz}(r = R)$, connaissant la différence de pression. Pour un fluide avec une loi de comportement donnée, on n'a pas forcément accès au champ de vitesse, vue la complexité des lois de comportements, cependant dans le cas du fluide en loi puissance (Eq.IV.12), on peut calculer de manière exacte le champ de vitesse :

$$v_z(r) = \frac{Q}{\pi R^2} \frac{3n+1}{n+1} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{1}{n}+1} \right] \quad (\text{V.22})$$

Pour $n = 1$, on retrouve le profil parabolique (Poiseuille) du fluide Newtonien. Le taux de cisaillement à la paroi est évalué par :

$$\dot{\gamma}(R) = \frac{Q}{\pi R^3} \frac{3n+1}{n} \quad (\text{V.23})$$

Le débit Q et la différence de pression $\Delta P = P_0 - P_L \geq 0$, les grandeurs mesurées, sont liés par la relation $Q = \frac{\pi R^3}{\frac{1}{n}+3} \left(\frac{(P_0 - P_L)R}{2Lm} \right)^{\frac{1}{n}}$. On peut alors tracer $\log(\Delta P)$ en fonction de $\log(Q)$, qui donne une droite de pente n , ainsi que la valeur du coefficient m . Vu que les polymères fondus obéissent souvent à cette relation en loi puissance, le rhéomètre capillaire est assez souvent utilisé avec ce type de fluides complexes.

B. Essais en élongation

Un écoulement élongationnel uniaxial est donné par le champ de vitesse

$$\vec{v} = (\dot{\epsilon}x_1, -\frac{\dot{\epsilon}}{2}x_2, -\frac{\dot{\epsilon}}{2}x_3) \quad (\text{V.24})$$

On a alors :

$$\underline{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\dot{\epsilon}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\dot{\epsilon}}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{V.25})$$

C'est un écoulement simple qui permet d'avoir accès à la viscosité élongationnelle définie par :

$$\eta_E^+(t, \dot{\epsilon}) = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{\dot{\epsilon}}(t, \dot{\epsilon}) \quad (\text{V.26})$$

La viscosité élongationnelle tend vers un plateau lorsque le taux d'élongation est suffisamment faible. Dans le cas contraire, ce plateau n'est pas défini, et la limite n'existe pas. On peut donc, dans certains cas, écrire:

$$\eta_E(\dot{\epsilon}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \eta_E^+(t, \dot{\epsilon}) \quad (\text{V.27})$$

Cette limite doit, en principe, représenter le cas du fluide Newtonien, lorsque $\dot{\epsilon} \rightarrow 0$, c'est à dire tendre vers la valeur de $3\eta_0$.

D'autres types d'écoulements élongationnels peuvent être considérés, correspondant à un tenseur des déformations $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$, donné, sous forme matricielle, par :

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon} & 0 & 0 \\ 0 & m\dot{\epsilon} & 0 \\ 0 & 0 & -(m+1)\dot{\epsilon} \end{pmatrix} \quad (\text{V.28})$$

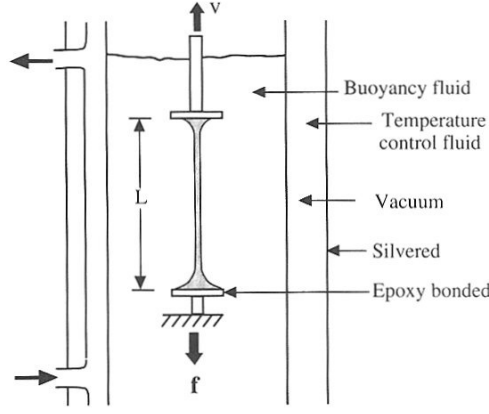


FIG. V.7: Schéma d'une machine de traction de polymère fondu dans un bain de même densité [10].

On définit alors deux viscosités élongationnelles transitoires par :

$$\eta_1^+(t, \dot{\epsilon}) = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{33}}{2(2 + m)\dot{\epsilon}}(t, \dot{\epsilon}) \quad (\text{V.29})$$

$$\eta_2^+(t, \dot{\epsilon}) = \frac{\sigma_{22} - \sigma_{33}}{2(1 + 2m)\dot{\epsilon}}(t, \dot{\epsilon}) \quad (\text{V.30})$$

m est parfois nommé le rapport des élongations car $\dot{\epsilon}_{11} = \dot{\epsilon}$, $\dot{\epsilon}_{22} = m\dot{\epsilon}$, $\dot{\epsilon}_{33} = -(1 + m)\dot{\epsilon}$. d'où $m = \frac{\dot{\epsilon}_{22}}{\dot{\epsilon}_{11}}$.

Dans le cas $m = -\frac{1}{2}$, on retrouve la viscosité élongationnelle uniaxiale, $\eta_1^+(t, \dot{\epsilon})$, équivalente à $\eta_E^+(t, \dot{\epsilon})$, et par contre $\eta_2^+(t, \dot{\epsilon})$ n'est pas définie.

Les expériences sont difficiles à réaliser car de tels écoulements sont rares. On notera comme techniques :

- Traction (machine à deux ou quatre rouleaux)
- Traction dans un bain à vitesse d'étirement exponentielle $V = \dot{\epsilon}L_0$ (L_0 longueur initiale de l'échantillon) comme sur la Figure V.7
- Compression entre deux plaques
- Etirement de plaques polymères planes (Meissner)
- Enroulement de fibre (ou "fiber-spinning")
- Compression de bulle
- Jets opposés (pour matériaux très fluides)
- Contraction avec identification de la zone centrale d'élongation

Les résultats habituels obtenus sur des fluides polymères sont présentés sur la figure V.8.

Ces résultats illustrent le fait que la viscosité transitoire peut présenter un plateau aux temps longs, lorsque $\dot{\epsilon}$ est petit, et par contre, dans le cas contraire la limite n'est pas forcément définie. Dans certains cas cependant, certains auteurs ont pu tracer des courbes de viscosité élongationnelle $\eta_E(\dot{\epsilon})$ en régime permanent (voir Fig.V.9).

Le modèle de Maxwell, qui sera présenté dans la dernière partie, illustre ces aspects, et donne une évolution typique de la viscosité élongationnelle transitoire sous forme analytique :

$$\eta_E^+(t, \dot{\epsilon}) = \frac{G}{\dot{\epsilon}}((e^{2\dot{\epsilon}t} - e^{-\dot{\epsilon}t})e^{-t/\lambda} + \frac{1 - e^{-(\frac{1}{\lambda} - 2\dot{\epsilon})t}}{1 - 2\lambda\dot{\epsilon}} - \frac{1 - e^{-(\frac{1}{\lambda} + \dot{\epsilon})t}}{1 + \lambda\dot{\epsilon}}) \quad (\text{V.31})$$

Ce modèle prédit deux cas :

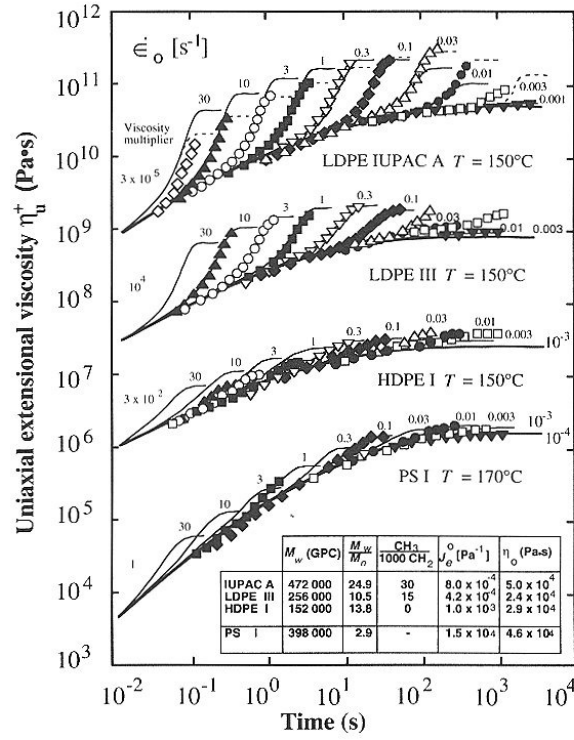


FIG. V.8: Courbes de viscosités élongationnelles transitoires pour différents polymères [10].

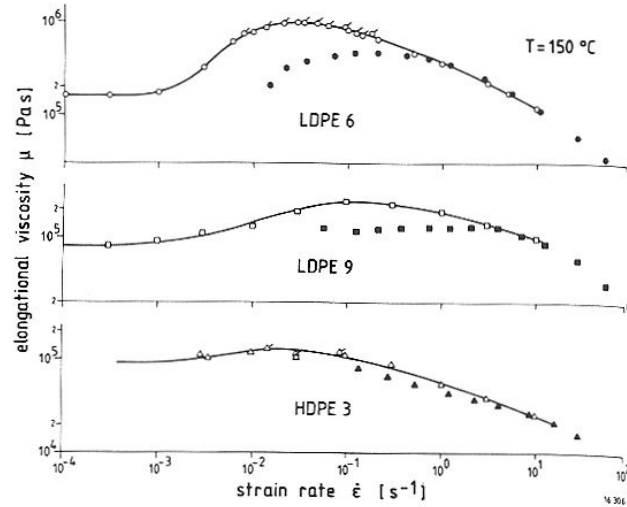


FIG. V.9: Régime permanent de viscosité élongationnelle pour du Polyéthylène Basse et Haute densité [10].

- $\dot{\epsilon} \leq \frac{1}{2\lambda}$ La viscosité élongationnelle existe et vaut $\eta_E(\dot{\epsilon}) = \frac{3G\lambda}{(1-2\lambda\dot{\epsilon})(1+\lambda\dot{\epsilon})}$, fonction croissante qui diverge et devient infinie pour $\dot{\epsilon} = \frac{1}{2\lambda}$.
- $\dot{\epsilon} \geq \frac{1}{2\lambda}$ La viscosité transitoire n'atteint pas de plateau et se comporte comme $\eta_E^+(t, \dot{\epsilon}) \approx \frac{2\eta_0}{2\lambda\dot{\epsilon}-1} e^{(2\dot{\epsilon}-\frac{1}{\lambda})t}$

Pour les temps faibles ($t \rightarrow 0$), on retrouve la loi élastique $\sigma_{11} - \sigma_{22} = 3G\dot{\epsilon}t = 3G\epsilon$ dans les deux cas (voir Fig.III.1).

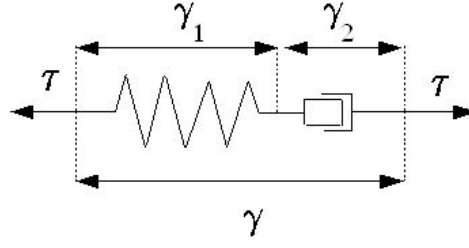


FIG. VI.1: Schéma du modèle de Maxwell

VI. LOIS DE COMPORTEMENT VISCOÉLASTIQUES

A. Modèles 1D

Afin d'aborder le modèle viscoélastique, nous allons tout d'abord étudier le cas d'un assemblage simple en série d'un ressort et d'un amortisseur. Ce système (Fig. VI.1) a l'avantage de présenter une grande partie des propriétés des fluides viscoélastiques.

Ecrivons les lois des assemblages en série: $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, où γ_1 est la déformation du ressort tandis que γ_2 est celle de l'amortisseur. Après dérivation et substitution, en utilisant $\tau = G\gamma_1$ et $\tau = \eta\dot{\gamma}_2$, il vient l'**équation différentielle** du modèle de Maxwell :

$$\lambda \dot{\tau} + \tau = \eta \dot{\gamma} \quad (\text{VI.1})$$

après avoir posé $\eta = G\lambda$, où λ est le temps de relaxation du fluide. On constate immédiatement que les comportements attendus, vus au chapitre 1, sont retrouvés. Si le fluide est sollicité rapidement, aux temps courts $t \ll \lambda$, alors la réponse est élastique et $\tau \sim G\gamma$. Sinon, lorsque $\lambda \ll t$, alors la réponse est visqueuse et $\tau \sim \eta\dot{\gamma}$.

Lorsqu'aucune vitesse de déformation n'est appliquée, alors le fluide relaxe ses contraintes et la solution de l'équation $\lambda \dot{\tau} + \tau = 0$ est simplement $\tau = \tau_0 e^{-\frac{t}{\lambda}}$, la contrainte chute vers 0 avec le temps caractéristique de relaxation λ , où τ_0 est la contrainte initiale. De même, si une vitesse $\dot{\gamma}_0$ est appliquée, alors la solution est $\tau(t) = \eta\dot{\gamma}_0(1 - e^{-\frac{t}{\lambda}})$, ce qui indique une montée avec un temps caractéristique λ , et un plateau qui permet le calcul de la viscosité $\frac{\tau}{\dot{\gamma}} = \eta$ (constante dans ce cas).

Dans le cas général, la solution est obtenue par intégration de (VI.1) : $\lambda e^{-\frac{t}{\lambda}} \frac{d}{dt}(\tau(t)e^{\frac{t}{\lambda}}) = \eta\dot{\gamma}$, ce qui donne maintenant la **forme intégrale** du modèle :

$$\tau(t) = \int_{-\infty}^t G e^{-\frac{(t-t')}{\lambda}} \dot{\gamma}(t') dt' \quad (\text{VI.2})$$

si l'on suppose aucune déformation à des temps très reculés. Cette intégrale indique que la contrainte dépend de l'histoire des déformations (ou des taux de déformations) antérieurs avec un multiplicateur qui est la **fonction relaxation** $G(t) = G e^{-\frac{t}{\lambda}}$, ce multiplicateur est d'autant plus grand que les instants en question sont proches. **Le fluide se souvient de son histoire récente.**

De manière générale, toute fonction $G(t)$ décroissante, finie en $t = 0$, et convexe, est un bon candidat pour décrire une loi viscoélastique avec mémoire. On peut d'ailleurs envisager une somme de fonction de type Maxwell, qui correspondrait à l'association de n (ressort+amortisseur) en série. On aura alors :

$$G(t) = \sum_{i=1}^n G_i e^{-\frac{t}{\lambda_i}} \quad (\text{VI.3})$$

La fonction $G(t)$, représentée en échelle log-log, débute par un plateau aux temps courts puis décroît. En fait, cette fonction s'écrit $G(t, \gamma)$, et tend vers $G(t)$ lorsque $\gamma \rightarrow 0$. Si on compare $G(t)$ avec des courbes réelles obtenues sur un polymère fondu (Fig. VI.2), on constate qu'on pourra l'approcher par une somme du type précédent.

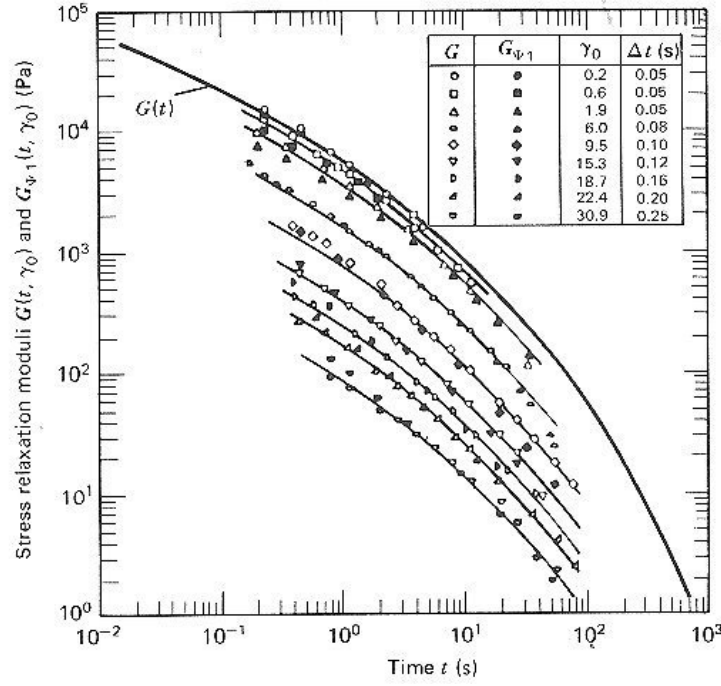


FIG. VI.2: Module de relaxation et première différence des contraintes normales, après un saut en cisaillement [10].

Dans le cas de sollicitation de type fluage (voir Fig.V.2), on introduit une deuxième fonction appelée **fonction fluage** qui vaut $f(t) = \gamma(t)/\tau_0$, où τ_0 est la contrainte imposée. Dans ce cas, pour le modèle de Maxwell, on trouve $f(t) = \frac{1}{G} + \frac{t}{\eta}$. La valeur initiale en $t = 0$ indique la présence d'élasticité instantanée.

Remarque: Dans le cas d'assemblages multiples, l'utilisation de la transformation de Laplace peut permettre de trouver ces deux fonctions fluage et relaxation qui sont reliées entre elles de manière très simple.

Intéressons nous maintenant au cas des essais harmoniques pour le modèle de Maxwell. On rappelle qu'à une déformation sinusoidale $\gamma = \gamma_0 \sin(\omega t)$ est associée une contrainte sinusoidale $\tau = \tau_0 \sin(\omega t + \varphi)$. Les modules élastique et visqueux sont $G' = \frac{\tau_0}{\gamma_0} \cos(\varphi)$ et $G'' = \frac{\tau_0}{\gamma_0} \sin(\varphi)$.

En variables complexes, $\gamma^* = \gamma_0 e^{i\omega t}$, $\tau^* = \tau_0 e^{i(\omega t + \varphi)}$, le module $G^* = \frac{\tau^*}{\gamma^*} = \frac{\tau_0}{\gamma_0} e^{i\varphi}$, or en réécrivant (VI.1), il vient $(1 + i\omega\lambda) \tau^* = \eta i\omega \gamma^*$. Le module résultant G^* est donc :

$$G^* = G \frac{i\omega\lambda}{1 + i\omega\lambda} \quad (\text{VI.4})$$

De ce fait, les modules élastique (G') et de perte (G'') s'écrivent :

$$G'(\omega) = G \frac{\omega^2 \lambda^2}{1 + \omega^2 \lambda^2} \quad (\text{VI.5})$$

$$G''(\omega) = G \frac{\omega\lambda}{1 + \omega^2 \lambda^2} \quad (\text{VI.6})$$

Ces modules sont représentés graphiquement sur la figure (VI.3).

On retrouve le domaine Newtonien aux basses fréquences ($G' \ll G''$) et le domaine élastique ($G'' \ll G'$) aux grandes fréquences. Pour obtenir la courbe complète, comme celle de la Figure (V.3), il faut en général utiliser tout un spectre de temps de relaxation. Ce spectre peut être discret ou continu (Winter, 1986). Il existe de nombreuses études qui ont abordé ce sujet délicat. Le plus grand temps de relaxation est appelé temps caractéristique du polymère.

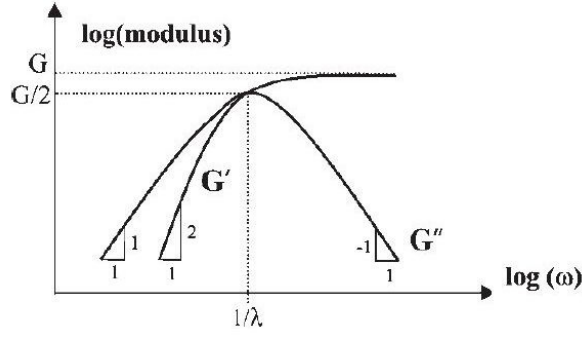


FIG. VI.3: Représentation schématique des modules G' et G'' en fonction de la fréquence (échelle log-log)

Signalons enfin les équivalences entre fonction relaxation $G(t)$ et module dynamique $G^*(\omega)$:

$$G^*(\omega) = i\omega \int_0^\infty G(s) e^{-i\omega s} ds \quad (\text{VI.7})$$

ainsi que les deux relations :

$$\eta^+(t) = \int_0^t G(s) ds, \quad \eta_0 = \int_0^\infty G(s) ds \quad (\text{VI.8})$$

B. Modèles 3D

Nous allons maintenant raisonner sur le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\Sigma}} = -p\underline{\underline{\mathbf{I}}} + \underline{\underline{\tau}}$. C'est sur $\underline{\underline{\tau}}$ que vont porter les lois de comportement. Pour généraliser les notions précédentes au 3D, en particulier la loi de comportement (VI.1), il est nécessaire d'avoir connaissance du principe d'invariance matérielle des lois de comportement, c'est à dire que chaque loi de comportement doit s'écrire de la même façon indépendamment du référentiel. Les grandeurs qui interviennent, tenseurs ou vecteurs doivent être objectives, ce qui interdit certaines possibilités. Nous savons que parmi les tenseurs objectifs, $\underline{\underline{\Sigma}}$, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ sont des bons candidats. Par contre, dès lors que l'on souhaite faire intervenir une dérivée de tenseur, il faut prendre certaines précautions afin que celle-ci soit objective. On peut démontrer qu'il existe en fait peu de dérivées temporelles objectives. Les plus importantes sont la dérivée convectée supérieure ou d'Oldroyd (VI.9), la dérivée convectée inférieure (VI.10), et la dérivée corotationnelle (VI.11) :

$$\underline{\underline{\overset{\nabla}{\tau}}} = \underline{\underline{\dot{\tau}}} - \underline{\underline{\text{grad}\vec{\mathbf{v}}}} \underline{\underline{\tau}} - \underline{\underline{\tau}} (\underline{\underline{\text{grad}\vec{\mathbf{v}}}})^T \quad (\text{VI.9})$$

$$\underline{\underline{\underline{\Delta}}} = \underline{\underline{\dot{\tau}}} + \underline{\underline{\tau}} \underline{\underline{\text{grad}\vec{\mathbf{v}}}} + (\underline{\underline{\text{grad}\vec{\mathbf{v}}}})^T \underline{\underline{\tau}} \quad (\text{VI.10})$$

$$\underline{\underline{\overset{\circ}{\tau}}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\overset{\nabla}{\tau}}} + \underline{\underline{\underline{\Delta}}}) = \underline{\underline{\dot{\tau}}} + \underline{\underline{\tau}} \underline{\underline{\underline{\Omega}}} - \underline{\underline{\underline{\Omega}}} \underline{\underline{\tau}} \quad (\text{VI.11})$$

où $\underline{\underline{\tau}}$ est supposé symétrique et $\underline{\underline{\dot{\tau}}} = \frac{\partial}{\partial t} \underline{\underline{\tau}} + \vec{\mathbf{v}} \cdot \nabla \underline{\underline{\tau}}$ et où $\underline{\underline{\underline{\Omega}}}$ a été défini précédemment (Eq. II.43). De manière générale, les dérivées objectives s'écrivent comme des combinaisons des deux premières dérivées (VI.9), (VI.10) sous la forme :

$$\underline{\underline{\overset{\diamond}{\tau}}} = (1-a) \underline{\underline{\overset{\nabla}{\tau}}} + a \underline{\underline{\underline{\Delta}}} \quad (\text{VI.12})$$

On retrouve les 3 cas précédents qui correspondent respectivement à $a = 0$, $a = 1$, et $a = \frac{1}{2}$.

Nous pouvons maintenant généraliser l'équation (VI.1), en introduisant les grandeurs adaptés, ce qui donne par exemple pour la première dérivée, **le modèle de Maxwell sous sa forme différentielle** (avec dérivée convectée supérieure) :

$$\lambda \frac{\nabla}{\underline{\underline{\tau}}} + \underline{\underline{\tau}} = 2\eta \underline{\underline{\mathbf{D}}} \quad (\text{VI.13})$$

Les autres modèles de ce type se déduisent en remplaçant la dérivée par une autre dérivée objective. Le modèle qui est obtenu avec la dérivée de l'équation (VI.12) est appelé modèle de Johnson-Segalman.

Exercice : Montrer qu'en régime de cisaillement transitoire, la viscosité transitoire du modèle de maxwell de l'équation (VI.13) est : $\eta^+(t, \dot{\gamma}) = \eta(1 - e^{-\frac{t}{\lambda}})$, et prouver aussi que $\psi_1^+(t, \dot{\gamma}) = 2\eta\lambda(1 - e^{-\frac{t}{\lambda}}(1 + \frac{t}{\lambda}))$. En déduire que ce modèle ne prévoit pas de rhéofluidification, ni de dépendance de la première différence des contraintes normales ψ_1 en fonction de $\dot{\gamma}$.

Exercice : Montrer que pour le modèle de Johnson-Segalman, les paramètres viscosimétriques valent :

$\eta(\dot{\gamma}) = \frac{\eta}{1+4a(1-a)\lambda^2\dot{\gamma}^2}$, $\psi_1(\dot{\gamma}) = \frac{2\lambda\eta}{1+4a(1-a)\lambda^2\dot{\gamma}^2}$, $\psi_2(\dot{\gamma}) = \frac{-2a\lambda\eta}{1+4a(1-a)\lambda^2\dot{\gamma}^2}$. En déduire le caractère rhéofluidifiant de ce fluide. La pente limite ($\dot{\gamma} \rightarrow \infty$) de -2 pour la viscosité est cependant trop grande pour des polymères. Remarquer que $\psi_1 \geq 0$ et $\psi_2 \leq 0$, ce qui est correct. Montrer que $\frac{N_2}{N_1} = \frac{\psi_2}{\psi_1} = -a$. Dans le cas $a = 0.1$, ce résultat est conforme aux résultats expérimentaux.

L'exercice précédent fournit les résultats du cisaillement.

La viscosité élongationnelle a été calculée précédemment et vaut $\eta_E(\dot{\epsilon}) = \frac{3\eta}{(1-2\lambda\dot{\epsilon})(1+\lambda\dot{\epsilon})}$, lorsque $\dot{\epsilon} \leq \frac{1}{2\lambda}$. Cette divergence pose cependant un problème pour l'utilisation de ce modèle.

Le modèle d'Oldroyd-B est un modèle utilisé pour les solutions de polymères, il est issu de la décomposition du tenseur $\underline{\underline{\tau}}$ en une partie Newtonienne (solvant de viscosité η_s) et une partie viscoélastique (polymère, viscosité η_p , temps de relaxation λ) : $\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\tau}}_s + \underline{\underline{\tau}}_p$, où $\underline{\underline{\tau}}_s = 2\eta_s \underline{\underline{\mathbf{D}}}$ et où $\underline{\underline{\tau}}_p$ vérifie l'équation de Maxwell $\lambda \frac{\nabla}{\underline{\underline{\tau}}_p} + \underline{\underline{\tau}}_p = 2\eta_p \underline{\underline{\mathbf{D}}}$. L'équation finale pour $\underline{\underline{\tau}}$ s'écrit :

$$\lambda \frac{\nabla}{\underline{\underline{\tau}}} + \underline{\underline{\tau}} = 2\eta (\underline{\underline{\mathbf{D}}} + \lambda_r \frac{\nabla}{\underline{\underline{\mathbf{D}}}}) \quad (\text{VI.14})$$

Le temps de retard $\lambda_r = \lambda \frac{\eta_s}{\eta}$ est introduit ici.

Autres modèles :

- Le modèle de Criminale-Ericksen. C'est un modèle explicite pour $\underline{\underline{\tau}}$:

$$\underline{\underline{\tau}} = 2\eta \underline{\underline{\mathbf{D}}} - \psi_1 \frac{\nabla}{\underline{\underline{\mathbf{D}}}} + 4\psi_2 \underline{\underline{\mathbf{D}}} \underline{\underline{\mathbf{D}}} \quad (\text{VI.15})$$

Il ne prédit pas d'effets élastiques. C'est une généralisation du fluide du 2^{nd} ordre (Reiner-Rivlin). Il peut se généraliser avec des fonctions η , ψ_1 , et ψ_2 dépendant de $\dot{\gamma}$ et donner ainsi de bonnes prédictions en régime de cisaillement permanent.

- Le modèle de Giesekus (modèle non linéaire)

$$\lambda \frac{\nabla}{\underline{\underline{\tau}}} + \underline{\underline{\tau}} + \frac{\alpha\lambda}{\eta} \underline{\underline{\tau}} \underline{\underline{\tau}} = 2\eta \underline{\underline{\mathbf{D}}} \quad (\text{VI.16})$$

où α est une constante sans dimension. Il prédit de bons résultats en cisaillement mais ceux en élongation sont moins bons.

- Le modèle de Phan-Thien-Tanner (non linéaire)

$$\lambda \frac{\circ}{\underline{\underline{\tau}}} + \exp\left(\frac{\epsilon\lambda \text{tr}(\underline{\underline{\tau}})}{\eta}\right) \underline{\underline{\tau}} = 2\eta \underline{\underline{\mathbf{D}}} \quad (\text{VI.17})$$

où ϵ est une constante exprimée en Pa (module). Le modèle présente l'avantage d'éliminer la singularité pour $\dot{\epsilon} = \frac{1}{2\lambda}$. Par contre, les calculs des fonctions viscosimétriques doivent être effectués numériquement.

De la même manière que nous vu l'avons pour Maxwell 1D, nous pouvons maintenant exhiber une fonction intégrale équivalente à la formulation (VI.2). C'est la **formule intégrale du modèle de Maxwell** (à dérivée convectée supérieure) :

$$\underline{\underline{\tau}}(t) = \int_{-\infty}^t \frac{G}{\lambda} e^{-\frac{(t-t')}{\lambda}} (\underline{\underline{\mathbf{B}}}(t, t') - \underline{\underline{\mathbf{I}}}) dt' \quad (\text{VI.18})$$

où $\underline{\underline{\mathbf{B}}}(t, t') = \underline{\underline{\mathbf{F}}}(t) \underline{\underline{\mathbf{F}}}^T(t')$, avec t' un instant antérieur compris entre $-\infty$ et t . Ce modèle se généralise en considérant une fonction mémoire assez quelconque $M(t)$ (juste décroissante, finie en 0, et convexe) et comme la partie contenant le tenseur $\underline{\underline{\mathbf{I}}}$ peut être intégrée dans la partie isotrope, il vient la forme plus générale dite de Lodge :

$$\underline{\underline{\tau}}(t) = \int_{-\infty}^t M(t-t') \underline{\underline{\mathbf{B}}}(t, t') dt' \quad (\text{VI.19})$$

Pourquoi utiliser $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ plutôt que $\underline{\underline{\mathbf{B}}}^{-1}$ dans la formule précédente ? Généralisons encore cette dernière expression par l'ajout de $\underline{\underline{\mathbf{B}}}^{-1}$ à $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ et prenons des coefficients qui dépendent des invariants de $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$, comme nous l'avons fait en élasticité. Il vient alors la forme dite de K-BKZ (du nom des auteurs) :

$$\underline{\underline{\tau}}(t) = \int_{-\infty}^t \left[\frac{\partial U}{\partial I_B}(I_B, II_B, t-t') \underline{\underline{\mathbf{B}}}(t, t') - \frac{\partial U}{\partial II_B}(I_B, II_B, t-t') \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{-1}(t, t') \right] dt' \quad (\text{VI.20})$$

Cette forme fait apparaître une fonctionnelle énergétique $U(I_B, II_B, t)$. Ainsi on retrouve la signification des notions d'élasticité du chapitre III. Les contraintes sont des fonctions des déformations antérieures multipliées par la fonction mémoire, qui se souvient des événements les plus récents.

Enfin, la forme la plus souvent exprimée du modèle K-BKZ est celle dans laquelle la fonction U a été factorisée :

$$\underline{\underline{\tau}}(t) = \int_{-\infty}^t M(t-t') \left[2 \frac{\partial W}{\partial I_B}(I_B, II_B) \underline{\underline{\mathbf{B}}}(t, t') - 2 \frac{\partial W}{\partial II_B}(I_B, II_B) \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{-1}(t, t') \right] dt' \quad (\text{VI.21})$$

Ces modèles se sont révélés très pertinents pour la compréhension et la prédiction des contraintes en élongation, en particulier des améliorations significatives de ce modèle par Wagner (années 1980 – 1990) ont été obtenues.

VII. CONCLUSIONS

L'étude des fluides complexes qui a été présentée ici de façon succincte n'est qu'un avant-goût des travaux qui ont été menés et qui sont encore à l'ordre du jour. La meilleure démarche qui vise à la compréhension d'un fluide complexe pourrait être la suivante :

- Analyse microstructurale du matériau (Optique, MEB, diffusion de rayonnements, Tomographie, fluorescence, etc.)
- Elaboration d'expériences simples de caractérisation rhéométrique (cisaillement et élongation)
- Proposition d'une loi de comportement 3D au vu des résultats précédents
- Applications éventuelles à des procédés (extrusion, injection, couchage, adhésion, impression, etc.)
- Modélisation numérique

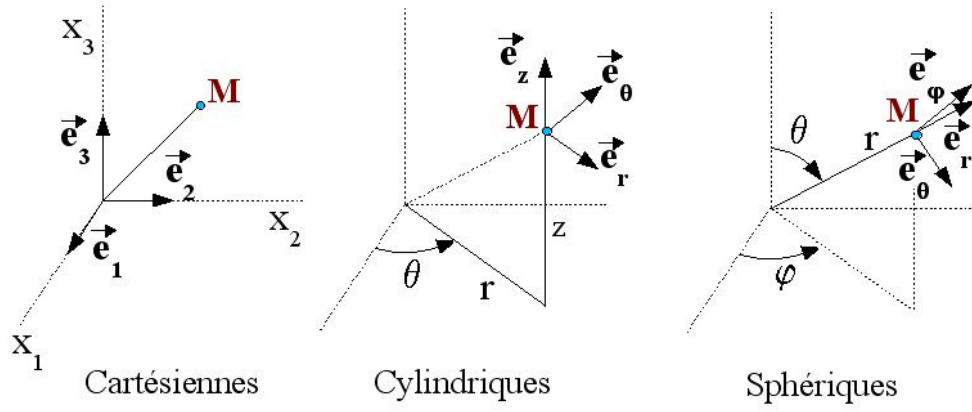


FIG. VIII.1: Systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques

VIII. ANNEXES

Lorsque l'on passe des coordonnées cartésiennes aux autres systèmes de coordonnées, il faut faire attention à l'expression des divers opérateurs, car les dérivés des composantes interviennent, mais aussi celles des vecteurs de base qui ne sont plus constantes, mais qui dépendent de ces mêmes coordonnées.

- Les vecteurs s'écrivent respectivement en cartésiennes, cylindriques et sphériques:

$$\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3 \quad (\text{VIII.1})$$

$$\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v_z \vec{e}_z \quad (\text{VIII.2})$$

$$\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v_\varphi \vec{e}_\varphi \quad (\text{VIII.3})$$

- L'opérateur divergence d'un vecteur $\vec{v}$ s'écrit :

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \quad (\text{VIII.4})$$

$$\text{div } \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{VIII.5})$$

$$\text{div } \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \quad (\text{VIII.6})$$

- Le Laplacien d'une fonction scalaire U s'écrit :

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2} \quad (\text{VIII.7})$$

$$\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (\text{VIII.8})$$

$$\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r U) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \quad (\text{VIII.9})$$

- Le Laplacien d'un vecteur $\vec{v}$:

$$\Delta \vec{v} = \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta v_3 \end{pmatrix} \quad (\text{VIII.10})$$

$$\Delta \vec{v} = \begin{pmatrix} \Delta v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2} \\ \Delta v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \\ \Delta v_z \end{pmatrix} \quad (\text{VIII.11})$$

$$\Delta \vec{v} = \begin{pmatrix} \Delta v_r - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial (v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2 v_r}{r^2} \\ \Delta v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \\ \Delta v_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (\text{VIII.12})$$

- Le gradient d'une fonction U :

$$\vec{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial U}{\partial x_3} \vec{e}_3 \quad (\text{VIII.13})$$

$$\vec{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z \quad (\text{VIII.14})$$

$$\vec{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \quad (\text{VIII.15})$$

- Le gradient d'un vecteur $\vec{v}$:

$$\underline{\text{grad}} \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (\text{VIII.16})$$

$$\underline{\text{grad}} \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right) & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{VIII.17})$$

$$\underline{\text{grad}} \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right) & \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} \right) \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) & \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\cot \theta}{r} v_\varphi \right) \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} & \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\cot \theta}{r} v_\theta + \frac{v_r}{r} \right) \end{pmatrix} \quad (\text{VIII.18})$$

- Le rotationnel d'un vecteur $\vec{v}$:

$$rot(\vec{v}) = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right)\vec{e}_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)\vec{e}_2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)\vec{e}_3 \quad (\text{VIII.19})$$

$$rot(\vec{v}) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z \quad (\text{VIII.20})$$

$$rot(\vec{v}) = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(v_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r v_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_\varphi \quad (\text{VIII.21})$$

- Enfin la divergence d'un tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$:

$$div(\underline{\underline{\sigma}}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (\text{VIII.22})$$

$$div(\underline{\underline{\sigma}}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} \\ \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} \\ \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} \end{pmatrix} \quad (\text{VIII.23})$$

$$div(\underline{\underline{\sigma}}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{r\varphi} \cot \theta}{r} \\ \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{3\sigma_{r\theta} + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \cot \theta}{r} \\ \frac{\partial \sigma_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{(3\sigma_{r\varphi} + 2\sigma_{\theta\varphi}) \cot \theta}{r} \end{pmatrix} \quad (\text{VIII.24})$$

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] J.F. Agassant, P. Avenas, J.-P. Sergent, B. Vergnes, M. Vincent, "La mise en forme des matières plastiques", Technique et Documentation, Lavoisier (1996)
- [2] P. Coussot, J.L. Grossiord, eds, "Comprendre la rhéologie", EDP Sciences (2001)
- [3] G. Couarraze, J.L. Grossiord, "Initiation à la rhéologie", Technique et documentation, Lavoisier, 3ème édition (2000)
- [4] P. Ostwald, "Rhéophysique: Ou comment coule la matière", Belin (2005)
- [5] R.B. Bird, R.C. Armstrong, and O. Hassager, "Dynamics of Polymeric Liquids. Vol. 1: Fluid Dynamics", Wiley, New York, 2nd édition (1987)
- [6] R.B. Bird, C.F. Curtiss, R.C. Armstrong, and O. Hassager, "Dynamics of Polymeric Liquids. Vol. 2: Kinetic Theory", Wiley, New York, 2ème édition (1987)
- [7] P.J. Carreau, D.C.R. de Kee, R.P. Chhabra, "Rheology of polymeric systems. Principles and applications", Hanser Publishers (1997)
- [8] R.G. Larson, "Constitutive equations for polymer melts and solutions", Butterworths, Boston (1988)
- [9] R.G. Larson, "The structure and rheology of complex fluids", Oxford University Press, New-York (1999)
- [10] C.W. Macosko, "Rheology : principles, measurements and applications", Wiley-CH, New-York (1994)
- [11] N. Phan-Thien, "Viscoelasticity", Springer (2002)
- [12] R.I. Tanner, "Engineering Rheology", Clarendon Press, Oxford (1985)
- [13] P. Coussot, "Rhéophysique des pâtes et des suspensions", EDP Sciences (1999)
- [14] K. Walters, "Rheometry", Chapman et Hall, London (1975)
- [15] G. Fuller, "Optical rheometry of complex fluids", Oxford University Press (1996)
- [16] H. Janeschitz-Kriegl, "Polymer melt rheology and birefringence", Springer-Verlag, New-York (1983)
- [17] P.J. Flory, "Principles of polymer chemistry", Cornell University Press (1986)
- [18] D.D. Joseph, "Fluid Dynamics of viscoelastic liquids", Springer-Verlag: Applied mathematical sciences (1990)
- [19] J. Israelachvili, "Intermolecular and surface forces", 2nd edition, Academic Press, London (1992)
- [20] P.G. de Gennes, F. Brochard, D. Quéré, "Gouttes, bulles, perles et ondes", Belin (2002)
- [21] B. Alberts, D. Bray, M. Raff, K. Roberts, J.D. Watson, "Molecular biology of the cell", 3ème édition, Garland Publishing, New-York (1994)
- [22] Y.C. Fung, "Biomechanics. Mechanical properties of living tissues", 2ème édition, Springer-Verlag, New-York (1993)
- [23] J. Coirier, "Mécanique des milieux continus", Dunod (2001)
- [24] Y.C. Fung, "A first course in continuum mechanics", Prentice Hall (1993)
- [25] L. E. Malvern, "Introduction to the mechanics of a continuum medium", Prentice Hall (1969)
- [26] D. Bellet, "Cours d'élasticité" (1990)
- [27] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, "Theory of elasticity", Editions Mir, Moscou (1959)
- [28] S. Candel, "Mécanique des fluides", Dunod (2001) et exercices (1995)
- [29] G.K. Batchelor, "An introduction to Fluid Dynamics", Cambridge University Press, 3ème édition (2000)
- [30] E. Guyon, J.-P. Hulin, L. Petit, "Hydrodynamique Physique", EDP Sciences, Editions C.N.R.S. (2001)
- [31] L. Landau, E. Lifshitz, "Physique théorique : mécanique des fluides", éditions Mir (1986)
- [32] H. Lamb, "Hydrodynamics", Dover (1945)
- [33] L.I. Palade, "Comportement de polymères linéaires amorphes de la transition vitreuse à l'écoulement", Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble (1995)